where $u_1, \ldots, u_m$ are as before and $0 \leqslant u_{m+1} \leqslant Y$. Arguing as in the deduction of Theorem 1 from Lemma 7 we can prove

THEOREM 1-A. *Let $\beta_0+i\gamma_0$ be a zero of $\zeta(s)$. Then there exist effective positive constants $E_1, E_2, E_3$ and $E_4$ depending only on $\lambda$ such that if $\gamma_0 \geqslant E_1$, $Y \geqslant E_2 \log\log\gamma_0$, then*

$$S_{\lambda,\gamma_0}+S_{\lambda,2\gamma_0} > \frac{E_3}{Y(1-\beta_0)} - E_4.$$

Next we can break up the sum over $\varrho$ in $S_{\lambda,\gamma_0}$ into subsums consisting of zeros $\varrho$ with $n/Y \leqslant |\gamma-\gamma_0| \leqslant (n+1)/Y$ where $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ and estimate the subsums for any fixed $n$ and add these subsums together. We treat $S_{\lambda,2\gamma_0}$ similarly. Appraising these subsums a little we can restate Theorem 1-A in a nicer form as follows. Let $N_v(r)$ denote the number (counted with multiplicity) of zeros of $\zeta(s)$ in $D_r(1+iv)$. Next with $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$, $Y\geqslant 2$ and $V\geqslant 10$ let us write

$$f(V) = f(\lambda, Y, V) = \max_{V-\lambda\leqslant v\leqslant V+\lambda}\left\{N_v(\lambda)e^{-Y\lambda}+\int_0^{Y\lambda} N_v\left(\frac{u}{Y}\right)e^{-u}du\right\}.$$

Then we have

THEOREM 1-B. *Let $\beta_0+i\gamma_0$ be a zero of $\zeta(s)$. Then there exist effective positive constants $E_5, E_6, E_7$ and $E_8$ depending only on $\lambda$ such that if $\gamma_0 \geqslant E_5$, $Y \geqslant E_6 \log\log\gamma_0$, then*

$$f(\gamma_0)+f(2\gamma_0) > \frac{E_7}{Y(1-\beta_0)} - E_8.$$

This (with Jensen's theorem for example) leads at once to the zero free regions.

### References

[1] H. L. Montgomery, *Topics in multiplicative theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, New York 1971.

SCHOOL OF MATHEMATICS
TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH
Homi Bhabha Road, Colaba, Bombay 400 005, India

*Received on 15. 4. 1976* (840)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1978)

# Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutanis Problem)

von

HERBERT MÖLLER (Münster)

**1. Einleitung.** Ist $N_2' := \{n \in \boldsymbol{N};\ 2 \nmid n\}$ und $S\colon N_2' \to N_2'$, $n \mapsto (3n+1)/2^a$ mit eindeutig bestimmtem $a = a(n) \in \boldsymbol{N}$, so heißt die Folge der iterierten Funktionen $(S^k)_{k\in \boldsymbol{N}_0}$ *Syracuse-Algorithmus*, weil ein Mitglied der Universität Syracuse (USA) die folgende merkwürdige Eigenschaft dieses Algorithmus (wieder-) entdeckte: Welche $n \in N_2'$ er auch probierte, die Folge $(S^k(n))_{k\in\boldsymbol{N}_0}$ war immer periodisch mit der Periode $\bar{1}$. Die Vermutung, daß dieses für alle $n \in N_2'$ gilt, ist bis heute unbewiesen, aber mindestens für $n < 2^{50}$ richtig (Fraenkel).

Obwohl dieses Problem, das eine Reihe von verschiedenen Namen trägt (z.B. Kakutani-Problem, Collatz-Problem), von vielen Mathematikern untersucht wurde, ist bis heute nur sehr wenig darüber bekannt (1).

Die folgende weitgehende Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus stammt von H. Hasse, der auch erkannte, daß die entsprechenden Periodizitätsprobleme mit gewissen Reihenentwicklungen in den (Henselschen) $d$-adischen Vervollständigungen des Ringes der ganzrationalen Zahlen zusammenhängen.

