On prouve aisément que l'on a

$$\frac{w}{(\gamma p^r)^3} \leqslant \frac{fp}{\gamma^2(r+1)(2r+1)}.$$

En particulier, le rapport $w/(\gamma p^r)^3$ est inférieur ou égal au rapport $fp/(p^f-1)^2(r+1)(2r+1)$. On en déduit, en considérant d'abord le cas $p = 2$, que l'ordre de G est strictement inférieur à 3. D'autre part, l'ordre de G est

$$\log_{\gamma p^r} d(p^{r+1}-1)+\log_{\gamma p^r}\left[\frac{p^r}{2r+1}\right]+\log_{\gamma p^r}\left[\frac{\gamma p^r}{e(r+1)}\right].$$

Lorsque r tend vers l'infini, chacun des trois logarithmes tend vers 1 et on a prouvé:

THÉORÈME 2. *La dimension diophantienne de K est supérieure ou égale à trois.*

Je crois que, si K est une extension finie du corps des nombres p-adiques, on a $\mathrm{dd}(K) = 3$; une preuve de ceci ne constituerait qu'un premier pas dans l'étude des propriétés diophantiennes des corps p-adiques, car une étude plus approfondie se devrait de déterminer les fonctions $\varphi(K, s)$ et $\varphi_n(K, s)$ que j'ai définies dans [4].

Bibliographie

[1] J. Browkin, *On forms over p-adic fields*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. 14 (1966), p. 489–492.

[2] S. Schanuel, *Extensions of Terjanian's counter-example*, Notices Amer. Math. Soc. 14 (1967), p. 125–126.

[3] G. Terjanian, *Un contre-exemple à une conjecture d'Artin*, C.R.A.S. Paris 262A (1966), p. 612.

[4] — *Dimension arithmétique d'un corps*, J. of Algebra 22 (1972), p. 517–545.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
Toulouse, France

Reçu le 5. 5. 1976
et dans la forme modifiée le 10. 7. 1976 (847)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1978)

Формулы для числа представлений чисел некоторыми регулярными и полурегулярными тернарными квадратичными формами, принадлежащими двухклассным родам

Г. А. Ломадзе (Тбилиси)

1. Джонс и Полл [3] доказали, что существует лишь 20 *регулярных* примитивных положительных квадратичных форм вида

$$f = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2,$$

принадлежащих многоклассным родам. Они также нашли связанные с родами этих форм арифметические прогрессии, все числа которых и только они непредставимы соответствующей формой f. Далее, в [3] приведены и формы всех других классов упомянутых многоклассных родов. Эти формы являются *полурегулярными* примитивными квадратичными формами вида

$$g = \{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{13}, c_{12}\} = $$
$$= c_{11}x_1^2+c_{22}x_2^2+c_{33}x_3^2+2c_{23}x_2x_3+2c_{13}x_1x_3+2c_{12}x_1x_2;$$

для некоторых из них в [3] найдены числа, которые вместе с числами упомянутых арифметических прогрессий также непредставимы соответствующей формой g.

В следующей ниже таблице приведены 6 из имеющихся 20 регулярных примитивных квадратичных форм f, принадлежащих двухклассным родам (первый столбец) и им соответствующие полурегулярные примитивные квадратичные формы g из другого класса того же рода (третий столбец); во втором столбце помещены арифметические прогрессии, все числа которых и только они непредставимы формами f (все числа этих прогрессий непредставимы и формами g); в четвертом столбце помещены множества чисел n, которые вместе с числами указанных арифметических прогрессий также непредставимы формами g.

Впервые Полл [10] получил формулы для числа представлений произвольных натуральных чисел формой $\{1, 1, 16\}$. Эти формулы выражаются через число представлений натурального числа суммой трех квадратов. Затем Л. Коган ([5], [6]) получил формулы для числа

f	арифметические прогрессии	g	$g \neq n$
$\{1, 1, 16\}$	$4\eta+3,\ 8\eta+6,\ 32\eta+12,$ $4^{\mu}(8\eta+7)\ (\mu \geqslant 1)$	$\{2, 2, 5, -1, -1, 0\}$	$n = s^2,\ s = \prod_{\substack{p \mid s \\ p \equiv 1 \pmod 4}} p^r$
$\{1, 4, 16\}$	$4\eta+2,\ 4\eta+3,\ 16\eta+12,$ $4^{\mu}(8\eta+7)\ (\mu \geqslant 2)$	$\{4, 4, 5, 0, -2, 0\}$	
$\{1, 16, 16\}$	$4\eta+2,\ 4\eta+3,\ 8\eta+5,$ $16\eta+8,\ 16\eta+12,$ $4^{\mu}(8\eta+7)\ (\mu \geqslant 2)$	$\{4, 9, 9, 1, 2, 2\}$	
$\{1, 8, 64\}$	$4\eta+2,\ 8\eta+3,\ 64\eta+40,$ $4^{l}(8\eta+5),\ 4^{l}(8\eta+7)\ (l = 0, 1),$ $4^{\mu}(16\eta+14)\ (\mu \geqslant 1)$	$\{4, 8, 17, 0, -2, 0\}$	$n = s^2,\ s = \prod_{\substack{p \mid s \\ p \equiv 1,3 \pmod 8}} p^r$
$\{1, 3, 36\}$	$3\eta+2,\ 4\eta+2,$ $9^{\mu}(9\eta+6)\ (\mu \geqslant 0)$	$\{3, 4, 9\}$	$n = s^2,\ s = \prod_{\substack{p \mid s \\ p \equiv 1 \pmod 3}} p^r$
$\{1, 12, 36\}$	$3\eta+2,\ 4\eta+2,\ 4\eta+3,$ $9^{\mu}(9\eta+6)\ (\mu \geqslant 0)$	$\{4, 9, 12\}$	

представлений натуральных чисел $n \equiv 1 \pmod 4$ формой $\{1, 1, 16\}$, натуральных чисел $n \equiv 1 \pmod 8$ формой $\{1, 8, 64\}$ и произвольных натуральных чисел формами $\{1, 4, 16\}$ и $\{1, 16, 16\}$. Эти формулы так же, как и известные формулы Кронекера для числа представлений суммой трех квадратов, выражаются через известные теоретико-числовые функции $G(n)$ и $F(n)$. Формулы для числа предствлений произвольных натуральных чисел формами $\{1, 3, 36\}$ и $\{1, 12, 36\}$ получены нами в статье [7]. Наши формулы имеют тот недостаток, что они зависят не только от представляемого числа, но и от определителя данной формы.

В настоящей работе методом модулярных форм получены сравнительно простые и удобные для вычислений формулы для числа представлений произвольных натуральных чисел упомянутыми выше шестью регулярными и шестью полурегулярными квадратичными формами. Так называемые дополнительные члены этих формул представляют собой простые теоретико-числовые функции.

Из полученных формул, в частности, непосредственно следуют и упомянутые выше результаты Джонса и Полла о числах непредставимых соответствующими квадратичными формами.

Что касается остальных 14 регулярных и 16 полурегулярных квадратичных форм, найденных Джонсом и Поллом, то для них нам не удалось получить такие формулы, дополнительные члены которых имели бы простой арифметический смысл.

2. В настоящей работе будут применяться следующие обозначения: N, a, d, n, q, r — натуральные числа; b, m, s, u, v — нечетные натуральные числа; p — нечетное простое число; $\varkappa, \omega$ — бесквадратные числа; $l, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \mu$ — неотрицательные целые числа (за

исключением стр. 134–136 настоящего параграфа, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — любые целые числа); c, g, h, j, k, t, x — целые числа; A, B, C, z, τ — комплексные величины, причем $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Далее, полагаем: $e(z) = e^{2\pi i z}$, $Q = e^{2\pi i \tau} \cdot \left(\frac{h}{u}\right)$ — обобщенный символ Якоби; $S(h, q)$ — сумма Гаусса; $r(n;\ a_1, a_2, a_3)$ — число представлений числа n формой $\{a_1, a_2, a_3\}$ ($r(n;\ c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{13}, c_{12})$ — формой $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{13}, c_{12}\}$); Δ — определитель этой формы, a — общее наименьшее кратное всех a_k.

Далее, пусть

$$(2.1)\qquad \vartheta_{gh}(z\,|\,\tau;\ c, N) = \sum_{k \equiv c \pmod N} (-1)^{h(k-c)/N} e\left(\frac{(k+g/2)^2}{2N}\tau\right) e\big((k+g/2)z\big).$$

Положив

$$\vartheta_{gh}(\tau;\ c, N) = \vartheta_{gh}(0\,|\,\tau;\ c, N), \qquad \vartheta'_{gh}(\tau;\ c, N) = \frac{\partial}{\partial z}\vartheta_{gh}(z\,|\,\tau;\ c, N)\Big|_{z=0},$$

получим

$$(2.2)\qquad \vartheta_{gh}(\tau;\ 0, N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{hk} Q^{(2Nk+g)^2/8N},$$

$$(2.3)\qquad \vartheta'_{gh}(\tau;\ 0, N) = \pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{hk}(2Nk+g) Q^{(2Nk+g)^2/8N}.$$

Известно ([4], стр. 318, формулы (1.2), (1.4)), что

$$\vartheta_{g+2j,h}(z\,|\,\tau;\ c, N) = \vartheta_{gh}(z\,|\,\tau;\ c+j, N),$$
$$\vartheta_{gh}(z\,|\,\tau;\ c+Nj, N) = (-1)^{hj}\vartheta_{gh}(z\,|\,\tau;\ c, N),$$

откуда следует

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \vartheta'_{g+2j,h}(\tau;\ c, N) &= \vartheta'_{gh}(\tau;\ c+j, N), \\ \vartheta'_{gh}(\tau;\ c+Nj, N) &= (-1)^{hj}\vartheta'_{gh}(\tau;\ c, N). \end{aligned}$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$(2.5)\qquad \vartheta_{-g,h}(\tau;\ 0, N) = \vartheta_{gh}(\tau;\ 0, N), \qquad \vartheta'_{-g,h}(\tau;\ 0, N) = -\vartheta'_{gh}(\tau;\ 0, N).$$

Из (2.2) также следует

$$(2.6)\qquad \prod_{k=1}^{3}\vartheta_{00}(\tau;\ 0, 2a_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n;\ a_1, a_2, a_3) Q^n.$$

Наконец, положим

$$(2.7)\qquad \theta(\tau) = \theta(\tau;\ a_1, a_2, a_3) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n;\ a_1, a_2, a_3) Q^n,$$

где

$$(2.8)\qquad \varrho(n; a_1, a_2, a_3) = \frac{2\pi}{\Delta^{1/2}} n^{1/2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} \sum_{\substack{h \bmod q \\ (h,q)=1}} e\left(-\frac{nh}{q}\right) \prod_{k=1}^{3} S(a_k h, q)$$

— сингулярный ряд, соответствующий квадратичной форме $\{a_1, a_2, a_3\}$, который сходится, но неабсолютно (см. [9], стр. 390).

Для удобства ссылок приведем необходимые для дальнейшего некоторые известные определения.

Пусть Γ — модулярная группа, т.е. группа линейных подстановок

$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \quad \text{где} \quad \alpha\delta-\beta\gamma = 1.$$

Далее, пусть $\Gamma_0(N)$ обозначает ту подгрупну группы Γ, во всех подстановках которой $\gamma \equiv 0 \pmod N$.

Определение 1 (см., напр., [1], стр. 716 и [2], стр. 808–809). Функция комплексной переменной $F(\tau)$ называется *целой модулярной формой* (ц.м.ф.) размерности $-r$, принадлежащей группе $\Gamma_0(N)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $F(\tau)$ регулярна при $\operatorname{Im}\tau > 0$;

(2) для каждой подстановки группы $\Gamma_0(N)$

$$F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^r F(\tau);$$

(3) в окрестности $i\infty$ имеет место разложение

$$(2.9)\qquad F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k e\left(\frac{k\tau}{N}\right);$$

(4) в окрестности каждой рациональной точки $-\delta/\gamma$ ($\gamma \neq 0$, $(\gamma, \delta) = 1$) имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e\left(\frac{k}{N}\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

где $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$.

