ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Ch Pisot

Sur une note de Charles Pisot

par

JEAN-PIERRE KAHANE (Orsay)

Il y a tout juste quarante ans, Charles Pisot passait sa thèse, *sur la répartition modulo 1 et les nombres algébriques*. Un an plus tôt, le 1er février 1937, il avait communiqué à l'Académie des Sciences quelques uns de ses résultats, qui me semblent garder leur fraîcheur.

Il y s'agit des entiers algébriques $\theta > 1$ dont tous les conjugués $(\neq \theta)$ ont des modules strictement inférieurs à 1. Pisot lui même les a nommés plus tard nombres de la classe S, en hommage à Salem. Tout le monde les appelle aujourd'hui les nombres de Pisot. Pisot n'est ni le premier ni le seul à les avoir étudiés. Mais l'impulsion qu'il a donné a été décisive dans l'intérêt qui s'est manifesté à leur propos, et il me parait qu'une bonne partie de l'oeuvre de Pisot — et de bien d'autres! — se trouve en germe dans cette note de 1937. Je me bornerai donc essentiellement à un commentaire de ce travail et de ses prolongements.

Si θ est un nombre de Pisot, les formules de Newton montrent que θ^n tend vers 0 modulo 1 à la vitesse d'une exponentielle. De même $\lambda\theta^n$, si λ est un entier algébrique du corps de θ. Le comportement de la suite $\lambda\theta^n$ est donc exceptionnel, si l'on considère comme la règle que la suite $\lambda\theta^n$ $(\lambda > 0,\ \theta > 1)$ soit équirépartie modulo 1 (règle „presque sûre" d'après Koksma, jamais vérifiée sur un exemple jusqu'à présent). Bien d'autres couples de nombres λ et θ donnent lieu à un comportement exceptionnel (Vijayaraghavan, Erdös et Taylor, Furstenberg, Salem et Pisot, etc...); les méthodes élémentaires, la théorie des nombres algébriques et l'analyse de Fourier fournissent outils et exemples. Reste la question, dont l'origine semble remonter à Axel Thue, et qui reste ouverte: si $\lambda\theta^n$ tend vers 0 modulo 1, s'ensuit-il que θ est un nombre de Pisot?

La note de 1937 apporte d'importants éléments de réponse.

1. Si $\sum \|\lambda\theta^n\|^2 < \infty$ ($\|\ \|$ désigne la distance à l'entier le plus voisin), $\theta \in S$ et λ est un nombre algébrique du corps de θ.

2. Si $\|\lambda\theta^n\|$ tend vers 0 et si θ est algébrique, la réponse est la même.

3. Si $\|\lambda\theta^n\|$ tend vers 0, λ et θ appartiennent à des ensembles dénombrables.

4. Pour tout nombre algébrique λ, il existe un nombre de Pisot θ tel que $\|\lambda\theta^n\|$ tende vers 0 à la vitesse d'une exponentielle.

Un peu plus tard et indépendamment, Vijayaraghavan a retrouvé une partie de ces résultats. Essayons d'expliquer leur importance, et certains de leurs prolongements.

La condition $\sum\|\lambda\theta^n\|^2 < \infty$ s'écrit

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} |g(e^{it})|^2 dt < \infty, \\ g(z) = \sum_0^\infty (\lambda\theta^n - a_n)z^n = \dfrac{\lambda}{1-\theta z} - \sum_0^\infty a_n z^n \end{cases}$$

où a_n est l'entier le plus voisin de $\lambda\theta^n$. Pisot montre que par les a_n satisfont à une relation de récurrence linéaire et que conséquent la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ représente une fraction rationnelle à coefficients entiers. Cela entraîne $\theta \in S$.

Si inversement $\theta \in S$, on peut choisir

$$\sum_0^\infty a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

$P(z)$ étant le polynôme irréductible admettant θ pour racine, et $Q(z)$ le polynôme réciproque. Cela permet de définir λ et $g(z)$ de façon que $|g(z)|$ soit majoré par une constante absolue (3 convient) quand $|z| \leqslant 1$. Ainsi, pour une valeur convenable de λ, $0 < \lambda < \theta$,

$$\sum_0^\infty \|\lambda\theta^n\|^2 < 9.$$

L'uniformité de la majoration entraîne que S est un ensemble fermé (Salem 1944).