Sei $(m, d) \in \boldsymbol{N}^2$ mit $d \geqslant 2$ und $\mathrm{ggT}(m, d) = 1$, $N_d := \{n \in \boldsymbol{Z};\ d \nmid n\}$ sowie $R_d$ ein vollständiges Restsystem modulo $d$ ohne Vielfaches von $d$. Dann gibt es zu jedem $x \in N_d$ genau ein Paar $(r, a) \in R_d \times \boldsymbol{N}$, so daß $(mx-r)/d^a \in N_d$ gilt. Damit ist eine Abbildung $H = H(m, d, R_d)\colon N_d \to N_d$, $x \mapsto (mx-r)/d^a$ mit $r \in R_d$, $a \in \boldsymbol{N}$ definiert. Die Folge der iterierten Funktionen $(H^k)_{k\in\boldsymbol{N}_0}$ mit $H^0 := \mathrm{id}$ und $H^{k+1} = H \circ H^k$ $(k \in \boldsymbol{N}_0)$ bezeichnen wir als *Hasse-Algorithmus*.

Wie bei dem Kakutani-Collatz-Problem stellt sich die Frage, für welche $n \in N_d$ die Folge $(H^k(n))_{k\in\boldsymbol{N}_0}$ periodisch ist, wenn $(m, d, R_d)$ vor-

(1) Herrn Professor Dr. H. Hasse verdanke ich die folgenden Hinweise: J. H. Conway stellte fest, daß Probleme dieser Art unentscheidbar sein können; Riho Terras bewies die Existenz einer „Verteilungsfunktion", die im Unendlichen den Grenzwert Null besitzt.

gegeben wird. Für $m < d$ ist $(H^k(n))_{k\in N_0}$ offensichtlich stets beschränkt, also periodisch, so daß für weitere Untersuchungen nur die Fälle $m > d$ interessant sind. Computer-Berechnungen lassen vermuten, daß es eine nur von $d$ abhängige Schranke $D(d)$ gibt, so daß $(H^k(n))_{k\in N_0}$ genau dann für alle $n \in N_d$ periodisch ist, wenn $m < D(d)$ gilt.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden Satz, der zwar noch keine Antwort auf die obigen Fragen gibt, der aber doch eng damit zusammenhängt:

SATZ 1. *Ist $m < d^{d/(d-1)}$, so besitzt die Menge*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(m, d, R_d)$$
$$:= \{n \in N \cap N_d;\ \textit{Es gibt } k \in N, \textit{ so daß } H^k(n) < n \textit{ ist}\} \cup \{n \in N;\ d|n\}$$

*die natürliche Dichte 1, d.h. es gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{card}\{n \in \mathscr{L};\ n \leqslant x\} = 1.$$

Wir vermuten, daß auch die Umkehrung richtig ist und daß anstelle der Dichteaussage sogar die folgenden Endlichkeitsaussagen gelten:

VERMUTUNG. (i) *$N \setminus \mathscr{L}$ ist genau dann endlich, wenn $m < d^{d/(d-1)}$ gilt.*

(ii) *Die Menge der reinen Perioden ist stets endlich.*

Ist diese Vermutung richtig, so folgt sofort, daß $D(d) = d^{d/(d-1)}$ die gesuchte Schranke für durchgehende Periodizität darstellt.

Der Beweis des Satzes erfolgt in drei Schritten, wobei im dritten Schritt entscheidend die in [2] entwickelte Theorie der „$F$-Normalreihen" verwendet wird.

**2. Tunnellänge und Kongruenzsysteme.** Im folgenden seien $m$, $d$ und $R_d$ entsprechend den obigen Bedingungen fest gewählt. Für $n \in \mathscr{L}$ bezeichnen wir die Zahl

$$L(n) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } d|n, \\ \min\{k \in N;\ H^k(n) < n\} & \text{sonst}, \end{cases}$$

in naheliegender Weise als *Tunnellänge von n*. Mit $\mathscr{L}_k := \{n \in N;\ L(n) = k\}$ für $k \in N_0$ ist dann $\mathscr{L} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}_k$.