Определение 2 (см., напр., [2], стр. 808 и 811). Ц.м.ф. $F(\tau)$ называется *функцией делителя* N, если все показатели степеней k, встречающиеся в разложении (2.9), делятся на N. Тогда (2.9) принимает вид

$$(2.10)\qquad F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k Q^k.$$

Лемма 1 (см., напр., [2], стр. 811 и 953). *Ц.м.ф. $F(\tau)$ размерности $-r$, принадлежащая подгруппе $\Gamma_0(N)$, и делителя N, тождественно равна нулю, если в ее разложении* (2.10)

$$A_k = 0 \quad \text{для всех } k \leqslant \frac{r}{12} N \prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Лемма 2 ([9], стр. 303). *Функция $\theta(\tau)$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (3) *определения* 1 *и определению* 2. *Далее, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4a)$ имеет место соотношение*

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)} i^{3(|\delta|-1)^2/4} \left(\frac{\Delta\beta \operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right) (\gamma\tau+\delta)^{3/2}\theta(\tau),$$

где $\eta(\gamma) = 1$ при $\gamma \geqslant 0$ и $\eta(\gamma) = -1$ при $\gamma < 0$.

Лемма 3 ([8], стр. 115). *При четном g, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеют место равенства*

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\ 0, 2N\right) = e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2h^2}{16N}\right) e\left(\beta\delta(g/2)^2\frac{\delta^{2\varphi(2N)-2}}{4N}\right) \times$$
$$\times\, i^{(1/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)} i^{(1-|\delta|)/2} \left(\frac{2\beta N \operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right) (\gamma\tau+\delta)^{1/2} \vartheta_{ag,h}(\tau;\ 0, 2N),$$

$$\vartheta'_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\ 0, 2N\right) = \operatorname{sgn}\delta\, e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2h^2}{16N}\right) e\left(\beta\delta(g/2)^2\frac{\delta^{2\varphi(2N)-2}}{4N}\right) \times$$
$$\times\, i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)} i^{(1-|\delta|)/2} \left(\frac{2\beta N \operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right) (\gamma\tau+\delta)^{3/2} \vartheta'_{ag,h}(\tau;\ 0, 2N),$$

где $\varphi(2N)$ — функция Эйлера, а $\eta(\gamma)$ определено в предыдущей лемме.

Лемма 4. *Функция $\psi^4(\tau)$, где*

$$(2.11)\qquad \psi(\tau) = \psi(\tau; a_1, a_2, a_3) = \prod_{k=1}^{3} \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a_k) - \theta(\tau; a_1, a_2, a_3) - A\vartheta'_{gh}(\tau; 0, 2N_1)$$

и A — произвольная постоянная, является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(4N)$, и делителя $4N$, если

$$(2.12)\qquad 2|g, \quad 4N_1|N, \quad a|N, \quad 4N_1|(g/2)^2$$

и для всех a и δ, удовлетворяющих условию $a\delta \equiv 1 \pmod{4N}$, выполняется равенство

$$(2.13)\qquad \operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-N_1}{|\delta|}\right)\vartheta'_{ag,h}(\tau;\ 0, 2N_1) = \left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\vartheta'_{gh}(\tau;\ 0, 2N_1).$$

Доказательство. Согласно (2.2), (2.3) и лемме 2, функция $\psi(\tau)$, а следовательно и $\psi^4(\tau)$, удовлетворяет условиям (1) и (3) определения 1.

Так как $a_k|N$ $(k = 1, 2, 3)$ и $N_1|N$, то каждая подстановка группы $\Gamma_0(4N)$ является также и подстановкой групп $\Gamma_0(4a_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ и $\Gamma_0(4N_1)$. Следовательно, согласно лемме 3, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеют место равенства

$$\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{00}\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\, 0, 2a_k\right) =$$
$$= i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{3(1-|\delta|)/2}\left(\frac{2\beta\Delta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{00}(\tau;\, 0, 2a_k),$$

$$\vartheta'_{gh}\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\ 0, 2N_1\right) = \operatorname{sgn}\delta\, e\left(-\frac{a\gamma\delta^2h^2}{16N_1}\right)e\left(\frac{\beta\delta}{4N_1}\ \delta^{2\varphi(2N_1)-2}(g/2)^2\right)\times$$
$$\times\, i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{2\beta N_1\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\vartheta'_{ag,h}(\tau;\, 0, 2N_1) =$$
$$= i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{-2\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\vartheta'_{gh}(\tau;\ 0, 2N_1),$$

в силу (2.12) и (2.13). Нетрудно проверить, что

$$i^{3(1-|\delta|)/2}\left(\frac{2}{|\delta|}\right) = i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{-2}{|\delta|}\right) = i^{3(|\delta|-1)^2/4}.$$

Таким образом, согласно (2.11) и лемме 2, для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место равенство

$$\psi\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = i^{(3/2)\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{3(|\delta|-1)^2/4}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\psi(\tau),$$

т.е.

$$(2.14)\qquad \psi^4\left(\frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau).$$

Следовательно, функция $\psi^4(\tau)$ удовлетворяет также и условию (2) определения 1.

Тот факт, что функция $\psi^4(\tau)$ удовлетворяет и условию (4) определения 1, доказывается дословно так же, как и в работе [9] (стр. 304).

Из (2.1) следует, что

$$\vartheta'_{gh}(\tau; 0, 2N_1) = \pi i \sum_{k\equiv 0 \pmod{2N_1}}(-1)^{hk/2N_1}(2k+g)e\left\{\frac{1}{4N}\,\frac{N}{N_1}\big(k(k+g)+(g/2)^2\big)\tau\right\},$$

где, согласно (2.12),

$$4N\,\Big|\,\frac{N}{N_1}\big(k(k+g)+(g/2)^2\big).$$

Таким образом, функция $\vartheta'_{gh}(\tau; 0, 2N_1)$, а следовательно, согласно (2.6) и лемме 2, и функция $\psi^4(\tau)$, удовлетворяет определению 2.

Лемма 5 ([9], стр. 390). *Пусть*

$$2^{\alpha}\|n,\quad 2^{\gamma_k}\|a_k,\quad (a_1, a_2, a_3) = 1,\quad \gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3,\quad p^{\beta}\|n,\quad p^{l}\|\Delta,$$
$$\Delta n = 2^{\alpha+\gamma}uv = r^2\omega,\quad u = \prod_{\substack{p|n\\ p\nmid\Delta}}p^{\beta} = s^2\varkappa,\quad v = \prod_{\substack{p|\Delta n\\ p|\Delta}}p^{\beta+l} = s_1^2\varkappa_1.$$

Тогда

$$\varrho(n; a_1, a_2, a_3) = \frac{2^{(\alpha+\gamma)/2+4}}{\Delta\pi}\,\varkappa^{1/2}v^{1/2}X_2\prod_{p|\Delta}X_p\prod_{p|\Delta}(1-p^{-2})^{-1}\times$$
$$\times\prod_{p|s_1}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right)L(1, -\omega)\sum_{d|s}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где

$$L(1, -\omega) = \frac{\pi}{4}\ \textit{при}\ \omega = 1,\qquad L(1, -\omega) = \frac{\pi}{2^{3/2}}\ \textit{при}\ \omega = 2,$$

$$L(1, -\omega) = \frac{\pi}{\omega^{1/2}}\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/4}\left(\frac{h}{\omega}\right)\qquad \textit{при}\quad \omega\equiv 1 \pmod 4,\ \omega>1,$$
$$= \frac{\pi}{2\omega^{1/2}}\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/2}\left(\frac{h}{\omega}\right)\qquad \textit{при}\quad \omega\equiv 3 \pmod 4,$$
$$= \frac{\pi}{\omega^{1/2}}\left\{\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)-\sum_{3\omega/16<h\leqslant\omega/4}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)\right\}$$
$$\textit{при}\quad \omega\equiv 2 \pmod 8,\ \omega>2,$$
$$= \frac{\pi}{\omega^{1/2}}\sum_{\omega/16<h\leqslant 3\omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)\qquad \textit{при}\quad \omega\equiv 6 \pmod 8,$$

а значения величин X_2 и X_p приведены, соответственно, на стр. 286–289 *и* 292–293 *работы* [9].

3. В этом параграфе выводятся формулы для числа представлений натуральных чисел формами $\{1, 1, 16\}$, $\{1, 4, 16\}$, $\{1, 16, 16\}$ и $\{1, 8, 64\}$.

Во всех формулах для числа представлений чисел этими формами, ради сокращения, положено

$$L_1 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

$$L_2 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant \varkappa/4}\left(\frac{h}{\varkappa}\right),$$

$$L_3 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant \varkappa/2}\left(\frac{h}{\varkappa}\right),$$

$$L_4 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

$$L_5 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\left\{\sum_{1\leqslant h\leqslant \varkappa/8}\left(\frac{h}{\varkappa}\right)-\sum_{3\varkappa/8<h\leqslant \varkappa/2}\left(\frac{h}{\varkappa}\right)\right\},$$

$$L_6 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{\varkappa/8<h\leqslant 3\varkappa/8}\left(\frac{h}{\varkappa}\right).$$

Теорема 1. 1) *Имеет место тождество*

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,32) = \theta(\tau;1,1,16)+\frac{1}{8\pi i}\vartheta_{81}'(\tau;0,8). \tag{3.1}$$

2) *Пусть* $n = 2^{\alpha}u$, $u = s^2\varkappa$. *Далее, пусть* $\varepsilon = 1$ *при* $\alpha = 1, 3$; $\varepsilon = 2$ *при* $\alpha = 2$; $\varepsilon = 3$ *при* $\alpha > 3$. *Тогда*

$$\begin{aligned} r(n;1,1,16) &= \varrho(n;1,1,16)+(-1)^{(s-1)/2}2s \quad \textit{при} \quad n = s^2, \\ &= \varrho(n;1,1,16) \quad \textit{в остальных случаях}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho(n;1,1,16) &= 2L_1 && \textit{при} && n = s^2; \\ &= 2\varepsilon L_1 && \textit{при} && 2\,|\,\alpha,\ \alpha>0,\ u = s^2; \\ &= 8L_2 && \textit{при} && n\equiv 1 \pmod 4,\ \textit{но}\ n\neq s^2; \\ &= 8\varepsilon L_2 && \textit{при} && 2\,|\,\alpha,\ \alpha>0,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ \textit{но}\ u\neq s^2; \\ &= 8L_3 && \textit{при} && 2\,|\,\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 3 \pmod 8); \\ &= 0 && \textit{при} && n\equiv 3 \pmod 4),\ \textit{при}\ \alpha = 1,\ u\equiv 3 \pmod 4), \\ & && \textit{при} && \alpha = 2,\ u\equiv 3 \pmod 8)\ \textit{и} \\ & && \textit{при} && 2\,|\,\alpha,\ \alpha>0,\ u\equiv 7 \pmod 8); \\ &= 4\varepsilon L_4 && \textit{при} && 2\nmid\alpha,\ u = s^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8\varepsilon L_5 && \textit{при} && 2\nmid\alpha,\ u\equiv 1 \pmod 4),\ \textit{но}\ u\neq s^2; \\ &= 8\varepsilon L_6 && \textit{при} && 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ u\equiv 3 \pmod 4). \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau;1,1,16) = \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,32)-\theta(\tau;1,1,16)-\frac{1}{8\pi i}\vartheta_{81}'(\tau;0,8).$$

Согласно лемме 4, функция $\psi^4(\tau;1,1,16)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(64)$, и делителя 64. Действительно, непосредственно видно, что функция $\psi^4(\tau;1,1,16)$ удовлетворяет условиям (2.12).

