Corollary. *Suppose that the proposition holds for some σ and that $f(n) \geqslant \tau$, where $f(n)$ and τ are as above. Then for any $\varepsilon > 0$, $N > 1$ and R cubic forms in n variables there exists a non-zero integral vector $\boldsymbol{x}$ satisfying*

$$\max_j |x_j| \leqslant N \quad \text{and} \quad \max_l \|C^l(\boldsymbol{x})\| \ll N^{-\varrho+\varepsilon} \tag{5.17}$$

where

$$\varrho = \sigma\{1+O(n^{-1/(2^s-1)})\} \quad \text{as} \quad n \to \infty \tag{5.18}$$

and the implicit constants depend only on ε, R, n and s.

References

[1] R. C. Baker and J. Gajraj, *On the fractional parts of certain additive forms*, Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), pp. 463–467.

[2] J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[3] R. J. Cook, *The fractional parts of an additive form*, Proc. Camb. Phil. Soc. 72 (1972), pp. 209–212.

[4] I. Danicic, *Ph. D. thesis*, University of London, 1957.

[5] — *An extension of a theorem of Heilbronn*, Mathematika 5 (1958), pp. 30–37.

[6] — *The distribution* (mod 1) *of pairs of quadratic forms with integer variables*, J. London Math. Soc. 42 (1967), pp. 618–623.

[7] H. Davenport, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, Ann Arbor, Michigan, 1962.

[8] — *Cubic forms in 16 variables*, Proc. Roy. Soc. A 272 (1963), pp. 285–303.

[9] — *On a theorem of Heilbronn*, Quart. J. Math. (Oxford) (2) 18 (1967), pp. 339–344.

[10] H. Heilbronn, *On the distribution of the sequence $n^2\theta$* (mod 1), ibid. 19 (1948), pp. 249–256.

[11] M. C. Liu, *Simultaneous approximation of two additive forms*, Proc. Camb. Phil. Soc. 75 (1974), pp. 77–82.

[12] — *Simultaneous approximation of additive forms*, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), pp. 361–373.

[13] Jane Pitman, *Cubic inequalities*, J. London Math. Soc. 43 (1968), pp. 119–126.

THE UNIVERSITY, Sheffield, England

Received on 27. 2. 1975
and in revised form on 6. 9. 1975 (758)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1978)

Darstellungsmaße binärer quadratischer Formen über totalreellen algebraischen Zahlkörpern

von

Horst Pfeuffer (Mainz)

Von den lokalen Faktoren in der Maßformel des Hauptsatzes der Siegelschen analytischen Theorie der quadratischen Formen über algebraischen Zahlkörpern sind die *dyadischen Darstellungsdichten* am umständlichsten zu bestimmen, jedoch hängt der Aufwand sehr von der Berechnungsmethode ab. Die Darstellungsdichte einer *binären, lokal nicht modularen Form* durch sich selbst, die von Körner ([6], Satz 3) für quadratische Zahlkörper bestimmt wurde, läßt sich ohne Mehraufwand auch für beliebige Zahlkörper angeben, wenn man geeignete Invarianten von O'Meara [3] benutzt.

Die $\mathfrak{p}$-adische Darstellungsdichte eines Gitters hängt nur von seiner Lokalisierung nach $\mathfrak{p}$ ab. Es genügt daher, $\mathfrak{o}$-*Gitter G auf einem zweidimensionalen Raum mit nichtausgearteter quadratischer Form über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper mit Ganzheitsbereich* $\mathfrak{o}$ zu betrachten. Ein nicht modulares Gitter ist bis auf Skalarfaktoren an der Form von der Gestalt

$$G = \mathfrak{o}x_1 \perp \mathfrak{o}x_2 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^s a \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathfrak{u}$, $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{p}^s = \mathfrak{d}G$ und $dG \underset{2}{\cong} \pi^s a$. Die Bezeichnungen sind aus [3] entnommen oder in [7] erklärt.