Wir zeigen zunächst, daß $\mathscr{L}_k$ im wesentlichen aus den Lösungen endlich vieler linearer Kongruenzen besteht. Ist $\alpha_i$ der Exponent von $d$ im $i$-ten Iterationsschritt $H^{i-1}(n) \mapsto H^i(n)$ $(i \in N)$, $r_{i-1}$ der entsprechende „Rest" aus $R_d$ sowie $\sigma_i := \sum_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu$, $\sigma_0 := 0$, so folgt mit vollständiger Induktion nach $k$:



$$(1)\qquad H^k(n) = \Big(m^k n - \sum_{i=0}^{k-1} r_i m^{k-1-i} d^{\sigma_i}\Big) d^{-\sigma_k} \quad \text{für alle } k \in N.$$

Wegen $H^k(n) \in N_d$ gilt

$$(2)\qquad m^k n \equiv \sum_{i=0}^{k-1} r_i m^{k-1-i} d^{\sigma_i} (\operatorname{mod} d^{\sigma_k}) \quad \text{für alle } k \in N.$$

((2) ist äquivalent zu der Reihenentwicklung $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i \frac{d^{\sigma_i}}{m^{i+1}}$ in der $d$-adischen Vervollständigung des Ringes der ganzrationalen Zahlen; vgl. [1]).

Für hinreichend großes $n \in N_d$ ist $H^k(n) < n$ nur möglich, wenn $d^{\sigma_k} > m^k$ gilt. Wir setzen deshalb für jedes $k \in N_0$

$$(3)\qquad s_k := \min\{s \in N;\ d^s > m^k\} = \left[k \frac{\log m}{\log d}\right] + 1.$$

Beachtet man, daß umgekehrt aus $\sigma_j < s_j$ für $j = 0, \ldots, i$ $H^i(n) \geqslant n$ für hinreichend großes $n \in N_d$ folgt, so ist es naheliegend, $\mathscr{L}_k$ mit den folgenden Lösungsmengen linearer Kongruenzen zu vergleichen:

Ist $\Sigma_k := \{(\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}) \in N_0^k;\ \sigma_0 < \ldots < \sigma_{k-1},\ \sigma_i < s_i,\ i = 0, \ldots, k-1\}$ für $k \in N$, so sei für jedes $\sigma \in \Sigma_k$ und jedes $\varrho = (r_0, \ldots, r_{k-1}) \in R_d^k$

$$(4)\qquad \mathscr{M}(\sigma, \varrho) := \Big\{n \in N;\ m^k n \equiv \sum_{i=0}^{k-1} r_i m^{k-1-i} d^{\sigma_i} (\operatorname{mod} d^{s_k})\Big\}$$

sowie

$$(5)\qquad \mathscr{M}_k := \bigcup_{\sigma\in\Sigma_k} \bigcup_{\varrho\in R_d^k} \mathscr{M}(\sigma, \varrho) \quad \text{für} \quad k \in N, \quad \mathscr{M}_0 := \mathscr{L}_0.$$

Dann gilt

SATZ 2. *Für jedes $k \in N_0$ unterscheiden sich $\mathscr{L}_k$ und $\mathscr{M}_k$ in höchstens endlich vielen Elementen.*

Beweis. Für $k = 0$ ist $\mathscr{L}_0 = \mathscr{M}_0$. Im folgenden sei $k > 0$. Wir berechnen Schranken $g_1 = g_1(H, k)$ und $g_2 = g_2(H, k)$, so daß für jedes $n \in \mathscr{M}_k$ mit $n > g_1$ auch $n \in \mathscr{L}_k$ bzw. für jedes $n \in \mathscr{L}_k$ mit $n > g_2$ auch $n \in \mathscr{M}_k$ gilt. Dazu setzen wir $R := \max\{|r|;\ r \in R_d\}$ und beachten, daß (3) für $k \in N$ zu $d^{s_k-1} < m^k < d^{s_k}$ äquivalent ist.