Если $\alpha\delta\equiv 1 \pmod{64}$, то $\alpha\delta\equiv 1 \pmod 4$, т.е.

$$\alpha\equiv\delta\equiv 1 \text{ или } -1 \pmod 4. \tag{3.3}$$

В силу (2.4), (2.5) и (3.3), получаем

$$\vartheta_{8\alpha,1}'(\tau;0,8) = \begin{cases} \vartheta_{81}'(\tau;0,8) & \text{при } \alpha\equiv 1 \pmod 4, \\ -\vartheta_{81}'(\tau;0,8) & \text{при } \alpha\equiv -1 \pmod 4. \end{cases} \tag{3.4}$$

Далее, имеем

$$\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-N_1}{|\delta|}\right) = \operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta\equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{при } \delta\equiv -1 \pmod 4. \end{cases} \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.3)–(3.5) следует, что функция $\psi^4(\tau;1,1,16)$ удовлетворяет и условию (2.13). Следовательно, согласно лемме 1, функция $\psi^4(\tau;1,1,16)$ будет тождественно равна нулю, если в ее разложении по степеням Q все коэффициенты при Q^n ($n\leqslant 48$) равняются нулю. Для этого достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau;1,1,16)$ по степеням Q все коэффициенты при Q^n ($n\leqslant 12$) равны нулю.

В лемме 5 и лемме 8 работы [9] положим:

$$\begin{gathered} a_1 = 16,\ a_2 = a_3 = 1, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 1, \\ \gamma_1 = 4,\ \gamma_2 = \gamma_3 = 0,\ \gamma = 4, \quad \Delta = 16, \\ n = 2^{\alpha}m, \quad \Delta n = 2^{\alpha+4}uv = r^2\omega, \quad m = u = s^2\varkappa, \\ v = s_1 = \varkappa_1 = 1. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,1,16) = 2^{(\alpha+4)/2}\frac{\varkappa^{1/2}}{\pi}X_2L(1,-\omega)\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right), \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} X_2 &= 2 && \text{при } \alpha = 0, 1, 2,\ u \equiv 1 \pmod 4;\\ &= 0 && \text{при } \alpha = 0, 1,\ u \equiv 3 \pmod 4 \text{ и при } \alpha = 2,\ u \equiv 3 \pmod 8;\\ &= 1 && \text{при } \alpha = 3;\\ &= 3\cdot 2^{-(\alpha-1)/2+1} && \text{при } 2\nmid \alpha,\ \alpha > 3;\\ &= 3\cdot 2^{-(\alpha/2)+1} && \text{при } 2\mid \alpha,\ \alpha > 2,\ u \equiv 1 \pmod 4;\\ &= 2^{-(\alpha/2)+2} && \text{при } 2\mid \alpha,\ \alpha > 2,\ u \equiv 3 \pmod 8;\\ &= 0 && \text{при } 2\mid \alpha,\ \alpha > 0,\ u \equiv 7 \pmod 8. \end{aligned}$$

Согласно (3.6),

1) при $n = s^2$ имеем: $\alpha = 0$, $n = u = s^2$, $\varkappa = 1$, $\omega = 1$, $u \equiv 1 \pmod 4$;

2) при $2\mid\alpha$, $\alpha > 0$, $u = s^2$ имеем: $\varkappa = 1$, $\omega = 1$, $u \equiv 1 \pmod 4$;

3) при $n \equiv 1 \pmod 4$, но $n \neq s^2$, имеем: $\alpha = 0$, $n = u = s^2\varkappa = s^2\omega$, $u \equiv 1 \pmod 4$, $\omega \equiv 1 \pmod 4$, $\omega > 1$;

4) при $2\mid\alpha$, $\alpha > 0$, $u \equiv 1 \pmod 4$, но $u \neq s^2$, имеем: $u = s^2\varkappa = s^2\omega$, $\omega \equiv 1 \pmod 4$, $\omega > 1$;

5) при $2\mid\alpha$, $\alpha > 2$, $u \equiv 3 \pmod 8$ имеем: $u = s^2\varkappa = s^2\omega$, $\omega \equiv 3 \pmod 8$;

6) при $\alpha = 0, 1$, $u \equiv 3 \pmod 4$ или $\alpha = 2$, $u \equiv 3 \pmod 8$ или $2\mid\alpha$, $\alpha > 0$, $u \equiv 7 \pmod 8$ имеем: $X_2 = 0$;

7) при $2\nmid\alpha$, $u = s^2$ имеем: $\varkappa = 1$, $\omega = 2$, $u \equiv 1 \pmod 4$;

8) при $2\nmid\alpha$, $u \equiv 1 \pmod 4$, но $u \neq s^2$, имеем: $u = s^2\varkappa$, $2u = s^2\omega$, $\omega \equiv 2 \pmod 8$, $\omega > 2$;

9) при $2\nmid\alpha$, $\alpha > 1$, $u \equiv 3 \pmod 4$, имеем: $u = s^2\varkappa$, $2u = s^2\omega$, $\omega \equiv 6 \pmod 8$.

Приняв во внимание только что сказанное, из формулы (3.7), выражений для X_2, $L(1, -\omega)$ и L_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), после некоторых вычислений, получим приведенные в формулировке теоремы формулы для $\varrho(n; 1, 1, 16)$.

Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n; 1, 1, 16)$ для всех $n \leqslant 12$, получим

$$\theta(\tau; 1, 1, 16) = 1 + 2Q + 4Q^2 + 4Q^4 + 8Q^5 + 4Q^8 + 10Q^9 + 8Q^{10} + 8Q^{13} + \ldots \tag{3.8}$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2)\,\vartheta_{00}(\tau; 0, 32) = 1 + 4Q + 4Q^2 + 4Q^4 + 8Q^5 + 4Q^8 + 4Q^9 + 8Q^{10} + 8Q^{13} + \ldots, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{8\pi i}\,\vartheta_{81}'(\tau; 0, 8) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (2k+1) Q^{(2k+1)^2} = 2Q - 6Q^9 + 10Q^{25} - \ldots \tag{3.10}$$

Теперь нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n в разложении функции $\psi(\tau; 1, 1, 16)$ по степеням Q равны нулю для всех $n \leqslant 12$. Итак, тождество (3.1) доказано.

2) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (3.1) и принимая во внимание (2.6) и (2.7), получаем

$$r(n; 1, 1, 16) = \varrho(n; 1, 1, 16) + \nu(n), \tag{3.11}$$

где $\nu(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции $\frac{1}{8\pi i}\,\vartheta_{81}'(\tau; 0, 8)$ по степеням Q. Из формулы (3.10) следует

$$\nu(n) = \sum_{n=(2k+1)^2} (-1)^k (2k+1) = 2 \sum_{n=s^2} (-1)^{(s-1)/2} s = \begin{cases} (-1)^{(s-1)/2}\, 2s & \text{при } n = s^2,\\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) следует формула (3.2).

Следствие 1.

$$\begin{aligned} r(n; 2, 2, 5, -1, -1, 0) &= 2L_1 - (-1)^{(s-1)/2}\, 2s \quad \textit{при} \quad n = s^2,\\ &= r(n; 1, 1, 16) \quad \textit{в остальных случаях.} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Доказательство. Следует из теоремы 1, согласно хорошо известному результату К. Л. Зигеля о числе представлений родом форм, так как формы $\{1, 1, 16\}$ и $\{2, 2, 5, -1, -1, 0\}$ принадлежат разным классам одного и того же двухклассного рода.

Следствие 2. 1) *Числа вида*

$$4\eta + 3, \quad 8\eta + 6, \quad 32\eta + 12 \quad \textit{и} \quad 4^\mu(8\eta + 7)\ (\mu \geqslant 1),$$

и только они, непредставимы формой $\{1, 1, 16\}$.

2) *Числа вида*

$$4\eta + 3, \quad 8\eta + 6, \quad 32\eta + 12, \quad 4^\mu(8\eta + 7)\ (\mu \geqslant 1) \quad \textit{и} \quad s^2$$

(*в случае когда все входящие в* s *простые* $p \equiv 1 \pmod 4$), *и только они, непредставимы формой* $\{2, 2, 5, -1, -1, 0\}$.

Доказательство. Пусть $n = s^2$ и по крайней мере одно входящее в s простое $p \equiv 3 \pmod 4$, тогда

$$L_1 = \sum_{d\mid s} d \prod_{p\mid d} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right) > \sum_{d\mid s} d \prod_{p\mid d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{d\mid s} \varphi(d) = s. \tag{3.14}$$

Следовательно, согласно первой из двух формул (3.2), независимо от того $s \equiv 1 \pmod 4$ или $s \equiv 3 \pmod 4$, всегда

$$r(n; 1, 1, 16) > 0 \quad \text{при} \quad n = s^2.$$

Также, согласно (3.14) и первой из двух формул (3.13), для $n = s^2$ при любом s имеющем множителем по крайней мере одно простое $p \equiv 3 \pmod 4$ всегда

$$r(n; 2, 2, 5, -1, -1, 0) > 0;$$

если же все входящие в s простые $p \equiv 1 \pmod 4$, то

$$L_1 = \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = s$$

и следовательно, согласно первой из двух формул (3.13),

$$(3.15) \qquad r(n; 2, 2, 5, -1, -1, 0) = 0 \quad \text{при} \quad n = s^2,$$

где s содержит лишь простые $p \equiv 1 \pmod 4$.

Таким образом, утверждаемое непосредственно следует из (3.15) и шестой строки значений $\varrho(n; 1, 1, 16)$, приведенных в формулировке теоремы 1.

Теорема 2. 1) *Имеет место тождество*

$$(3.16) \qquad \vartheta_{00}(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 8)\vartheta_{00}(\tau; 0, 32) = \\ = \theta(\tau; 1, 4, 16) + \frac{1}{16\pi i}\vartheta'_{81}(\tau; 0, 8).$$

2) *Пусть* $n = 2^a u$, $u = s^2 \varkappa$. *Далее, пусть* $\varepsilon = 1$ *при* $a = 3$, $\varepsilon = 2$ *при* $a = 2$ *и* $\varepsilon = 3$ *при* $a > 3$. *Тогда*

$$(3.17) \qquad \begin{aligned} r(n; 1, 4, 16) &= \varrho(n; 1, 4, 16) + (-1)^{(s-1)/2} s \quad \textit{при} \quad n = s^2, \\ &= \varrho(n; 1, 4, 16) \quad \textit{в остальных случаях,} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho(n; 1, 4, 16) &= L_1 && \textit{при} \quad n = s^2; \\ &= 2\varepsilon L_1 && \textit{при} \quad 2|a, \ a > 0, \ u = s^2; \\ &= 4L_2 && \textit{при} \quad n \equiv 1 \pmod 4, \ \textit{но} \ n \neq s^2; \\ &= 8\varepsilon L_2 && \textit{при} \quad 2|a, \ a > 0, \ u \equiv 1 \pmod 4, \ \textit{но} \ u \neq s^2; \\ &= 8L_3 && \textit{при} \quad 2|a, \ a > 2, \ u \equiv 3 \pmod 8; \\ &= 0 && \textit{при} \quad a = 1, \ \textit{при} \ a = 0, 2, \ u \equiv 3 \pmod 4 \\ & && \quad \textit{и при} \ 2|a, \ a > 2, \ u \equiv 7 \pmod 8; \\ &= 4\varepsilon L_4 && \textit{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u = s^2; \\ &= 8\varepsilon L_5 && \textit{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u \equiv 1 \pmod 4, \ \textit{но} \ u \neq s^2; \\ &= 8\varepsilon L_6 && \textit{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u \equiv 3 \pmod 4). \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau; 1, 4, 16) = \vartheta_{00}(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 8)\vartheta_{00}(\tau; 0, 32) - \\ - \theta(\tau; 1, 4, 16) - \frac{1}{16\pi i}\vartheta'_{81}(\tau; 0, 8).$$

Дословно повторяя рассуждения из теоремы 1, получаем, что функция $\psi^4(\tau; 1, 4, 16)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(64)$, и делителя 64. Следовательно, согласно лемме 1, она будет тождественно равна нулю, если в разложении $\psi(\tau; 1, 4, 16)$ по степеням Q все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 12)$ равны нулю.