Mit den Hilfssätzen 2, 4, 5 und 7 sowie (28) aus [7] folgt

$$d_{\mathfrak{p}}(G, G) = \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{s+e} d_{\mathfrak{p}}(G, \mathfrak{o}x_1),$$

worin

$$d_{\mathfrak{p}}(G, \mathfrak{o}x_1) = \frac{A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1)}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^\nu}$$

für genügend großes ν und $A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1)$ die Anzahl der modulo $\mathfrak{p}^\nu G$ verschiedenen Vektoren $x = \xi x_1 + \eta x_2$ aus G mit

$$(x, x) = \xi^2 + \pi^s a \eta^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^\nu) \tag{$*$}$$

ist. Bei geradem $s = 2s'$ hat $(*)$, wie man mittels $\zeta \equiv \xi - \pi^{s'}\eta \pmod{\mathfrak{p}^\nu}$ und $\beta = \alpha + 1$ sieht, ebenso viele Lösungen wie

$$(**) \qquad \zeta^2 + 2\pi^{s'}\zeta\eta + \pi^{2s'}\beta\eta^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\nu}.$$

Ähnlich wie für [7], (32) kommt es bei der Bestimmung dieser Lösungen auf den quadratischen Defekt (siehe [3], § 63A)

$$\partial(-dG) = \begin{cases} \mathfrak{s}_2, & s \text{ ungerade}, \\ \mathfrak{s}_2\partial(-\alpha), & s \text{ gerade} \end{cases}$$

an. Wählt man o.B.d.A. $-\alpha \equiv 1 \bigl(\bmod\ \partial(-\alpha)\bigr)$, so ist $\beta\mathfrak{o} = \partial(-\alpha) \subseteq \mathfrak{p}$. Es sei jetzt $\mathfrak{p}$ gerade und der Exponent σ definiert durch

$$\mathfrak{p}^\sigma = 4\mathfrak{o} + 2\mathfrak{p}^{\left[\frac{s}{2}\right]} + \partial(-dG).$$

Im Falle $\mathfrak{p}^\sigma = \partial(-dG)$ ist $s \leqslant \sigma \leqslant 2e$. Wenn s ungerade, also $\sigma = s$ ist, schließt man $\eta \in 2\mathfrak{p}^{-\left[\frac{s}{2}\right]}$ aus $(*)$; denn andernfalls wäre $(\xi^2-1)\mathfrak{o} = \pi^s\alpha\eta^2\mathfrak{o} \nsubseteq 4\mathfrak{o}$, also $(\xi^2-1)\mathfrak{o} = (\xi-1)^2\mathfrak{o}$ ungerade $\mathfrak{p}$-Potenz. Folglich $\xi \equiv 1 \pmod{2\mathfrak{o}}$. Setzt man

$$\xi \equiv 1 + 2\xi_0 \pmod{\mathfrak{p}^\nu},$$

$$\eta \equiv 2\pi^{-\left[\frac{s}{2}\right]}\eta_0 \pmod{\mathfrak{p}^\nu},$$

so wird $(*)$ gleichbedeutend mit

$$\xi_0 + \xi_0^2 + \pi^{s-2\left[\frac{s}{2}\right]}\alpha\eta_0^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{\nu-2e}}.$$

Da $s - 2\left[\dfrac{s}{2}\right] = 1$ ist, gibt es zu jedem $\eta_0 \bmod \mathfrak{p}^{\nu-e+\left[\frac{s}{2}\right]}$ zwei Lösungen $\xi_0 \bmod \mathfrak{p}^{\nu-2e}$, also $2\mathfrak{N}\mathfrak{p}^e$ $\xi \bmod \mathfrak{p}^\nu$, mithin

$$A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1) = 2\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu+\left[\frac{s}{2}\right]}.$$

Wenn $s = 2s'$ gerade ist, folgt $\beta = \pi^{2i-1}\beta_0$ mit $\beta_0 \in \mathfrak{u}$ und $\sigma = s + 2i - 1$. Man schließt $\eta \in \dfrac{2}{\beta}\mathfrak{p}^{-s'}$ aus $(**)$; denn andernfalls wäre $\pi^s\beta\eta \notin 2\mathfrak{p}^{s'}$, also $(\zeta^2-1)\mathfrak{o} = (2\pi^{s'}\zeta + \pi^s\beta\eta)\eta\mathfrak{o} = \pi^s\beta\eta^2\mathfrak{o} \nsubseteq \dfrac{4}{\beta}\mathfrak{o}$, das heißt $(\zeta^2-1)\mathfrak{o} = (\zeta-1)^2\mathfrak{o}$ ungerade $\mathfrak{p}$-Potenz. Folglich $\zeta^2 - 1 \in 2\mathfrak{p}^{s'}\eta\mathfrak{o} \subseteq \dfrac{4}{\beta}\mathfrak{o}$ und $\zeta \equiv 1 \pmod{2\mathfrak{p}^{-i+1}}$. Setzt man