De là suivent une série de découvertes: les deux plus petits éléments de S (Siegel), le plus petit élément du dérivé S' (Dufresnoy et Pisot), le dérivé transfini de S (il est vide; Dufresnoy et Pisot), le plus petit élément de S'' (Marthe Grandet-Hugot), d'autres ensembles fermés de nombres algébriques analogues à S et utilisant l'analyse p-adique (Pisot, Françoise Bertrandias), etc... Pour que cela paraisse moins mystérieux, voici l'une des clés (Dufresnoy et Pisot): θ appartient au dérivé S' si et seulement s'il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tels que $A(\theta) \neq 0$ et $|A(z)| \leqslant |P(z)|$ pour $|z| = 1$, l'égalité ayant lieu au plus sur un ensemble fini ($P(z)$ est toujours le polynôme irréductible ayant θ pour racine).

Une caractérisation des $\theta \in S$ est donc l'existence d'un $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_0^\infty \sin^2 \pi\lambda\theta^n < \infty.$$

De façon un peu plus cachée (Salem 1942), en posant $\xi = \theta^{-1}$, c'est encore

$$\varlimsup_{u\to\infty} \Big|\prod_0^\infty \cos \xi^n u\Big| > 0 \quad \text{ou} \quad \xi = \tfrac{1}{2}.$$

Or ce produit infini a une grande signification en analyse de Fourier et en probabilité (Erdös 1939).

En langage probabiliste, c'est la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X = \sum_0^\infty \pm \xi^n$, où les signes $+$ et $-$ sont choisis au hasard, indépendamment les uns des autres, avec probabilité $\frac{1}{2}$. Si $\xi = \frac{1}{2}$, la variable aléatoire X est équidistribuée sur l'intervalle $[-1, 1]$. Pour tout autre ξ inverse d'un nombre de Pisot, la fonction caractéristique de X ne tend pas vers 0, donc la distribution de X est singulière. Le résultat est intéressant pour $\xi > \frac{1}{2}$.

Pour $0 < \xi < \frac{1}{2}$, X prend ses valeurs dans un ensemble de Cantor; l'ensemble triadique correspond à $\xi = \frac{1}{3}$. Cet ensemble, E_ξ, est un fermé de mesure nulle. La distribution de X est la mesure naturelle sur cet ensemble — attribuant à des portions égales des masses égales —. Elle est toujours singulière. Désignons la par μ_ξ. Sa transformée de Fourier, $\hat{\mu}_\xi(u)$, n'est autre que le produit infini des cos $\xi^n u$. Elle tend vers 0 à l'infini si et seulement si $\xi^{-1} \notin S$. De plus (Salem, Pyatetskii-Shapiro, Salem et Zygmund), si elle ne tend pas vers 0 à l'infini, c'est-à-dire si $\xi^{-1} \in S$, aucune distribution de Schwartz portée par E_ξ, non nulle, n'a pour transformée de Fourier une fonction tendant vers 0 à l'infini. Depuis les travaux de Cantor sur les séries trigonométriques, on dit qu'un ensemble E sur le cercle est ensemble d'unicité pour le développement trigonométrique si la seule série trigonométrique qui converge vers 0 hors de E est la série nulle. Pour qu'un fermé E soit ensemble d'unicité, il faut et il suffit qu'il ne porte aucune distribution de Schwartz, non nulle, dont la transformée de Fourier tende vers 0 à l'infini. Nous venons donc de dire que l'ensemble E_ξ est ensemble d'unicité si et seulement si $\xi^{-1} \in S$.

C'est là l'un des joyaux des séries trigonométriques. Pour qui s'intéresserait plus avant aux propriétés des ensembles E_ξ en relation avec les séries de Fourier, je renvoie aux écrits de Salem (y compris notre livre en commun), et à Astérisque n°1, où se trouvent d'autres beaux exemples du rôle joué par les nombres de Pisot en analyse harmonique (Yves Meyer).