В лемме 5 и лемме 8 работы [9] положим:

$$a_1 = 16, \ a_2 = 4, \ a_3 = 1, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 1,$$

$$\gamma_1 = 4, \ \gamma_2 = 2, \ \gamma_3 = 0, \ \gamma = 6, \quad \Delta = 64,$$

$$n = 2^a m, \quad \Delta n = 2^{a+6} uv = r^2 \omega, \quad m = u = s^2 \varkappa, \quad v = s_1 = \varkappa_1 = 1.$$

Тогда получим, что

$$\varrho(n; 1, 4, 16) = 2^{(a/2)+1} \frac{\varkappa^{1/2}}{\pi} X_2 L(1, -\omega) \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где

$$\begin{aligned} X_2 &= 0 && \text{при} \quad a = 1 \ \text{и при} \ a = 0, 2, \ u \equiv 3 \pmod 4; \\ &= 2 && \text{при} \quad a = 0, \ u \equiv 1 \pmod 4 \ \text{и при} \ a = 3; \\ &= 4 && \text{при} \quad a = 2, \ u \equiv 1 \pmod 4; \\ &= 0 && \text{при} \quad 2|a, \ a > 2, \ u \equiv 7 \pmod 8; \\ &= 2^{-(a/2)+3} && \text{при} \quad 2|a, \ a > 2, \ u \equiv 3 \pmod 8; \\ &= 3 \cdot 2^{-(a/2)+2} && \text{при} \quad 2|a, \ a > 2, \ u \equiv 1 \pmod 4; \\ &= 3 \cdot 2^{-(a-1)/2+2} && \text{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 3. \end{aligned}$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем приведенные в формулировке настоящей теоремы формулы для $\varrho(n; 1, 4, 16)$. Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n; 1, 4, 16)$ для всех $n \leqslant 12$, получим

$$(3.18) \qquad \theta(\tau; 1, 4, 16) = 1 + Q + 4Q^4 + 4Q^5 + 4Q^8 + 5Q^9 + 4Q^{13} + \ldots$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$(3.19) \qquad \vartheta_{00}(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 8)\vartheta_{00}(\tau; 0, 32) = \\ = 1 + 2Q + 4Q^4 + 4Q^5 + 4Q^8 + 2Q^9 + 4Q^{13} + \ldots$$

Теперь нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n в разложении функции $\psi(\tau; 1, 4, 16)$ по степеням Q равны нулю для всех $n \leqslant 12$. Итак, тождество (3.16) доказано.

2) Из этого тождества, дословно так же, как и при доказательстве теоремы 1, следует формула (3.17).

Следствие 1.

$$r(n;4,4,5,0,-2,0) = L_1-(-1)^{(s-1)/2}s \quad \textit{при} \quad n=s^2,$$
$$= r(n;1,4,16) \quad \textit{в остальных случаях.}$$

Доказательство. Следует из теоремы 2.

Следствие 2. 1) *Числа вида*

$$4\eta+2, \quad 4\eta+3, \quad 16\eta+12 \quad \textit{и} \quad 4^{\mu}(8\eta+7) \ (\mu\geqslant 2),$$

и только они, непредставимы формой $\{1,4,16\}$.

2) *Числа вида*

$$4\eta+2, \quad 4\eta+3, \quad 16\eta+12, \quad 4^{\mu}(8\eta+7) \ (\mu\geqslant 2) \quad \textit{и} \quad s^2$$

(*в случае когда все входящие в* s *простые* $p\equiv 1 \pmod 4$), *и только они, непредставимы формой* $\{4,4,5,0,-2,0\}$.

Доказательство. Дословно то же, что и следствия 2 теоремы 1.

Теорема 3. 1) *Имеет место тождество*

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,32) = \theta(\tau;1,16,16)+\frac{1}{16\pi i}\vartheta_{81}'(\tau;0,8). \tag{3.20}$$

2) *Пусть* $n=2^{\alpha}u$, $u=s^2\varkappa$. *Далее, пусть* $\varepsilon=1$ *при* $\alpha=2$ *и* $\varepsilon=3$ *при* $\alpha>2$. *Тогда*

$$r(n;1,16,16) = \varrho(n;1,16,16)+(-1)^{(s-1)/2}s \quad \textit{при} \quad n=s^2, \tag{3.21}$$
$$= \varrho(n;1,16,16) \quad \textit{в остальных случаях,}$$

где

$$\begin{aligned}
\varrho(n;1,16,16) &= L_1 && \textit{при} \quad n=s^2;\\
&= 2\varepsilon L_1 && \textit{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>0,\ u=s^2;\\
&= 4L_2 && \textit{при} \quad n\equiv 1 \pmod 8,\ \textit{но}\ n\neq s^2;\\
&= 8\varepsilon L_2 && \textit{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>0,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ \textit{но}\ u\neq s^2;\\
&= 8L_3 && \textit{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 3 \pmod 8;\\
&= 0 && \textit{при} \quad n\equiv 5 \pmod 8,\ \textit{при}\ \alpha=1,3,\\
& && \textit{при} \quad \alpha=0,2,\ u\equiv 3 \pmod 4\ \textit{и}\\
& && \textit{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 7 \pmod 8;\\
&= 12L_4 && \textit{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u=s^2;\\
&= 24L_5 && \textit{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ \textit{но}\ u\neq s^2;\\
&= 24L_6 && \textit{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 3 \pmod 4.
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau;1,16,16) = \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,32)-\theta(\tau;1,16,16)-$$
$$-\frac{1}{16\pi i}\vartheta_{81}'(\tau;0,8).$$

Дословно повторяя рассуждения из теоремы 1, получаем, что функция $\psi^4(\tau;1,16,16)$, является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(64)$, и делителя 64. Следовательно, согласно лемме 1, она будет тождественно равно нулю, если в разложении $\psi(\tau;1,16,16)$ по степеням Q все коэффициенты при Q^n ($n\leqslant 12$) равны нулю.

В лемме 5 и лемме 8 из работы [9] положим:

$$a_1=a_2=16,\ a_3=1, \quad b_1=b_2=b_3=1,$$
$$\gamma_1=\gamma_2=4,\ \gamma_3=0, \quad \gamma=8, \quad \Delta=256,$$
$$n=2^{\alpha}m, \quad \Delta n=2^{\alpha+8}uv=r^2\omega, \quad m=u=s^2\varkappa, \quad v=s_1=\varkappa_1=1.$$

Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,16,16) = 2^{\alpha/2}\frac{\varkappa^{1/2}}{\pi}X_2L(1,-\omega)\sum_{d\mid s}d\prod_{p\mid d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
X_2 &= 0 && \text{при} \quad \alpha=0,2,\ u\equiv 3 \pmod 4,\\
& && \text{при} \quad \alpha=0,\ u\equiv 5 \pmod 8\ \text{и при}\ \alpha=1,3;\\
&= 4 && \text{при} \quad \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 8\ \text{и}\\
& && \text{при} \quad \alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4;\\
&= 2^{-\alpha/2+4} && \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 3 \pmod 8;\\
&= 0 && \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 7 \pmod 8;\\
&= 3\cdot 2^{-\alpha/2+3} && \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 1 \pmod 4;\\
&= 3\cdot 2^{-(\alpha-1)/2+3} && \text{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3.
\end{aligned}$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем приведенные в формулировке настоящей теоремы формулы для $\varrho(n;1,16,16)$. Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n;1,16,16)$ для всех $n\leqslant 12$, получим

$$\theta(\tau;1,16,16) = 1+Q+2Q^4+5Q^9+6Q^{16}+\ldots \tag{3.22}$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,32) = 1+2Q+2Q^4+2Q^9+6Q^{16}+\ldots \tag{3.23}$$

Теперь нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n в разложении функции $\psi(\tau; 1, 16, 16)$ по степеням Q равны нулю для всех $n \leqslant 12$. Итак, тождество (3.20) доказано.

2) Из этого тождества, дословно так же, как и при доказательстве теоремы 1, следует формула (3.21).

Следствие 1.

$$r(n; 4, 9, 9, 1, 2, 2) = L_1 - (-1)^{(s-1)/2} s \quad \text{при} \quad n = s^2,$$
$$= r(n; 1, 16, 16) \quad \text{в остальных случаях}.$$

Доказательство. Следует из теоремы 3.

Следствие 2. 1) *Числа вида*

$$4\eta+2, \quad 4\eta+3, \quad 8\eta+5, \quad 16\eta+8, \quad 16\eta+12 \quad и \quad 4^\mu(8\eta+7) \quad (\mu \geqslant 2),$$

и только они, непредставимы формой $\{1, 16, 16\}$.

2) *Числа вида*

$$4\eta+2, \quad 4\eta+3, \quad 8\eta+5, \quad 16\eta+8, \quad 16\eta+12,$$
$$4^\mu(8\eta+7) \quad (\mu \geqslant 2) \quad и \quad s^2$$

(в случае когда все входящие в s *простые* $p \equiv 1 \pmod 4$*), и только они, непредставимы формой* $\{4, 9, 9, 1, 2, 2\}$.

Доказательство. Дословно то же, что и следствия 2 теоремы 1.

Теорема 4. 1) *Имеет место тождество*

$$\vartheta_{00}(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 16)\vartheta_{00}(\tau; 0, 128) = \tag{3.24}$$
$$= \theta(\tau; 1, 8, 64) + \frac{1}{16\pi i}\vartheta'_{16,1}(\tau; 0, 32).$$

2) *Пусть* $n = 2^a u$, $u = s^2 \varkappa$. *Далее, пусть*

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = 3, 5, \\ 3 & \text{при} \quad a > 5; \end{cases} \qquad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = 3, \\ 2 & \text{при} \quad a > 3; \end{cases}$$
$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = 2, 4, \\ 2 & \text{при} \quad a = 6, \\ 6 & \text{при} \quad a > 6. \end{cases}$$

Тогда

$$r(n; 1, 8, 64) = \varrho(n; 1, 8, 64) + \left(-\frac{2}{s}\right)s \quad \text{при} \quad n = s^2, \tag{3.25}$$
$$= \varrho(n; 1, 8, 64) \quad \text{в остальных случаях},$$

где

$$\begin{aligned}
\varrho(n; 1, 8, 64) &= 0 && \text{при} \quad a = 1, \ \text{при} \ a = 3, \ u \equiv 5 \pmod 8, \\
& && \text{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u \equiv 7 \pmod 8, \\
& && \text{при} \quad n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8 \quad и \\
& && \text{при} \quad a = 2, \ u \equiv 5, 7 \pmod 8; \\
&= 2\varepsilon_1 L_1 && \text{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u = s^2; \\
&= 8\varepsilon_1 L_2 && \text{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u \equiv 1 \pmod 8, \\
& && \text{но} \ u \neq s^2 \ \text{и при} \ 2 \nmid a, \ a > 3, \ u \equiv 5 \pmod 8; \\
&= 4\varepsilon_2 L_3 && \text{при} \quad 2 \nmid a, \ a > 1, \ u \equiv 3 \pmod 8; \\
&= L_4 && \text{при} \quad n = s^2; \\
&= 2\varepsilon_3 L_4 && \text{при} \quad 2 \mid a, \ a > 0, \ u = s^2; \\
&= 2L_5 && \text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 8, \ \text{но} \ n \neq s^2; \\
&= 4\varepsilon_3 L_5 && \text{при} \quad 2 \mid a, \ a > 0, \ u \equiv 1 \pmod 8, \ \text{но} \ u \neq s^2 \\
& && \text{и при} \ 2 \mid a, \ a > 2, \ u \equiv 5 \pmod 8; \\
&= 4\varepsilon_3 L_6 && \text{при} \quad 2 \mid a, \ a > 0, \ u \equiv 3 \pmod 8 \\
& && \text{и при} \ 2 \mid a, \ a > 2, \ u \equiv 7 \pmod 8.
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau; 1, 8, 64) = \vartheta_{00}(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 16)\vartheta_{00}(\tau; 0, 128) -$$
$$-\theta(\tau; 1, 8, 64) - \frac{1}{16\pi i}\vartheta'_{16,1}(\tau; 0, 32).$$

Согласно лемме 4, функция $\psi^4(\tau; 1, 8, 64)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(256)$, и делителя 256. Действительно, непосредственно видно, что функция $\psi^4(\tau; 1, 8, 64)$ удовлетворяет условиям (2.12).