$$\zeta \equiv 1 + \frac{2}{\pi^{i-1}}\zeta_0 \pmod{\mathfrak{p}^\nu},$$

$$\eta \equiv \frac{2}{\beta\pi^{s'}}\eta_0 \pmod{\mathfrak{p}^\nu},$$

so wird $(**)$ gleichbedeutend mit

$$\pi^i\beta_0\zeta_0 + \pi\beta_0\zeta_0^2 + \zeta\eta_0 + \eta_0^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{\nu-2e+2i-1}}.$$

Wegen $\pi^i\beta_0\zeta_0 + \pi\beta_0\zeta_0^2 \in \mathfrak{p}$ und $\zeta \in \mathfrak{u}$ gibt es zu jedem $\zeta_0 \bmod \mathfrak{p}^{\nu-e+i-1}$ zwei Lösungen $\eta_0 \bmod \mathfrak{p}^{\nu-2e+2i-1}$, also $2\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{e+s'}$ $\eta \bmod \mathfrak{p}^\nu$, mithin

$$A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1) = 2\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu+s'+i-1}.$$

Im Falle $\partial(-dG) \subset \mathfrak{p}^\sigma \subseteq \mathfrak{s}_2$ ist notwendig $s = 2s' \leqslant 2e$ und $\pi^s\beta\mathfrak{o} = \partial(-dG) \subset 2\mathfrak{p}^{s'} = \mathfrak{p}^\sigma$. Das bedeutet $\zeta^2 \equiv 1 \pmod{2\mathfrak{p}^{s'}}$, und $(**)$ wird durch den Ansatz

$$\zeta \equiv 1 + \pi^{\left[\frac{e+s'+1}{2}\right]}\zeta_0 \pmod{\mathfrak{p}^\nu}$$

gleichbedeutend zu

$$\pi^{\left[\frac{e+s'+1}{2}\right]-s'}\zeta_0 + \tfrac{1}{2}\pi^{2\left[\frac{e+s'+1}{2}\right]-s'}\zeta_0^2 + \zeta\eta + \tfrac{1}{2}\pi^{s'}\beta\eta^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{\nu-e-s'}}.$$

Zu jedem $\zeta_0 \bmod \mathfrak{p}^{\nu-\left[\frac{e+s'+1}{2}\right]}$ gibt es wegen $\frac{1}{2}\pi^{s'}\beta \in \mathfrak{p}$ genau eine Lösung $\eta \bmod \mathfrak{p}^{\nu-e-s'}$, also $\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{e+s'}$ $\eta \bmod \mathfrak{p}^\nu$, mithin

$$A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1) = \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu+\left[\frac{e+s'}{2}\right]}.$$

Im Falle $\mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{p}^\sigma$, das heißt $\mathfrak{p}^\sigma = 4\mathfrak{o}$ hat $(*)$ für jedes $\eta \bmod \mathfrak{p}^\nu$ genau zwei Lösungen $\xi \bmod \mathfrak{p}^{\nu-e}$, da $1 - \pi^s\alpha\eta^2 \equiv 1 \pmod{4\mathfrak{p}}$ ein Quadrat in $\mathfrak{u}$ und mit $\xi \bmod \mathfrak{p}^\nu$ auch die volle Restklasse $\xi \bmod \mathfrak{p}^{\nu-e}$ Lösungen liefert. Daher ist

$$A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1) = 2\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu+e}.$$

In allen Fällen ist das Ergebnis $A_{\mathfrak{p}^\nu}(G, \mathfrak{o}x_1) = \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu+\left[\frac{\sigma}{2}\right]}r$, also

$$d_{\mathfrak{p}}(G, G) = \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{s+e+\left[\frac{\sigma}{2}\right]}r$$

mit

$$r = \begin{cases} 1, & \partial(-dG) \subset \mathfrak{p}^\sigma \subseteq \mathfrak{s}_2, \\ 2, & \partial(-dG) = \mathfrak{p}^\sigma \text{ oder } \mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{p}^\sigma. \end{cases}$$