(a) Sei $n \in \mathscr{M}_k$. Dann ist $\sigma_i \leqslant s_i - 1$ für $i = 0, \ldots, k-1$, und es folgt mit (1)

$$d^{\sigma_k} H^k(n) = m^k n - \sum_{i=0}^{k-1} r_i m^{k-1-i} d^{\sigma_i} \leqslant m^k n + R \sum_{i=0}^{k-1} m^{k-1-i} d^{s_i-1}$$
$$\leqslant m^k n + R k m^{k-1}.$$

Wegen $\sigma_k \geqslant s_k$ gilt damit $H^k(n) < n$ für alle $n \in N_d$ mit $n > \dfrac{Rkm^{k-1}}{d^{s_k}-m^k}$.

Analog folgt für $j \in \{1, \ldots, k-1\}$
$$d^{\sigma_j} H^j(n) \geqslant m^j n - Rjm^{j-1}.$$
Wegen $\sigma_j \leqslant s_j - 1$ ist also $H^j(n) \geqslant n$ für alle $n \in N_d$ mit $n \geqslant \dfrac{Rjm^{j-1}}{m^j - d^{s_j-1}}$.

Setzen wir
$$g_0 := \max\left\{\frac{Rjm^{j-1}}{m^j - d^{s_j-1}};\ j = 1, \ldots, k-1\right\},$$
so ist
$$g_1 := \max\left\{g_0, \frac{Rkm^{k-1}}{d^{s_k}-m^k}\right\}$$
eine Schranke derart, daß jedes $n \in \mathcal{M}_k$ mit $n > g_1$ auch zu $\mathcal{L}_k$ gehört.

(b) Sei $n \in \mathcal{L}_k$. Ist $n \geqslant \dfrac{Rkm^{k-1}}{m^k - d^{s_k-1}}$, so gibt es $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\sigma_i \geqslant s_i$; denn aus $\sigma_i < s_i$ für $i = 0, \ldots, k$ würde wie oben
$$d^{\sigma_k} H^k(n) \geqslant m^k n - Rkm^{k-1} \geqslant nd^{\sigma_k}$$
folgen — im Widerspruch zu $n \in \mathcal{L}_k$.

Setzen wir nun $h := \min\{i \in N;\ \sigma_i \geqslant s_i\}$, so ist $n \in \mathcal{M}_h$. Für $n > g_1(H, h)$ folgt dann nach (a), daß $n \in \mathcal{L}_h$ gilt. Ist $h < k$ und
$$n > g_3 := \max\{g_1(H, h);\ h = 1, \ldots, k-1\},$$
so kann die Voraussetzung $n \in \mathcal{L}_k$ nicht erfüllt sein. Also muß für $n > g_3$ $h = k$ gelten. Damit ist
$$g_2 := \max\left\{g_3, \frac{Rkm^{k-1}}{m^k - d^{s_k-1}}\right\}$$
eine Schranke derart, daß jedes $n \in \mathcal{L}_k$ mit $n > g_2$ auch zu $\mathcal{M}_k$ gehört.

**3. Disjunktheit.** Zur Berechnung der natürlichen Dichte von $\mathcal{L}$ in 4. benötigen wir einige Disjunktheitsaussagen für $\mathcal{M}(\sigma, \varrho)$.

SATZ 3. *Seien $k, l \in N$, $\sigma \in \Sigma_k$, $\varrho \in R_d^k$ sowie $\sigma' \in \Sigma_l$, $\varrho' \in R_d^l$ mit $(\sigma, \varrho) \neq (\sigma', \varrho')$. Dann gilt $\mathcal{M}(\sigma, \varrho) \cap \mathcal{M}(\sigma', \varrho') = \emptyset$. Insbesondere ist $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{M}_l = \emptyset$ für alle $k, l \in N_0$ mit $k \neq l$.*