La condition $\sum\|\lambda\theta^n\|^2 < \infty$ s'est trouvée bien adaptée à certaines applications. Elle est cependant imparfaite. Pisot en a proposé de nombreuses variantes. Voici l'une d'elles: si $\lambda > 1$ et

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n = 0, 1, 2, \ldots$$

avec

$$\varepsilon = \frac{1}{2e\theta(\theta+1)(1+\log\lambda)},$$

θ est un entier algébrique dont les conjugués ($\neq \theta$) ont des modules inférieurs *ou égaux* à 1. L'ensemble T des entiers algébriques qui ont cette propriété sans appartenir à S a été passablement étudié, en particulier par Salem. Il reste très mystérieux (est-il dense sur $[1, \infty[$? $T \cup S$ est-il fermé?). Si $\theta \in T$ et $\lambda > 1$, la suite $\lambda\theta^n$ est dense modulo 1, et elle admet une distribution modulo 1 mais cette distribution n'est pas uniforme (Pisot et Salem).

Si l'on suppose θ algébrique, la condition $\|\lambda\theta^n\| = o(1)$ entraîne que θ est un nombre de Pisot. En fait, et c'est déjà écrit, dans la note de 1937, il suffit que $\|\lambda\theta^n\| < \varepsilon$ avec un $\varepsilon(\theta)$ convenable. L'énoncé le plus frappant dans cette direction est le suivant (Pisot 1946): on suppose θ algébrique; pour que la suite $\lambda\theta^n$ ait un nombre fini de valeurs limites modulo 1, il faut et il suffit que θ soit un nombre de Pisot et que λ soit un nombre algébrique du corps de θ.

Désignons encore que a_n l'entier le plus voisin de $\lambda\theta^n$. Si, à partir d'un certain rang, on a

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \varepsilon < \tfrac{1}{2}(\theta+1)^{-2},$$

on vérifie que

$$(*) \qquad |a_{n+2} - a_{n+1}^2 a_n^{-1}| < \tfrac{1}{2},$$

donc a_{n+2} est bien défini par a_n et a_{n+1}, et la suite a_m est bien déterminée par deux termes consécutifs.

Inversement, si l'on a une suite a_m d'entiers croissants qui, à partir d'un certain rang, vérifient l'inégalité $(*)$, le rapport a_{n+1}/a_n a toujours une limite $\theta \geqslant 1$ et $a_n\theta^{-n}$ une limite λ pour lesquelles

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \varepsilon < \tfrac{1}{2}(\theta-1)^{-2}.$$

Tout cela se trouve littéralement dans la note de 1937; et l'étude des nombres θ de la forme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ où la suite a_m est croissante et vérifie $(*)$ se trouve poursuivie dans la thèse de Pisot. Ils forment un ensemble dénombrable, dense sur $[1, \infty[$, contenant S. Pisot donne des conditions sur a_0 et a_1 pour avoir $\theta > 1$ (inégalité stricte) en montre que, pour $a_0 = 2$ ou 3, on a $\theta \in S$. Cet ensemble reste lui aussi mystérieux.

Comme corollaire des résultats énoncés, on a un critère de transcendance — déjà énoncé en 1937 — : pour que le nombre réel λ soit transcendant, il faut et il suffit que le produit infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos(\pi\lambda x^n)$$

diverge pour tout $x \geqslant 1$.

Le plus important est cependant le cas où λ est algébrique. Soit θ un nombre de Pisot tel que $\|\lambda\theta^n\|$ tende vers 0 à la vitesse d'une exponentielle. Soit encore a_n l'entier le plus voisin de $\lambda\theta^n$, et b_n l'entier le plus voisin de θ^n. Alors les fractions a_n/b_n approchent λ, à la vitesse d'une exponentielle. La relation $(*)$ — qui vaut à partir d'un certain rang pour les b_n comme pour les a_n — donne un algorithme de calcul commode. Quand θ est quadratique, on retrouve ainsi les approximations données par les fractions continues.