Die in [7], Satz 1 und (32) enthaltenen Formeln für die Darstellungsdichten unimodularer Gitter G lassen sich ebenso formulieren, indem man $s = 0$, $\mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{n}G\mathfrak{w}G$ und

$$r = \begin{cases} 1, & 4\mathfrak{o} \subset \mathfrak{p}^\sigma \text{ und } \partial(-dG) \subset \mathfrak{p}^\sigma, \\ 2, & 4\mathfrak{o} \subset \mathfrak{p}^\sigma = \partial(-dG), \\ 1 - \dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}, & 4\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^\sigma \end{cases}$$

setzt. Diese Werte stimmen in den in [6] behandelten Sonderfällen mit den dortigen Ergebnissen überein, wie man nach einiger Rechnung sieht.

Bei ungeradem $\mathfrak{p}$ sind entsprechende Formeln schon von Siegel (siehe [2], Hilfssatz 56 mit [6], Hilfssatz 8) angegeben worden, nämlich

$$d_{\mathfrak{p}}(G, G) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}, & G \text{ unimodular}, \\ 2\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{s}, & G \text{ nicht unimodular}. \end{cases}$$

Da lokale Skalarfaktoren an der Form nach [7], Hilfssatz 7 berücksichtigt werden können, sind damit *alle lokalen Darstellungsdichten für alle Formen vom Range zwei explizit bekannt* und von der Gestalt

$$d_{\mathfrak{p}}(G, G) = \mathfrak{N}(\mathfrak{d}G)\mathfrak{N}(\mathfrak{s}G)\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{e+\left[\frac{\sigma}{2}\right]}r.$$

Für ein $\mathfrak{o}_K$-Gitter G auf einem zweidimensionalen Raum V mit nichtausgearteter totalpositiver quadratischer Form über dem totalreellen algebraischen Zahlkörper K besagt die Maßformel von Siegel [2]:

$$\frac{1}{M(G)} = \frac{1}{\sqrt{d}}\, d_\infty(G, G) \prod_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}}(G, G),$$

worin d die Diskriminante von K ist und die reelle Darstellungsdichte den Wert

$$d_\infty(G, G) = \sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{d}G)^{-3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

mit $n = [K:Q]$ hat. Das Produkt ist nach wachsenden $\mathfrak{N}\mathfrak{p}$ geordnet. Zusammen ergibt sich mit $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s}G)^{-2}\mathfrak{d}G$

$$\frac{1}{M(G)} = \frac{\pi^n}{\sqrt{d}} \sqrt{\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{s}G)^2}{\mathfrak{N}(\mathfrak{d}G)}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} 2 \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right) \prod_{\mathfrak{p}|2} \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\left[\frac{\sigma}{2}\right]} r_{\mathfrak{p}},$$

wobei

$$r_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (\mathfrak{s}G_{\mathfrak{p}})^{-2}\partial(-dG_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{p}^\sigma \subseteq \mathfrak{s}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}, \\ \left(1 - \dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1}, & 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}^\sigma \text{ und } (\mathfrak{s}G_{\mathfrak{p}})^{-2}\partial(-dG_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{p}^\sigma,\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \\ 2, & 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}^\sigma \text{ und } (\mathfrak{s}G_{\mathfrak{p}})^{-2}\partial(-dG_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^\sigma,\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und χ der erzeugende Charakter von $K(\sqrt{-dG_K})/K$, insbesondere $\chi(\mathfrak{p}) \doteq 0$ für relativ verzweigte $\mathfrak{p}$ ist.

An dieser Formel ändert sich nichts, wenn man G statt auf V als Gitter auf $V \circ a$, das heißt versehen mit der quadratischen Form aq betrachtet. Insbesondere ist $d(V \circ a) = a^2 dV$ und der Körper $K(\sqrt{-dG_K})$ bleibt derselbe. Durch geeignete Wahl von $a \in K^*$ kann man erreichen, daß 1 von $V \circ a$ dargestellt, also $V \circ a$ isometrisch zu dem K-Vektorraum $K' = K(\sqrt{\delta})$, versehen mit der quadratischen Form $N = N_{K'|K}$, wird. Dabei sei $\delta = -dV$. Die zu N gehörige Bilinearform auf K' ist durch

$$(x, y) = S(x\bar{y}) = x\bar{y} + \bar{x}y$$

gegeben, worin $S = S_{K'|K}$ die Spur und $^-$ der erzeugende Automorphismus von K'/K ist.