Beweis. Wir nehmen an, daß es $n \in \mathcal{M}(\sigma, \varrho) \cap \mathcal{M}(\sigma', \varrho')$ gibt, und zeigen durch Unterscheidung von drei Fällen, daß sich jeweils ein Widerspruch ergibt. Ohne Beschränkung sei $1 \leqslant k \leqslant l$. Außerdem sei
$$C_k(n) := m^k n - \sum_{i=0}^{k-1} r_i m^{k-1-i} d^{\sigma_i},$$
$$C'_l(n) := m^l n - \sum_{i=0}^{l-1} r'_i m^{l-1-i} d^{\sigma'_i},$$
$$u := \begin{cases} k, & \text{wenn } (\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}) = (\sigma'_0, \ldots, \sigma'_{k-1}),\\ \min\{i \in N;\ i \leqslant k-1,\ \sigma_i \neq \sigma'_i\} & \text{sonst,}\end{cases}$$
$$v := \begin{cases} k, & \text{wenn } (r_0, \ldots, r_{k-1}) = (r'_0, \ldots, r'_{k-1}),\\ \min\{i \in N_0;\ i \leqslant k-1,\ r_i \neq r'_i\} & \text{sonst.}\end{cases}$$
Wegen $n \in \mathcal{M}(\sigma, \varrho)$ und $n \in \mathcal{M}(\sigma', \varrho')$ gilt
$$(6)\qquad \begin{cases} C_k(n) \equiv 0 \pmod{d^s} & \text{für jedes } s \leqslant s_k \text{ sowie,}\\ C'_l(n) \equiv 0 \pmod{d^t} & \text{für } t \leqslant s_l.\end{cases}$$
Ferner ist
$$(7)\qquad C'_l(n) = m^{l-k} C_k(n) + \sum_{i=0}^{k-1} m^{l-1-i}(r_i d^{\sigma_i} - r'_i d^{\sigma'_i}) - \sum_{i=k}^{l-1} r'_i m^{l-1-i} d^{\sigma'_i},$$
wobei die letzte Summe für $k = l$ verschwindet.

1. Fall: $v < u$. Dann ist $\sigma_i = \sigma'_i$ für $i = 0, \ldots, v$ und $r_i = r'_i$ für $i = 0, \ldots, v-1$ (falls $v > 0$). Außerdem ergibt (6) wegen $\sigma_v < s_k \leqslant s_l$
$$C_k(n) \equiv C'_l(n) \equiv 0 \pmod{d^{\sigma_v+1}}.$$
Damit folgt mit (7):
$$C'_l(n) \equiv m^{l-1-v}(r_v - r'_v) d^{\sigma_v} \equiv 0 \pmod{d^{\sigma_v+1}}.$$
Wegen $\operatorname{ggT}(m, d) = 1$ müßte also $r_v \equiv r'_v \pmod{d}$ gelten, was wegen $r_v, r'_v \in R_d$ und $r_v \neq r'_v$ nicht möglich ist.

2. Fall: $v \geqslant u$, $u < k$. Hier ist $\sigma_i = \sigma'_i$ und $r_i = r'_i$ für $i = 0, \ldots, u-1$. Ohne Beschränkung sei $\sigma'_u \geqslant \sigma_u + 1$. Wegen $\sigma_u + 1 \leqslant s_k \leqslant s_l$ gilt dann mit (6) und (7)
$$C'_l(n) \equiv m^{l-1-u} r_u d^{\sigma_u} \equiv 0 \pmod{d^{\sigma_u+1}},$$
so daß $d \mid r_u$ wäre — im Widerspruch zu $r_u \in R_d$.

3. Fall: $u = v = k$. Wegen der Voraussetzung $(\sigma, \varrho) \neq (\sigma', \varrho')$ muß nun $l > k$ gelten. Dann ist $\sigma'_k + 1 \leqslant s_k < s_l$ und $\sigma'_i \geqslant \sigma'_k + 1$ für $i \geqslant k+1$.

Damit ergeben (6) und (7)

$$C_l'(n) \equiv -r_k' m^{l-1-k} d^{\sigma_k'} \equiv 0 \pmod{d^{\sigma_k'+1}},$$

so daß $d | r_k'$ gelten müßte — im Widerspruch zu $r_k' \in R_d$.