Если $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{256}$, то $\alpha\delta \equiv 1 \pmod 8$, т.е.

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \quad \text{или} \ 3 \ \text{или} \ 5 \ \text{или} \ 7 \pmod 8. \tag{3.26}$$

В силу (2.4), (2.5) и (3.26), получаем

$$\vartheta'_{16a,1}(\tau; 0, 32) = \vartheta'_{16,1}(\tau; 0, 32) \quad \text{при} \quad a \equiv 1, 3 \pmod 8, \tag{3.27}$$
$$= -\vartheta'_{16,1}(\tau; 0, 32) \quad \text{при} \quad a \equiv 5, 7 \pmod 8.$$

Далее, имеем

$$\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-N_1}{|\delta|}\right) = \operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \delta \equiv 1, 5 \pmod 8, \\ -1 & \text{при} \quad \delta \equiv 3, 7 \pmod 8. \end{cases} \tag{3.28}$$

Из соотношений (3.26)–(3.28) следует, что функция $\psi^4(\tau; 1, 8, 64)$ удовлетворяет и условию (2.13). Следовательно, согласно лемме 1, функция $\psi^4(\tau; 1, 8, 64)$ будет тождественно равна нулю, если в ее разложении по степеням Q все коэффициенты при Q^n ($n \leqslant 192$) равняются нулю. Для этого достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau; 1, 8, 64)$ по степеням Q все коэффициенты при Q^n ($n \leqslant 48$) равны нулю.

В лемме 5 и лемме 8 работы [9] положим:

$$\begin{gathered} a_1 = 64,\ a_2 = 8,\ a_3 = 1, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 1, \\ \gamma_1 = 6,\ \gamma_2 = 3,\ \gamma_3 = 0,\ \gamma = 9, \quad \Delta = 512, \\ n = 2^a m, \quad \Delta n = 2^{a+9} uv = r^2 \omega, \quad m = u = s^2 \varkappa, \quad v = s_1 = \varkappa_1 = 1. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Тогда получим, что

$$\varrho(n; 1, 8, 64) = 2^{(a-1)/2} \frac{\varkappa^{1/2}}{\pi} X_2 L(1, -\omega) \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{-\omega}{p}\right) \frac{1}{p}\right), \tag{3.30}$$

где

$$\begin{aligned} X_2 &= 4 && \text{при } a = 0,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ и при } a = 2,\ u \equiv 1, 3 \ (\mathrm{mod}\ 8); \\ &= 0 && \text{при } a = 0,\ u \equiv 3, 5, 7 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ и} \\ & && \text{при } a = 2,\ u \equiv 5, 7 \ (\mathrm{mod}\ 8); \\ &= 2 && \text{при } a = 4, 6; \\ &= 2^{(-a/2)+4} \cdot 3 && \text{при } 2 | a,\ a > 6; \\ &= 0 && \text{при } a = 1, \text{ при } a = 3,\ u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ и} \\ & && \text{при } 2 \nmid a,\ a > 1,\ u \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 8); \\ &= 4 && \text{при } a = 3,\ u \equiv 1, 3 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ и при } a = 5,\ u \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 8); \\ &= 2 && \text{при } a = 5,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4); \\ &= 2^{-(a-1)/2+3} \cdot 3 && \text{при } 2 \nmid a,\ a > 5,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4); \\ &= 2^{-(a-1)/2+4} && \text{при } 2 \nmid a,\ a > 5,\ u \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 8). \end{aligned}$$

Согласно (3.29),

1) при $a = 1$, при $a = 3$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, при $2 \nmid a$, $a > 1$, $u \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, при $a = 0$, $u \equiv 3, 5, 7 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ и при $a = 2$, $u \equiv 5, 7 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ имеем: $X_2 = 0$;

2) при $2 \nmid a$, $a > 1$, $u = s^2$ имеем: $\varkappa = 1$, $\omega = 1$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$;

3) при $2 \nmid a$, $a > 1$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, но $u \neq s^2$, и при $2 \nmid a$, $a > 3$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ имеем: $u = s^2 \varkappa = s^2 \omega$, $\omega \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\omega > 1$;

4) при $2 \nmid a$, $a > 1$, $u \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ имеем: $u = s^2 \varkappa = s^2 \omega$, $\omega \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 8)$;

5) при $n = s^2$ имеем: $a = 0$, $u = s^2$, $\varkappa = 1$, $\omega = 2$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$;

6) при $2 | a$, $a > 0$, $u = s^2$ имеем: $\varkappa = 1$, $\omega = 2$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$;

7) при $n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, но $n \neq s^2$, имеем: $a = 0$, $n = u = s^2 \varkappa$, $\omega = 2\varkappa > 2$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, $\omega \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 8)$;

8) при $2 | a$, $a > 0$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, но $u \neq s^2$, и при $2 | a$, $a > 2$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ имеем: $u = s^2 \varkappa$, $\omega = 2\varkappa > 2$, $\omega \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 8)$;

9) при $2 | a$, $a > 0$, $u \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ и при $2 | a$, $a > 2$, $u \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 8)$ имеем: $u = s^2 \varkappa$, $\omega = 2\varkappa$, $\omega \equiv 6 \ (\mathrm{mod}\ 8)$.

Приняв во внимание только что сказанное, из формулы (3.30), выражений для X_2, $L(1, -\omega)$ и L_k, после некоторых вычислений, получим приведенные в формулировке настоящей теоремы формулы для $\varrho(n; 1, 8, 64)$. Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n; 1, 8, 64)$ для всех $n \leqslant 48$, получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 1, 8, 64) = 1 + Q + 2Q^4 + 2Q^8 + 3Q^9 + 4Q^{12} + 2Q^{16} + 4Q^{17} + \\ + 4Q^{24} + 7Q^{25} + 2Q^{32} + 8Q^{33} + 6Q^{36} + 4Q^{41} + 4Q^{44} + 4Q^{48} + \ldots \end{aligned} \tag{3.31}$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 16) \vartheta_{00}(\tau; 0, 128) = \\ & = 1 + 2Q + 2Q^4 + 2Q^8 + 6Q^9 + 4Q^{12} + 2Q^{16} + 4Q^{17} + 4Q^{24} + 2Q^{25} + 2Q^{32} + \\ & \qquad + 8Q^{33} + 6Q^{36} + 4Q^{41} + 4Q^{44} + 4Q^{48} + \ldots, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi i} \vartheta'_{16,1}(\tau; 0, 32) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (4k+1) Q^{(4k+1)^2} = \\ &= Q + 3Q^9 - 5Q^{25} - 7Q^{49} + \ldots \end{aligned} \tag{3.33}$$

Теперь, нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n в разложении функции $\psi(\tau; 1, 8, 64)$ по степеням Q равны нулю для всех $n \leqslant 48$. Итак, тождество (3.24) доказано.

2) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (3.24) и принимая во внимание (2.6) и (2.7), получаем

$$r(n; 1, 8, 64) = \varrho(n; 1, 8, 64) + \nu(n), \tag{3.34}$$

где $\nu(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции $\frac{1}{16\pi i} \vartheta'_{16,1}(\tau; 0, 32)$ по степеням Q. Из формулы (3.33) следует

$$\begin{aligned} \nu(n) &= \sum_{n=(4k+1)^2} (-1)^k (4k+1) = \sum_{\substack{n=x^2 \\ x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)}} (-1)^{(x-1)/4} x = \sum_{n=s^2} \left(\frac{-2}{s}\right) s = \\ &= \begin{cases} \left(\dfrac{-2}{s}\right) s & \text{при } n = s^2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Из формул (3.34) и (3.35) следует формула (3.25).

Следствие 1.

$$(3.36)\quad r(n;4,8,17,0,-2,0)=L_4-\left(\frac{-2}{s}\right)s \quad \text{при } n=s^2,$$

$$=r(n;1,8,64) \quad \text{в остальных случаях}.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.

Следствие 2. 1) *Числа вида*

$$4\eta+2,\quad 8\eta+3,\quad 64\eta+40,\quad 4^l(8\eta+5),\quad 4^l(8\eta+7)\quad (l=0,1),$$
$$4^\mu(16\eta+14)\quad (\mu\geqslant 1),$$

и только они, непредставимы формой $\{1, 8, 64\}$.

2) *Числа вида*

$$4\eta+2,\quad 8\eta+3,\quad 64\eta+40,\quad 4^l(8\eta+5),\quad 4^l(8\eta+7)\quad (l=0,1),$$
$$4^\mu(16\eta+14)\quad (\mu\geqslant 1)\quad и\quad s^2$$

(в случае когда все входящие в s простые $p\equiv 1$ или $3 \pmod 8$), и только они, непредставимы формой $\{4, 8, 17, 0, -2, 0\}$.

Доказательство. Пусть $n=s^2$ и по крайней мере одно входящее в s простое $p\equiv 5$ или $7 \pmod 8$, тогда

$$(3.37)\quad L_4=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right)>\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)=s.$$

Следовательно, согласно первой из двух формул (3.25), независимо от того $s\equiv 1$ или $3 \pmod 8$ или $s\equiv 5$ или $7 \pmod 8$, всегда

$$r(n;1,8,64)>0 \quad \text{при} \quad n=s^2.$$

Также, согласно (3.37) и первой из двух формул (3.36), для $n=s^2$ при любом s, имеющем множителем по крайней мере одно простое $p\equiv 5$ или $7 \pmod 8$, всегда

$$r(n;4,8,17,0,-2,0)>0;$$

если же все входящие в s простые $p\equiv 1$ или $3 \pmod 8$, то

$$L_4=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)=s$$

и следовательно, согласно первой из двух формул (3.36),

$$r(n;4,8,17,0,-2,0)=0 \quad \text{при} \quad n=s^2,$$

где s содержит лишь простые $p\equiv 1$ или $3 \pmod 8$.

Таким образом, утверждаемое непосредственно следует из (3.38) и первой строки значений $\varrho(n;1,8,64)$, приведенных в формулировке настоящей теоремы.

4. В этом параграфе выводятся формулы для числа представлений натуральных чисел формами $\{1, 3, 36\}$ и $\{1, 12, 36\}$.