Das $\mathfrak{o}_K$-Gitter $R = \mathfrak{o}_{K'}$ auf K' hat nach dem Produktsatz für die Diskriminanten und der Definition der reduzierten Differente $\partial_{K'|K} = S(\mathfrak{o}_{K'})$ in [4] oder [5] die Invarianten

$$\mathfrak{s}R = \partial_{K'|K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}R = \mathfrak{d}_{K'|K}$$

sowie

$$\mathfrak{n}R = 2\mathfrak{o}_K \quad \text{und} \quad -dR_K = \delta.$$

Für alle $\mathfrak{o}_K$-Gitter A auf K' mit denselben Invarianten stimmen auch die übrigen in die obige Maßformel eingehenden Größen überein. Dies ist offensichtlich bei den ersten vier Faktoren. Zur Bestimmung des letzten ist die vollständige Hülle $A_{\mathfrak{p}}$ für die geraden $\mathfrak{p}$ zu untersuchen.

Im Falle $v_{\mathfrak{p}}(\delta) \equiv 0 \pmod 2$ und $\partial_{\mathfrak{p}}(\delta) \subseteq 4\delta\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ist $\mathfrak{p}$ in K'/K unverzweigt, also kein Teiler von $\mathfrak{d}_{K'|K}$ und $A_{\mathfrak{p}}$ unimodular mit $\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}} = 2\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Daher ist $\mathfrak{p}^\sigma = 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ und $r_{\mathfrak{p}} = 1$.

Im Falle $v_{\mathfrak{p}}(\delta) \equiv 0 \pmod 2$ und $4\delta\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \subset \partial_{\mathfrak{p}}(\delta)$ ist $\partial_{\mathfrak{p}}(\delta) = \delta\mathfrak{p}^{2i-1}$ mit $1 \leqslant i \leqslant e$ und $\mathfrak{p}$ in K'/K verzweigt. Wenn $\delta_1 \in K$ mit $\delta_1^2 \equiv \delta \pmod{\delta\mathfrak{p}^{2i-1}}$ und $\pi \in K$ als Primelement für $\mathfrak{p}$ gewählt wird, ist $\pi' = \dfrac{\delta_1 + \sqrt{\delta}}{\delta_1\pi^{i-1}} \in K'$ Primelement für den Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K' und $D(\pi')\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = \dfrac{2}{\pi^{i-1}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}^{2(e-i+1)}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag zur Differente $\mathfrak{D}_{K'|K}$. Daraus folgt einerseits $\mathfrak{d}A_{\mathfrak{p}} = \left(\dfrac{2}{\pi^{i-1}}\right)^2\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, andererseits nach [5] $\mathfrak{s}A_{\mathfrak{p}} = \dfrac{2}{\pi^{i-1}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. $A_{\mathfrak{p}}^* = A_{\mathfrak{p}} \circ \dfrac{\pi^{i-1}}{2}$ ist unimodular mit den Invarianten $dA_{\mathfrak{p}}^* = -\dfrac{\delta}{\delta_1^2}$ und $\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}}^* = \mathfrak{p}^{i-1} \supset 2\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Weiter folgt mit [3], example 93:10

$$\mathfrak{p}^{2i-1} = \partial_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\delta}{\delta_1^2}\right) = \partial_{\mathfrak{p}}(-dA_{\mathfrak{p}}^*) \subseteq \mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}}^*\mathfrak{w}A_{\mathfrak{p}}^* = \mathfrak{p}^{i-1}\mathfrak{w}A_{\mathfrak{p}}^*,$$

also schließlich $\mathfrak{p}^i \subseteq \mathfrak{w}A_{\mathfrak{p}}^* \subset \mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}}^* = \mathfrak{p}^{i-1}$. Daher ist $\mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}}^*\mathfrak{w}A_{\mathfrak{p}}^* = \mathfrak{p}^{2i-1}$ und $r_{\mathfrak{p}} = 2$.