Plusieurs travaux de Pisot concernent les approximations des nombres algébriques, les approximations simultanées (Chabauty et Pisot), l'utilisation des fractions continues (Leray et Pisot).

Tout ce qui vient d'être évoqué ne concerne que la partie de l'oeuvre de Pisot directement reliée à sa note de 1937 et aux nombres de Pisot. Je n'ai donc pas parlé de ses travaux avec van der Corput, ni de ceux avec Schoenberg, ni de ses beaux résultats sur les fonctions entières „arithmétiques" (c'est-à-dire appliquant $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{Z}$), ou „presque arithmétiques" (c'est-à-dire telles que $\|f(n)\| = O(\varrho^n)$, $\varrho < 1$). Il n'est pourtant pas très difficile de découvrir une parenté entre ces fonctions entières (dont le prototype est $f(z) = 2^z$) et la distribution de $f(n)$ modulo 1.

D'autres auraient sans doute insisté sur d'autres aspects de l'oeuvre de Pisot, et aussi sur son influence — capitale — dans le développement de la théorie des nombres en France. N'étant pas arithméticien, j'ai pris la liberté d'être partial et partiel. Moyennant cette restriction du champ de vision, ce qui apparait est une préoccupation centrale: la répartition de $\lambda\theta^n$ modulo 1. Comment s'enroule sur le cercle une progression géométrique? Quoi de plus simple comme question[1] ? Il n'y a rien d'étonnant à la retrouver sous-jacente dans plusieurs problèmes concernant les séries trigonométriques. Pisot en a dirigé l'attaque depuis quarante ans. Il est remarquable que son premier essai contienne tant d'idées essentielles, et d'angles de vues: les nombres algébriques, les séries trigonométriques, l'approximation rationnelle. Quand un sujet est aussi riche, il faut se

---

[1] Sinon celle que la thèse de M. Herman a renouvelé depuis peu: comment s'enroule sur le cercle une progression arithmétique?

réjonir autant de voir cerner les problèmes que de les voir résoudre. Pour les problèmes résolus, pour les problèmes posés, Pisot mérite bien la reconnaissance de tous les mathématiciens.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES
Orsay, France

Reçu le 7. 4. 1978 (1060)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Lois de répartition des diviseurs, 1

par

JEAN-MARC DESHOUILLERS, FRANÇOIS DRESS, GÉRALD TENENBAUM (*) (**) (Talence)

En respectueux hommage à Ch. Pisot

1. Introduction. La répartition des diviseurs premiers des entiers est assez bien connue; en particulier P. Erdös a montré [1] que l'ordre de grandeur en moyenne du i-ème facteur premier distinct de n, $p_i(n)$, est $\exp(\exp i)$. Ce résultat a été affiné par J. Galambos [3] qui a montré que, pour toute fonction $j(n)$ tendant vers l'infini en restant „un peu plus petite" que $\log\log n$, la densité des entiers pour lesquels $\log\log p_j(n)-j(n)$ est compris entre $u\sqrt{j}$ et $v\sqrt{j}$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^v \exp(-t^2/2)\,dt.$$

On trouvera une bibliographie assez complète sur ce sujet dans la deuxième partie de cet article (G. Tenenbaum [5]).

La répartition des diviseurs „ordinaires" des entiers est moins bien connue et la première partie de cet article se propose de l'étudier en moyenne. Dans le cas des diviseurs premiers, le bon instrument de travail était $\frac{\log\log p_j(n)}{j}$, ici ce sera une variable aléatoire D_n qui prend les valeurs $\frac{\log d}{\log n}$, d parcourant l'ensemble des diviseurs de l'entier n, avec la probabilité uniforme $1/d(n)$ (ce qui revient à situer les diviseurs par rapport aux puissances n^u, $0\leqslant u\leqslant 1$).

Si nous considérons des classes particulières d'entiers, on connaît deux cas limites:

(*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

(**) Les auteurs tiennent à remercier ici H. Delange pour les conseils et l'aide qu'il leur a apportés au cours de la rédaction de cet article.