В этих формулах, ради сокращения, кроме обозначений принятых в § 3, также положено

$$L_{21}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant 3\varkappa/2}\left(\frac{h}{3\varkappa}\right),$$

$$L_{31}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{3\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant 3\varkappa/2}\left(\frac{h}{3\varkappa}\right),$$

$$L_{51}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{6}{p}\right)\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\left\{\sum_{1\leqslant h\leqslant 3\varkappa/8}\left(\frac{h}{3\varkappa}\right)-\sum_{9\varkappa/8<h\leqslant 3\varkappa/2}\left(\frac{h}{3\varkappa}\right)\right\},$$

$$L_{61}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-6}{p}\right)\left(\frac{p}{\varkappa}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{3\varkappa/8<h\leqslant 9\varkappa/8}\left(\frac{h}{3\varkappa}\right).$$

Теорема 5. 1) *Имеет место тождество*

$$(4.1)\quad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,72)=$$
$$=\theta(\tau;1,3,36)+\frac{1}{12\pi i}\vartheta'_{12,1}(\tau;0,18).$$

2) *Пусть* $n=2^\alpha 3^\beta u$, $(u,6)=1$, $u=s^2\varkappa$. *Далее, пусть* $\varepsilon=2^{(\alpha-1)/2}-1$;

$$\varepsilon_1=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \alpha=0,\\ 3(2^{\alpha/2}-1) & \text{при}\quad \alpha>0;\end{cases}$$

$$\varepsilon_2=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \alpha=0,\\ 3\cdot 2^{\alpha/2}-2 & \text{при}\quad \alpha>0,\ u\equiv 1,17,19 \pmod{24},\\ 2^{\alpha/2}\cdot 3 & \text{при}\quad \alpha>0,\ u\equiv 5,7,13 \pmod{24}.\end{cases}$$

Тогда

$$(4.2)\quad r(n;1,3,36)=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right)\pm s$$
$$\text{при}\quad n=s^2,\ s\equiv\pm 1 \pmod 6,$$
$$=(3\cdot 2^{\alpha/2}-2)\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right)\pm t$$
$$\text{при}\quad n=t^2,\ t>0,\ t\equiv\pm 2 \pmod 6,$$
$$=\varrho(n;1,3,36)\quad \text{в остальных случаях},$$

где

$$\varrho(n;1,3,36)=0 \quad \text{при} \quad a=1,\ \text{при}\ 2\nmid a,\ a>1,\ \beta=0,\ u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6),$$
$$\text{при}\ 2\mid a,\ \beta=0,\ u\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 6),\ \text{при}\ 2\mid a,\ 2\nmid\beta,$$
$$u\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 6)\ \text{и при}\ 2\nmid a,\ a>1,\ 2\nmid\beta,$$
$$u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6);$$
$$=2\varepsilon_1 L_1 \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2;$$
$$=8\varepsilon_1 L_2 \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12),\ \text{но}\ u\neq s^2;$$
$$=2\varepsilon_1 L_{21} \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ \beta=0,\ u\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=4\varepsilon_1 L_{21} \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ 2\mid\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 7,11\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=4\varepsilon_2 L_3 \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=\varepsilon_2 L_{31} \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ \beta=0,\ u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=2\varepsilon_2 L_{31} \quad \text{при} \quad 2\mid a,\ 2\mid\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 1,5\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=24\varepsilon L_5 \quad \text{при} \quad 2\nmid a,\ a>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=6\varepsilon L_{51} \quad \text{при} \quad 2\nmid a,\ a>1,\ \beta=0,\ u\equiv 11\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=12\varepsilon L_{51} \quad \text{при} \quad 2\nmid a,\ a>1,\ 2\mid\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 7,11\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=24\varepsilon L_6 \quad \text{при} \quad 2\nmid a,\ a>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 11\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=6\varepsilon L_{61} \quad \text{при} \quad 2\nmid a,\ a>1,\ \beta=0,\ u\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12);$$
$$=12\varepsilon L_{61} \quad \text{при} \quad 2\nmid a,\ a>1,\ 2\mid\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 1,5\ (\mathrm{mod}\ 12).$$

Доказательство. 1) Положим

$$\psi(\tau;1,3,36)=\vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,6)\vartheta_{00}(\tau;0,72)-$$
$$-\theta(\tau;1,3,36)-\frac{1}{12\pi i}\vartheta'_{12,1}(\tau;0,18).$$

Согласно лемме 4, функция $\psi^4(\tau;1,3,36)$ является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(144)$, и делителя 144. Действительно, непосредственно видно, что функция $\psi^4(\tau;1,3,36)$ удовлетворяет условиям (2.12).

Если $a\delta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 144)$, то $a\delta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6)$, т.е.

$$a\equiv\delta\equiv 1\ \text{или}\ -1\ (\mathrm{mod}\ 6). \tag{4.3}$$

В силу (2.4), (2.5) и (4.3), получаем

$$\vartheta'_{12a,1}(\tau;0,18)=\vartheta'_{12,1}(\tau;0,18) \quad \text{при} \quad a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6), \tag{4.4}$$
$$=-\vartheta'_{12,1}(\tau;0,18) \quad \text{при} \quad a\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 6).$$

Далее, имеем

$$\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)=\left(\frac{3}{|\delta|}\right)=\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)\left(\frac{|\delta|}{3}\right), \qquad \operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-N_1}{|\delta|}\right)=\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right). \tag{4.5}$$

Легко проверить, что

$$\left(\frac{|\delta|}{3}\right)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\delta & \text{при} \quad \delta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\\ -\operatorname{sgn}\delta & \text{при} \quad \delta\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 3).\end{cases} \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.3)–(4.6) следует, что функция $\psi^4(\tau;1,3,36)$ удовлетворяет и условию (2.13). Следовательно, согласно лемме 1, функция $\psi^4(\tau;1,3,36)$ будет тождественно равна нулю, если в ее разложении по степеням Q коэффициенты при Q^n равны нулю для всех $n\leqslant 144$. Для этого достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau;1,3,36)$ по степеням Q все коэффициенты при Q^n $(n\leqslant 36)$ равны нулю.

В лемме 5 и леммах 8 и 9 работы [9] положим:

$$\begin{gathered} a_1=36,\ a_2=3,\ a_3=1,\quad b_1=9,\ b_2=3,\ b_3=1,\\ \gamma_1=2,\ \gamma_2=\gamma_3=0,\ \gamma=2,\quad \Delta=108,\\ n=2^a m,\quad \Delta n=2^{a+2}\cdot 3^3 m=2^{a+2}uv=r^2\omega,\quad u=s^2\varkappa,\\ v=3^{\beta+3}=s_1^2\varkappa_1,\quad \text{т.е.}\quad m=3^\beta u. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,3,36)= \tag{4.8}$$
$$=2^{a/2}3^{(\beta+1)/2}\frac{\varkappa^{1/2}}{\pi}\left(1+\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{1}{3}\right)L(1,-\omega)X_2X_3\sum_{d\mid s}d\prod_{p\mid d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right);$$

где

$$X_2=1 \quad \text{при} \quad a=0;$$
$$=(3\cdot 2^{a/2}-2)2^{-a/2} \quad \text{при}\ 2\mid a,\ a>0,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$$
$$\text{и при}\ 2\mid a,\ a>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 8);$$
$$=3 \quad \text{при}\ 2\mid a,\ a>0,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 8)$$
$$\text{и при}\ 2\mid a,\ a>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 8);$$
$$=(2^{a/2}-1)3\cdot 2^{-a/2} \quad \text{при}\ 2\mid a,\ a>0,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$$
$$\text{и при}\ 2\mid a,\ a>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4);$$
$$=0 \quad \text{при} \quad a=1;$$
$$=(2^{(a-1)/2}-1)3\cdot 2^{-(a-1)/2} \quad \text{при}\ 2\nmid a,\ a>1;$$

$$
\begin{aligned}
X_3 &= 2 && \text{при } \beta = 0,\ 2\,|\,a,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6)\\
&&& \text{и при } \beta = 0,\ 2\nmid a,\ u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 6);\\
&= 0 && \text{при } \beta = 0,\ 2\,|\,a,\ u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 6)\\
&&& \text{и при } \beta = 0,\ 2\nmid a,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6);\\
&= 4\cdot 3^{-\beta/2} && \text{при } 2\,|\,\beta,\ \beta > 0;\\
&= 2\cdot 3^{-(\beta-1)/2} && \text{при } 2\nmid \beta,\ 2\nmid a,\ u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 6)\\
&&& \text{и при } 2\nmid \beta,\ 2\,|\,a,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6);\\
&= 0 && \text{при } 2\nmid \beta,\ 2\nmid a,\ u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6)\\
&&& \text{и при } 2\nmid \beta,\ 2\,|\,a,\ u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 6).
\end{aligned}
$$

Согласно (4.7),

1) при $a = 1$ имеем: $X_2 = 0$;

2) при $\beta = 0$, $2\,|\,a$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 6)$, при $\beta = 0$, $2\nmid a$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6)$, при $2\nmid\beta$, $2\nmid a$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6)$ и при $2\nmid\beta$, $2\,|\,a$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 6)$ имеем: $X_3 = 0$;

3) при $2\,|\,a$, $2\nmid\beta$, $u = s^2$ имеем: $\varkappa = 1$, $\omega = 1$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 6)$;

4) при $2\,|\,a$, $2\nmid\beta$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 12)$, но $u \neq s^2$, имеем: $\omega = \varkappa > 1$, $u = s^2\omega$, $\omega \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\left(\dfrac{\omega}{3}\right) = \left(\dfrac{u}{3}\right)$;

5) при $2\,|\,a$, $\beta = 0$, $u \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ и при $2\,|\,a$, $2\,|\,\beta$, $\beta > 0$, $u \equiv 7, 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\omega = 3\varkappa$, $3u = s^2\omega$, $\omega \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\omega > 1$;

6) при $2\,|\,a$, $2\nmid\beta$, $u \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\omega = \varkappa$, $u = s^2\omega$, $\omega \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\left(\dfrac{\omega}{3}\right) = \left(\dfrac{u}{3}\right)$;

7) при $2\,|\,a$, $\beta = 0$, $u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ и при $2\,|\,a$, $2\,|\,\beta$, $\beta > 0$, $u \equiv 1, 5 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\omega = 3\varkappa$, $3u = s^2\omega$, $\omega \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$;

8) при $2\nmid a$, $a > 1$, $2\nmid\beta$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\varkappa > 1$, $\omega = 2\varkappa$, $2u = s^2\omega$, $\omega \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, $\omega > 2$, $\left(\dfrac{\omega}{3}\right) = -\left(\dfrac{u}{3}\right)$;

9) при $2\nmid a$, $a > 1$, $\beta = 0$, $u \equiv 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ и при $2\nmid a$, $a > 1$, $2\,|\,\beta$, $\beta > 0$, $u \equiv 7, 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\omega = 6\varkappa$, $6u = s^2\omega$, $\omega \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, $\omega > 2$;

10) при $2\nmid a$, $a > 1$, $2\nmid\beta$, $u \equiv 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\omega = 2\varkappa$, $2u = s^2\omega$, $\omega \equiv 6 \ (\mathrm{mod}\ 8)$, $\left(\dfrac{\omega}{3}\right) = -\left(\dfrac{u}{3}\right)$;

11) при $2\nmid a$, $a > 1$, $\beta = 0$, $u \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ и при $2\nmid a$, $a > 1$, $2\,|\,\beta$, $\beta > 0$, $u \equiv 1, 5 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ имеем: $\omega = 6\varkappa$, $6u = s^2\omega$, $\omega \equiv 6 \ (\mathrm{mod}\ 8)$.

Приняв во внимание сказанное, из формулы (4.8), выражений для X_2 и X_3, $L(1, -\omega)$, L_k $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ и L_{k1} $(2 \leqslant k \leqslant 6)$, после некоторых вычислений, получим приведенные в формулировке настоящей теоремы формулы для $\varrho(n; 1, 3, 36)$.

Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n; 1, 3, 36)$ для всех $n \leqslant 36$ получим

$$
\begin{aligned}
(4.9)\qquad \theta(\tau; 1, 3, 36) = 1 + Q + 2Q^3 + 4Q^4 + 4Q^7 + 2Q^9 + 6Q^{12} + 4Q^{13} + 10Q^{16} + \\
+ 4Q^{19} + 4Q^{21} + 7Q^{25} + 2Q^{27} + 12Q^{28} + 4Q^{31} + 8Q^{36} + \ldots
\end{aligned}
$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$
\begin{aligned}
(4.10)\qquad \vartheta_{00}(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 6)\vartheta_{00}(\tau; 0, 72) = 1 + 2Q + 2Q^3 + 6Q^4 + 4Q^7 + \\
+ 2Q^9 + 6Q^{12} + 4Q^{13} + 6Q^{16} + 4Q^{19} + 4Q^{21} + 2Q^{25} + 2Q^{27} + \\
+ 12Q^{28} + 4Q^{31} + 8Q^{36} + \ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4.11)\qquad \frac{1}{12\pi i}\vartheta'_{12,1}(\tau; 0, 18) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (3k+1) Q^{(3k+1)^2} = \\
= Q + 2Q^4 - 4Q^{16} - 5Q^{25} + 7Q^{49} + \ldots
\end{aligned}
$$

Теперь нетрудно проверить, что коэффициенты при Q^n в разложении функции $\psi(\tau; 1, 3, 36)$ по степеням Q равны нулю для всех $n \leqslant 36$. Итак, тождество (4.1) доказано.

2) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (4.1) и принимая во внимание (2.6) и (2.7), получаем

$$(4.12)\qquad r(n; 1, 3, 36) = \varrho(n; 1, 3, 36) + \nu(n),$$

где $\nu(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции $\dfrac{1}{12\pi i}\vartheta'_{12,1}(\tau; 0, 18)$ по степеням Q. Из формулы (4.11) следует, что

$$
\nu(n) = \sum_{n=(3k+1)^2} (-1)^k (3k+1) = \sum_{\substack{n=t^2\\ t\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)}} (-1)^{(t-1)/3} t =
$$

$$
= \begin{cases} (-1)^{(t-1)/3} t & \text{при } n = t^2,\ t > 0,\ t \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 3),\\ -(-1)^{(t+1)/3} t & \text{при } n = t^2,\ t > 0,\ t \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 3),\\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}
$$

т.е.

$$
(4.13)\qquad \nu(n) = \begin{cases} \pm t & \text{при } n = t^2,\ t > 0,\ t \equiv \pm 1 \ (\mathrm{mod}\ 6),\\ \pm t & \text{при } n = t^2,\ t > 0,\ t \equiv \pm 2 \ (\mathrm{mod}\ 6),\\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
$$

Из равенства $n = 2^\alpha 3^\beta u = 2^\alpha 3^\beta s^2 \varkappa$ следует, что если n есть квадрат натурального числа $t \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod 6$, то $2|\alpha$, $\beta = 0$ и $\varkappa = 1$. Следовательно,

$$t^2 = \begin{cases} s^2 = u & \text{при } \alpha = 0, \\ 2^\alpha s^2 = 2^\alpha u & \text{при } \alpha > 0, \end{cases}$$

причем $u \equiv 1 \pmod{24}$.

Таким образом, из седьмой строки значений $\varrho(n; 1, 3, 36)$, приведенных в формулировке теоремы, следует, что

(4.14) $\varrho(n; 1, 3, 36) =$

$$= \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) \qquad \text{при } n = s^2,\ s \equiv \pm 1 \pmod 6,$$

$$= (3\cdot 2^{\alpha/2} - 2) \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) \quad \text{при } n = t^2,\ t > 0,\ t \equiv \pm 2 \pmod 6.$$

Из (4.12)–(4.14) следует формула (4.2).

Следствие 1.

(4.15) $r(n; 3, 4, 9) =$

$$= \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) \mp s \qquad \textit{при } n = s^2,\ s \equiv \pm 1 \pmod 6,$$

$$= (3\cdot 2^{\alpha/2} - 2) \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) \mp t \quad \textit{при } n = t^2, t > 0,\ t \equiv \pm 2 \pmod 6,$$

$= r(n; 1, 3, 36)$ *в остальных случаях.*

Доказательство. Следует из теоремы 5.

Следствие 2. 1) *Числа вида*

$$3\eta + 2, \quad 4\eta + 2, \quad 9^\mu(9\eta + 6) \ (\mu \geqslant 0),$$

и только они, непредставимы формой $\{1, 3, 36\}$.

2) *Числа вида*

$$3\eta + 2, \quad 4\eta + 2, \quad 9^\mu(9\eta + 6) \ (\mu \geqslant 0) \quad \textit{и} \quad s^2$$

(в случае когда все входящие в s простые $p \equiv 1 \pmod 3$), и только они, непредставимы формой $\{3, 4, 9\}$.

Доказательство. Непосредственно видно, что в первых двух из трех формул (4.2), при $n = s^2$, $s \equiv 1 \pmod 6$ и при $n = t^2$, $t > 0$, $t \equiv 2 \pmod 6$,

$$r(n; 1, 3, 36) > 0.$$

Если же $s \equiv -1 \pmod 6$ или $t > 0$, $t \equiv -2 \pmod 6$, то, по крайней мере одно делящее s простое $p \equiv -1 \pmod 3$, следовательно, для таких s и t всегда

(4.16) $$\sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) > \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = s,$$

а при $2|\alpha$, $\alpha > 0$ и

(4.17) $$(3\cdot 2^{\alpha/2} - 2) > 2^{\alpha/2};$$

итак, и при $n = s^2$, $s \equiv -1 \pmod 6$ и при $n = t^2$, $t > 0$, $t \equiv -2 \pmod 6$ также

$$r(n; 1, 3, 36) > 0.$$

В первых двух из трех формул (4.15) при $n = s^2$, $s \equiv -1 \pmod 6$ и при $n = t^2$, $t > 0$, $t \equiv -2 \pmod 6$

$$r(n; 3, 4, 9) > 0;$$

если же $n = s^2$ и $s \equiv 1 \pmod 6$, но s содержит простые делители $p \equiv -1 \pmod 3$, или же $n = t^2$, $t > 0$, $t \equiv 2 \pmod 6$, то, согласно (4.16) и (4.17), опять-таки

$$r(n; 3, 4, 9) > 0;$$

если же $n = s^2$ и все входящие в s простые $p \equiv 1 \pmod 3$, то

$$\sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) = \sum_{d|s} d \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = s,$$

следовательно,

(4.18) $$r(n; 3, 4, 9) = 0 \quad \text{при} \quad n = s^2,$$

причем s содержит лишь простые $p \equiv 1 \pmod 3$.

Таким образом, утверждаемое следует из (4.18) и первой строки значений $\varrho(n; 1, 3, 36)$, приведенных в формулировке теоремы 5. Действительно,

a) если $\alpha = 1$, то $n = 4\eta + 2$;

b) если $2|\alpha$, $\beta = 0$, $u \equiv 5 \pmod 6$ или $2 \nmid \alpha$, $\alpha > 1$, $\beta = 0$, $u \equiv 1 \pmod 6$, то $n = 4^l(6\eta + 5)$ или $4^l\cdot 2(6\eta + 1)$ $(l > 0)$, т.е. $n = 3\eta + 2$, ибо $4^l = (3+1)^l = 3\eta + 1$;

c) если $2|\alpha$, $2 \nmid \beta$, $u \equiv 5 \pmod 6$ или $2 \nmid \alpha$, $\alpha > 1$, $2 \nmid \beta$, $u \equiv 1 \pmod 6$, то $n = 4^l\cdot 9^\mu\cdot 3(6\eta + 5)$ или $4^l\cdot 2\cdot 9^\mu\cdot 3(6\eta + 1)$ $(l > 0)$, т.е. $n = 9^\mu(9\eta + 6)$.

Теорема 6. 1) *Имеет место тождество*

$$\vartheta_{00}(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}(\tau;0,24)\,\vartheta_{00}(\tau;0,72) = \theta(\tau;1,12,36)+\frac{1}{24\pi i}\,\vartheta'_{24,0}(\tau;0,72). \tag{4.19}$$

2) *Пусть* $n = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}u$, $(u,6)=1$, $u = s^2\varkappa$. *Далее, пусть* $\varepsilon = 1$ *при* $\alpha = 0$; $\varepsilon = 2(2^{\alpha/2}-1)$ *при* $\alpha > 0$, $u \equiv 1, 17, 19 \pmod{24}$; $\varepsilon = 2^{\alpha/2+1}$ *при* $\alpha > 0$, $u \equiv 5, 7, 13 \pmod{24}$; $\varepsilon_1 = 2^{\alpha/2+1}-3$; $\varepsilon_2 = 2^{(\alpha+1)/2}-3$. *Тогда*

$$r(n;1,12,36) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right) \pm s & \text{при } n = s^2,\ s \equiv \pm 1 \pmod 6,\\ \varrho(n;1,12,36) & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{4.20}$$

где

$$\begin{aligned}
\varrho(n;1,12,36) = 0 \quad & \text{при } n \equiv 2 \pmod 4, \text{ при } n \equiv 3 \pmod 4,\\
& \text{при } 2|\alpha,\ \beta = 0,\ u \equiv 5 \pmod 6,\\
& \text{при } 2\nmid\alpha,\ \beta = 0,\ u \equiv 1 \pmod 6,\\
& \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 5 \pmod 6\\
& \text{и при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 1 \pmod 6;\\
= 2\varepsilon_1 L_1 \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2\nmid\beta,\ u = s^2;\\
= 8\varepsilon_1 L_2 \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 1 \pmod{12}, \text{ но } u \neq s^2;\\
= 2\varepsilon_1 L_{21} \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ \beta = 0,\ u \equiv 7 \pmod{12};\\
= 4\varepsilon_1 L_{21} \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2|\beta,\ \beta > 0,\ u \equiv 7, 11 \pmod{12};\\
= \varepsilon L_{31} \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \beta = 0,\ u \equiv 1 \pmod{12};\\
= 2\varepsilon L_{31} \quad & \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ \beta > 0,\ u \equiv 1, 5 \pmod{12};\\
= 4\varepsilon L_3 \quad & \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 7 \pmod{12};\\
= 2\varepsilon_2 L_{51} \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1,\ \beta = 0,\ u \equiv 11 \pmod{12};\\
= 4\varepsilon_2 L_{51} \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1,\ 2|\beta,\ \beta > 0,\ u \equiv 7, 11 \pmod{12};\\
= 8\varepsilon_2 L_5 \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 5 \pmod{12};\\
= 2\varepsilon_2 L_{61} \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1,\ \beta = 0,\ u \equiv 5 \pmod{12};\\
= 4\varepsilon_2 L_{61} \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1,\ \beta > 0,\ 2|\beta,\ u \equiv 1, 5 \pmod{12};\\
= 8\varepsilon_2 L_6 \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 11 \pmod{12}.
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Рассуждая так же, как и в теореме 5, убеждаемся, что функция $\psi^1(\tau;1,12,36)$, где

$$\psi(\tau;1,12,36) = \vartheta_{00}(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}(\tau;0,24)\,\vartheta_{00}(\tau;0,72) - \theta(\tau;1,12,36)-\frac{1}{24\pi i}\,\vartheta'_{24,0}(\tau;0,72),$$

является ц.м.ф. размерности -6, принадлежащей подгруппе $\Gamma_0(144)$, и делителя 144. Следовательно, она будет тождественно равна нулю, если в разложении $\psi(\tau;1,12,36)$ по степеням Q все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 36)$ равны нулю.