Als Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen $\mathcal{M}(\sigma, \varrho)$ sind $\mathcal{M}_k$ und $\mathcal{M}_l$ für $k, l \in \boldsymbol{N}$ mit $k \neq l$ disjunkt. Da $\mathcal{M}_k$ für $k > 0$ keine durch $d$ teilbaren Zahlen enthält, ist auch $\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_k = \emptyset$.

**4. Dichten.** Ist $\mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{N}$, so bezeichnen wir im Anschluß an Ostmann [3]

$$\delta^*(\mathcal{A}) := \varliminf_{x=1,2,\ldots} \frac{1}{x} \operatorname{card}\{n \in \mathcal{A};\ n \leqslant x\}$$

als *asymptotische Dichte von* $\mathcal{A}$ und

$$\bar{\delta}^*(\mathcal{A}) := \varlimsup_{x=1,2,\ldots} \frac{1}{x} \operatorname{card}\{n \in \mathcal{A};\ n \leqslant x\}$$

als *obere asymptotische Dichte von* $\mathcal{A}$.

Dann gilt stets

$$0 \leqslant \delta^*(\mathcal{A}) \leqslant \bar{\delta}^*(\mathcal{A}) \leqslant 1. \tag{8}$$

Ist $\delta^*(\mathcal{A}) = \bar{\delta}^*(\mathcal{A})$, so wird

$$\delta_*(\mathcal{A}) := \delta^*(\mathcal{A}) = \bar{\delta}^*(\mathcal{A}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{card}\{n \in \mathcal{A};\ n \leqslant x\}$$

*natürliche Dichte von* $\mathcal{A}$ genannt.

Setzen wir $c_k := \operatorname{card} \Sigma_k$ für $k \in \boldsymbol{N}$ und $c_0 := 1$, so besitzt $\mathcal{M}_k$ als Vereinigung von $c_k(d-1)^k$ paarweise disjunkten Kongruenzklassen modulo $d^{s_k}$ für jedes $k \in \boldsymbol{N}_0$ die natürliche Dichte $\delta_*(\mathcal{M}_k) = c_k(d-1)^k d^{-s_k}$. Da $\mathcal{L}_k$ sich in höchstens endlich vielen Elementen von $\mathcal{M}_k$ unterscheidet, gilt auch

$$\delta_*(\mathcal{L}_k) = c_k(d-1)^k d^{-s_k} \quad \text{für jedes } k \in \boldsymbol{N}_0. \tag{9}$$

Außerdem folgt für $\bigcup\limits_{k=0}^{N} \mathcal{L}_k$, $N \in \boldsymbol{N}$, als Vereinigung von paarweise disjunkten Zahlenmengen

$$\delta_*\Big(\bigcup_{k=0}^{N} \mathcal{L}_k\Big) = \sum_{k=0}^{N} \delta_*(\mathcal{L}_k). \tag{10}$$

Ferner ist $\mathcal{L} \supset \bigcup\limits_{k=0}^{N} \mathcal{L}_k$ für jedes $N \in \boldsymbol{N}_0$, und wegen

$$\delta^*(\mathcal{L}) \geqslant \delta^*\Big(\bigcup_{k=0}^{N} \mathcal{L}_k\Big) = \delta_*\Big(\bigcup_{k=0}^{N} \mathcal{L}_k\Big)$$

folgt schließlich mit (9) und (10)

$$\delta^*(\mathcal{L}) \geqslant \sum_{k=0}^{N} c_k(d-1)^k d^{-s_k} \quad \text{für jedes } N \in \boldsymbol{N}_0. \tag{11}$$



Die Folge $\Big(\sum\limits_{k=0}^{N} c_k(d-1)^k d^{-s_k}\Big)_{N \in \boldsymbol{N}_0}$ ist positiv, monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt, also konvergent, und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(d-1)^k d^{-s_k} \leqslant 1$. Der folgende Satz gibt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Grenzwert 1 ist.

Satz 4. *Seien* $m, d \in \boldsymbol{N}$ *mit* $2 \leqslant d < m$ *und* $(m, d) \neq (4, 2)$,

$$s_k := \left[k \frac{\log m}{\log d}\right] + 1 \quad \textit{für} \quad k \in \boldsymbol{N}_0,$$

$$c_k := \operatorname{card}\{(\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}) \in \boldsymbol{N}_0^k;\ \sigma_0 < \ldots < \sigma_{k-1},\ \sigma_i < s_i,\ i = 0, \ldots, k-1\}$$

*für* $k \in \boldsymbol{N}$ *sowie* $c_0 := 1$. *Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(d-1)^k d^{-s_k} = 1$$

*genau dann, wenn* $m < d^{d/(d-1)}$ *ist.*

Beweis. Wir verwenden die in [2] entwickelte Theorie der $F$-Normalreihen, wobei eine Funktionenreihe

$$N(F;\ x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k (1-x)^{n_k - k} \quad \text{für} \quad x \in [0, 1]$$

*$F$-Normalreihe* heißt, wenn $F := (n_k)_{k \in \boldsymbol{N}_0}$ eine monoton wachsende Folge $(n_{k+1} \geqslant n_k)$ natürlicher Zahlen ist und $c_k$ durch $c_k := c_k(F) = \operatorname{card}\{(m_0, \ldots, m_{k-1}) \in \boldsymbol{N}_0^k;\ m_0 < \ldots < m_{k-1},\ m_i < n_i,\ i = 0, \ldots, k-1\}$ für $k \in \boldsymbol{N}$ sowie $c_0 := 1$ definiert wird.

Mit $n_k := s_k$ für $k \in \boldsymbol{N}_0$ und $x = 1 - 1/d$ ergeben sich die zu berechnenden Reihen als spezielle Werte von $F$-Normalreihen:

$$N\left((s_k)_{k \in \boldsymbol{N}_0};\ 1 - \frac{1}{d}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(1 - \frac{1}{d}\right)^k \left(\frac{1}{d}\right)^{s_k - k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (d-1)^k d^{-s_k}.$$

Ist $F_\alpha := ([\alpha k] + c)_{k \in \boldsymbol{N}_0}$ mit $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \geqslant 1$ und $c \in \boldsymbol{N}$, so gilt nach Satz 7 in [2] $N(F_\alpha;\ x) = 1$ für jedes $x \in [0, 1/\alpha)$. Mit $\alpha := \dfrac{\log m}{\log d}$ folgt also in unserem Falle $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(d-1)^k d^{-s_k} = 1$, wenn $1 - \dfrac{1}{d} < \dfrac{\log d}{\log m}$ ist, d.h. wenn $m < d^{d/(d-1)}$ gilt.

Ähnlich wie in [2] zeigen wir, daß für $F_\alpha$ mit $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha > 1$, $N(F_\alpha; x) < 1$ gilt, wenn $x \in (1/\alpha, 1]$ ist. Für $\alpha = a/b \in \boldsymbol{Q}$ ergibt sich dieses aus der Darstellung

$$N(F_\alpha;\ x) = \sum_{l=0}^{b-1} (1-x)^{n_l - al} \sum_{j=0}^{\infty} c_{bj+l}\, y^{bj+l} \quad \text{mit} \quad y := x(1-x)^{\alpha-1},$$

die im Beweis von Satz 5 in [2] hergeleitet wurde: Da

$$f(x) = x(1-x)^{a-1} \quad \text{für} \quad x \in [0, 1/a)$$

streng monoton wachsend und für $x \in (1/a, 1]$ streng monoton fallend ist, gibt es zu jedem $x \in (1/a, 1]$ genau ein $x_1 \in [0, 1/a)$, so daß

$$y = x(1-x)^{a-1} = x_1(1-x_1)^{a-1}$$

gilt. Damit folgt sofort

$$N(F_a;\ x) < N(F_a;\ x_1) = 1.$$

Für $a \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, $a > 1$, beweisen wir die obige Aussage mit Hilfe von Satz 6 in [2], der unter anderem besagt, daß $N(F'; x) \leqslant N(F; x)$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt, wenn $F'$ aus $F$ durch Vergrößerung eines Folgengliedes von $F$ um 1 entsteht, ohne daß dabei die Monotoniebedingung verletzt wird.