В лемме 5 и леммах 8 и 9 работы [9] положим:

$$\begin{gathered} a_1 = 36,\ a_2 = 12,\ a_3 = 1, \quad b_1 = 9,\ b_2 = 3,\ b_3 = 1,\\ \gamma_1 = \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = 0,\ \gamma = 4, \quad \Delta = 2^4\cdot 3^3,\\ n = 2^{\alpha}m, \quad \Delta n = 2^{\alpha+4}\cdot 3^3 m = 2^{\alpha+4}uv = r^2\omega, \quad u = s^2\varkappa,\\ v = 3^{\beta+3} = s^2\varkappa_1, \quad \text{т.е.} \quad m = 3^{\beta}u. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Тогда получим, что

$$\varrho(n;1,12,36) = 2^{\alpha/2-1}\cdot 3^{(\beta+1)/2}\cdot\frac{\varkappa^{1/2}}{\pi}\left(1+\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{1}{3}\right)L(1,-\omega)\times X_2X_3\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right), \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned}
X_2 = 0 \quad & \text{при } \alpha = 1;\\
= 2 \quad & \text{при } \alpha = 0,\ 2|\beta,\ u \equiv 1 \pmod 4\\
& \text{и при } \alpha = 0,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 3 \pmod 4;\\
= 0 \quad & \text{при } \alpha = 0,\ 2|\beta,\ u \equiv 3 \pmod 4\\
& \text{и при } \alpha = 0,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 1 \pmod 4;\\
= (2^{\alpha/2}-1)2^{-\alpha/2+2} \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2|\beta,\ u \equiv 1 \pmod 8\\
& \text{и при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 3 \pmod 8;\\
= 4 \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2|\beta,\ u \equiv 5 \pmod 8\\
& \text{и при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 7 \pmod 8;\\
= (2^{\alpha/2+1}-3)2^{-\alpha/2+1} \quad & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2|\beta,\ u \equiv 3 \pmod 4\\
& \text{и при } 2|\alpha,\ \alpha > 0,\ 2\nmid\beta,\ u \equiv 1 \pmod 4;\\
= (2^{(\alpha+1)/2}-3)2^{-(\alpha-1)/2+1} \quad & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha > 1;
\end{aligned}$$

X_3 имеет те же значения, что и в теореме 5 на стр. 154.

Согласно (4.21),

1) при $\alpha=1$, при $\alpha=0$, $2|\beta$, $u\equiv 3 \pmod 4$ и при $\alpha=0$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 1 \pmod 4$ имеем: $X_2=0$;

2) при $\beta=0$, $2|\alpha$, $u\equiv 5 \pmod 6$, при $\beta=0$, $2\nmid\alpha$, $u\equiv 1 \pmod 6$, при $2\nmid\alpha$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 1 \pmod 6$ и при $2|\alpha$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 5 \pmod 6$ имеем: $X_3=0$;

3) при $2|\alpha$, $\alpha>0$, $2\nmid\beta$, $u=s^2$ имеем: $\varkappa=\omega=1$, $u\equiv 1 \pmod 8$, $u\equiv 1 \pmod 3$;

4) при $2|\alpha$, $\alpha>0$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 1 \pmod{12}$, но $u\neq s^2$, имеем: $\omega=\varkappa>1$, $u=s^2\omega$, $\omega\equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{\omega}{3}\right)=\left(\frac{u}{3}\right)$;

5) при $2|\alpha$, $\alpha>0$, $\beta=0$, $u\equiv 7 \pmod{12}$ и при $2|\alpha$, $\alpha>0$, $2|\beta$, $\beta>0$, $u\equiv 7,11 \pmod{12}$ имеем: $\omega=3\varkappa$, $3u=s^2\omega$, $\omega\equiv 1 \pmod 4$, $\omega>1$;

6) при $2|\alpha$, $\beta=0$, $u\equiv 1 \pmod{12}$ и при $2|\alpha$, $2|\beta$, $\beta>0$, $u\equiv 1,5 \pmod{12}$ имеем: $\omega=3\varkappa$, $3u=s^2\omega$, $\omega\equiv 3 \pmod 4$;

7) при $2|\alpha$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 7 \pmod{12}$ имеем: $\omega=\varkappa$, $u=s^2\omega$, $\omega\equiv 3 \pmod 4$, $\left(\frac{\omega}{3}\right)=\left(\frac{u}{3}\right)$;

8) при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $\beta=0$, $u\equiv 11 \pmod{12}$ и при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $2|\beta$, $\beta>0$, $u\equiv 7,11 \pmod{12}$ имеем: $\omega=6\varkappa$, $6u=s^2\omega$, $\omega\equiv 2 \pmod 8$, $\omega>2$;

9) при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 5 \pmod{12}$ имеем: $\omega=2\varkappa$, $\varkappa>1$, $2u=s^2\omega$, $\omega\equiv 2 \pmod 8$, $\omega>2$, $\left(\frac{\omega}{3}\right)=-\left(\frac{u}{3}\right)$;

10) при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $\beta=0$, $u\equiv 5 \pmod{12}$ и при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $2|\beta$, $\beta>0$, $u\equiv 1,5 \pmod{12}$ имеем: $\omega=6\varkappa$, $6u=s^2\omega$, $\omega\equiv 6 \pmod 8$;

11) при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 11 \pmod{12}$ имеем: $\omega=2\varkappa$, $2u=s^2\omega$, $\omega\equiv 6 \pmod 8$, $\left(\frac{\omega}{3}\right)=-\left(\frac{u}{3}\right)$.

Приняв во внимание сказанное, из формулы (4.22), выражений для X_2 и X_3, $L(1,-\omega)$, L_k $(1\leqslant k\leqslant 6)$ и L_{k1} $(2\leqslant k\leqslant 6)$, после некоторых вычислений, получим приведенные в формулировке теоремы формулы для $\varrho(n;1,12,36)$. Вычислив по этим формулам значения $\varrho(n;1,12,36)$ для всех $n\leqslant 36$, получим

$$(4.23)\qquad \theta(\tau;1,12,36)=1+Q+2Q^4+2Q^9+2Q^{12}+4Q^{13}+6Q^{16}+ \\ +4Q^{21}+7Q^{25}+4Q^{28}+4Q^{36}+\ldots$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$(4.24)\qquad \vartheta_{00}(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,24)\vartheta_{00}(\tau;0,72)=1+2Q+2Q^4+2Q^9+2Q^{12}+ \\ +4Q^{13}+6Q^{16}+4Q^{21}+2Q^{25}+4Q^{28}+4Q^{36}+\ldots,$$

$$(4.25)\qquad \frac{1}{24\pi i}\vartheta'_{24,0}(\tau;0,72)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(6k+1)Q^{(6k+1)^2}=Q-5Q^{25}+7Q^{49}+\ldots$$

Теперь нетрудно проверить, что коэффициенты при Q^n в разложении функции $\psi(\tau;1,12,36)$ по степеням Q равны нулю для всех $n\leqslant 36$. Итак, тождество (4.19) доказано.

2) Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (4.19), получим

$$(4.26)\qquad r(n;1,12,36)=\varrho(n;1,12,36)+\nu(n),$$

где $\nu(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции $\frac{1}{24\pi i}\vartheta'_{24,0}(\tau;0,72)$ по степеням Q. Из формулы (4.25) следует, что

$$(4.27)\qquad \nu(n)=\sum_{n=(6k+1)^2}(6k+1)=\sum_{\substack{n=t^2\\ t\equiv 1 \pmod 6}} t= \\ =\begin{cases}\pm t & \text{при}\quad n=t^2,\ t>0,\ t\equiv\pm 1 \pmod 6,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Из равенства $n=2^\alpha 3^\beta u=2^\alpha 3^\beta s^2\varkappa$ следует, что если n есть квадрат натурального числа $t\equiv\pm 1 \pmod 6$, то $\alpha=\beta=0$ и $\varkappa=1$, следовательно, $t=s$ и $u\equiv n\equiv 1 \pmod{24}$. Таким образом, если $n=s^2$, $s\equiv\pm 1 \pmod 6$, то

$$(4.28)\qquad \varrho(n;1,12,36)=\sum_{d|s}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right).$$

Из (4.26)–(4.28) следует формула (4.20).

Следствие 1.

$$(4.29)\qquad r(n;4,9,12)=\sum_{d|s}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right)\mp s \quad \textit{при}\quad n=s^2,\ s\equiv\pm 1 \pmod 6, \\ =r(n;1,12,36)\quad \textit{в остальных случаях.}$$

Доказательство. Следует из теоремы 6.

Следствие 2. 1) *Числа вида*

$$3\eta+2,\quad 4\eta+2,\quad 4\eta+3\quad \textit{и}\quad 9^\mu(9\eta+6)\ (\mu\geqslant 0),$$

и только они, непредставимы формой $\{1,12,36\}$.

2) *Числа вида*

$$3\eta+2,\quad 4\eta+2,\quad 4\eta+3,\quad 9^\mu(9\eta+6)\ (\mu\geqslant 0)\quad \textit{и}\quad s^2$$

(*в случае когда все входящие в* s *простые* $p\equiv 1 \pmod 3$), *и только они, непредставимы формой* $\{4,9,12\}$.

Доказательство. Почти дословно то же, что и следствия 2 теоремы 5.

Цитированная литература

[1] E. Hecke, *Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden*, Mathematische Werke, Zweite Auflage, Göttingen, 1970, стр. 708–730.
[2] — *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, ibid., стр. 789–918.
[3] B. W. Jones and G. Pall, *Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms*, Acta Math. 70 (1938), стр. 165–191.
[4] H. D. Kloosterman, *The behaviour of general theta-functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups. I*, Ann. of Math. 47 (1946), стр. 317–375.
[5] Л. А. Коган, *О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с тремя переменными*, Известия Академии Наук Узбекской ССР, серия физ.-мат. наук, 4 (1963), стр. 13–22.
[6] — *О представлении чисел некоторыми тернарными квадратичными формами*, Ученые записки Ташкентского педагогического института 61 (1966), стр. 10–19.
[7] Г. А. Ломадзе, *О числе представлений чисел формами $x^2+3y^2+36z^2$ и $x^2+12y^2+36z^2$*, Сообщения Академии Наук Грузинской ССР 51 (1968), стр. 25–30.
[8] — *О числе представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными*, Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе 40 (1971), стр. 106–139.
[9] — *О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами*, Acta Arith. 19 (1971), стр. 267–305; 387–407.
[10] G. Pall, *Representation by quadratic forms*, Canad. Journ. Math. 1 (1949), стр. 344–364.

Поступило 21. 5. 1976 (851

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1978)

On a problem of R. L. Graham

by

R. D. Boyle (Heslington)

0. Introduction. Let S be a set of distinct positive integers

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{where} \quad a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Then Graham [1] has made the following:

Conjecture.

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i}{(a_i, a_j)} \geqslant n \quad \text{for any } S, \text{ any } n \geqslant 2.$$

Supposing the conjecture false, we will call any counter example a *good set for n*. If S is good for n, it has been shown that:

(1) Not all the a_i are square free (Marica and Schönheim [2]).

(2) a_1 is not a prime (Winterle [3]).

(3) n is not a prime (Szemerédi [1]).

(4) $n-1$ is not a prime (Vélez [4]).

(5) If $p\,|\,a_i$ for some i, and p is prime, $p \leqslant n$ (Vélez [4]).

Vélez also considers in [4] the nature of sets with maximum ratio equal to n.

In this paper we shall show:

Theorem 1. *If S is good for n, p is a prime, and $p\,|\,a_i$ for some i, then*

(6) $$p \leqslant (n-1)/2.$$

An immediate corollary to this theorem is Vélez' result that $n-1$ is not a prime; it further enables us to show that $n-2$ and $n-3$ must be composite also.

Theorem 2. *If p is a prime, and S is good for n, where*

(7) $$n = qp+t, \quad 1 \leqslant t \leqslant p,$$

(8) $$p\,|\,a_i \quad \textit{for some } i,$$

(9) $$n \textit{ is sufficiently large depending on } q,$$