Ist $x \in (1/a, 1]$, so gibt es $\varrho \in \boldsymbol{Q}$ mit $1/a < 1/\varrho < x$. Damit gilt einerseits nach dem oben Bewiesenen $N(F_\varrho;\ x) < 1$; andererseits ist $N(F_a;\ x) \leqslant N(F_\varrho; x)$, da wegen $[\varrho k]+c \leqslant [ak]+c$ für alle $k \in \boldsymbol{N}_0$ $F_\varrho$ in $F_a$ überführt werden kann, indem man sukzessive jeweils endlich viele oder unendlich viele aufeinanderfolgende Glieder um 1 erhöht.

In unserem Falle ist also $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(d-1)^k d^{-s_k} < 1$, wenn $1 - \dfrac{1}{d} > \dfrac{\log d}{\log m}$, d.h. $m > d^{d/(d-1)}$ gilt. Da der Fall $m = d^{d/(d-1)}$ nicht eintreten kann, ist damit Satz 4 vollständig bewiesen.

Der Beweis von Satz 1 ergibt sich nun sofort aus (11) und Satz 4: Für $m < d^{d/(d-1)}$ ist $\delta^*(\mathscr{L}) \geqslant 1$, also wegen (8) $\delta^*(\mathscr{L}) = \bar{\delta}^*(\mathscr{L}) = 1$, so daß auch die natürliche Dichte von $\mathscr{L}$ existiert und gleich 1 ist.

Ergänzung bei Drucklegung. Der Beweis des Hauptergebnisses der anfangs erwähnten Arbeit [5] ist fehlerhaft.

**Literaturverzeichnis**


[1] K. Hensel, *Zahlentheorie*, Leipzig 1913.

[2] H. Möller, *F-Normalreihen*, J. Reine Angew. Math. 289(1977), S. 135–143.

[3] H.-H. Ostmann, *Additive Zahlentheorie I*, Berlin–Heidelberg–New York 1968.

[4] C. J. Everett, *Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+1$*, Advances in Math. 25 (1977), S. 42–45.

[5] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. 30 (1976), S. 241–252.


*Eingegangen am 7. 9. 1976* (875)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1978)

# Reducibility of lacunary polynomials, III

by

A. Schinzel (Warszawa)

**1.** The present paper is a sequel to [11] and the notation of that paper is used throughout. All the polynomials considered are supposed to have integral coefficients unless stated to the contrary. Reducibility means reducibility over the rational field $\boldsymbol{Q}$.

If $f(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ is a polynomial then

$$f(x_1, \ldots, x_k) \stackrel{\text{can}}{=} \text{const} \prod_{\sigma=1}^{s} f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma}$$

means that the polynomials $f_\sigma$ are irreducible and prime to each other.

If $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k) \prod_{i=1}^{k} x_i^{a_i}$, where $f$ is a polynomial prime to $x_1 x_2 \ldots x_k$ and $a_i$ are integers, then we set

$$J\Phi(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k).$$

A polynomial $g$ such that

$$Jg(x_1^{-1}, \ldots, x_k^{-1}) = \pm g(x_1, \ldots, x_k)$$

is called *reciprocal*. Let

$$J\Phi(x_1, \ldots, x_k) \stackrel{\text{can}}{=} \text{const} \prod_{\sigma=1}^{s} f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma}.$$

We set

$$K\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \text{const}\, \Pi_1 f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma},$$
$$L\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \text{const}\, \Pi_2 f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma},$$

where $\Pi_1$ is extended over all $f_\sigma$ that do not divide $J(x_1^{\delta_1} \ldots x_k^{\delta_k} - 1)$ for any $[\delta_1, \ldots, \delta_k] \neq 0$, $\Pi_2$ is extended over all $f_\sigma$ that are non-reciprocal. The leading coefficients of $K\Phi$ and $L\Phi$ are assumed equal to that of $J\Phi$. In particular for $k = 1$ $K\Phi(x)$ equals $J\Phi(x)$ deprived of all its cyclotomic factors and is called the kernel of $\Phi$.