Im Falle $v_{\mathfrak{p}}(\delta) \equiv 1 \pmod 2$ ist $\partial_{\mathfrak{p}}(\delta) = \delta\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{p}$ in K'/K verzweigt. Wenn $\pi \in K$ als Primelement für $\mathfrak{p}$ mit $\delta \underset{2}{=} \pi$ gewählt wird, ist $\pi' = \sqrt{\pi} \in K'$ ein Primelement für $\mathfrak{P}$ und $D(\pi')\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = 2\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag zu $\mathfrak{D}_{K'|K}$. Daraus folgt $\mathfrak{d}A_{\mathfrak{p}} = 4\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{s}A_{\mathfrak{p}} = 2\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. $A_{\mathfrak{p}}^{*} = A_{\mathfrak{p}} \circ \frac{1}{2}$ ist nicht unimodular, sondern $\mathfrak{s}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ und $\partial_{\mathfrak{p}}(-dA_{\mathfrak{p}}^{*}) = \partial_{\mathfrak{p}}(\pi) = \pi$. Daher ist

$$\mathfrak{p}^{\sigma} = 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} + 2\mathfrak{p}^{\left[\frac{s}{2}\right]} + \partial_{\mathfrak{p}}(-dA_{\mathfrak{p}}^{*}) = \mathfrak{p} = (\mathfrak{s}A_{\mathfrak{p}})^{-2}\partial_{\mathfrak{p}}(-dA_{\mathfrak{p}})$$

und $r_{\mathfrak{p}} = 1$.

Stets ist also $2\mathfrak{p}^{-\left[\frac{\sigma}{2}\right]}$ gerade der $\mathfrak{p}$-Anteil von $\partial_{K'|K}$, mithin

$$\prod_{\mathfrak{p}|2} \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\left[\frac{\sigma}{2}\right]} = \frac{2^n}{\mathfrak{N}(\partial_{K'|K})} = \frac{2^n}{\mathfrak{N}(\mathfrak{s}A)}.$$

Ferner ist $r_{\mathfrak{p}} = 2$ genau für diejenigen geraden $\mathfrak{p}$, die zwar in $\mathfrak{d}_{K'|K}$, aber nicht in $\mathfrak{s}$ aufgehen. Da es ungerade $\mathfrak{p}$ dieser Art nicht gibt und $\mathfrak{s} \mid \mathfrak{d}_{K'|K}$ ist, folgt

$$\prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}} 2 \prod_{\mathfrak{p}|2} r_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}_{K'|K}} 2 = 2^{\mu},$$

wobei μ die *Anzahl der endlichen Verzweigungsstellen* bezeichnet. Aus dem letzten Argument folgt noch $\chi(\mathfrak{p}) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{s}$, also

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right) = L(1|\chi)^{-1}.$$

Für ein $\mathfrak{o}_K$-Gitter A auf $K' = K(\sqrt{\delta})$ aus derselben Ordnung wie R — womit nach klassischen Vorbilde [1], § 9 die Übereinstimmung der Invarianten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{d}$ gemeint sein soll — nimmt die Maßformel die Gestalt

$$\frac{1}{M(A)} = \frac{(2\pi)^n}{\sqrt{d}} \frac{2^{\mu}}{\sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{K'|K})}} L(1|\chi)^{-1}$$

an.

Nun ist bekanntlich $\zeta_{K'}(s) = \zeta_K(s)L(s|\chi)$ und ζ_K hat bei $s = 1$ das Residuum

$$r_K = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R}{w\sqrt{|d|}}h,$$

worin r_1 und r_2 die Anzahlen der reellen und komplexen Primstellen, w die Einheitswurzelanzahl, d die Diskriminante, R den Regulator und h die Klassenzahl von K bezeichnet. Daß K totalreell ist, bedeutet $r_1 = n$, $r_2 = 0$, $w = 2$ und $d > 0$. Die entsprechenden Größen für den totalimaginären Körper K' sind $r_1' = 0$, $r_2' = n$, w' und $|d'| = \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{K'|K})d^2$.

Der Beweis für den Zusammenhang zwischen den Regulatoren eines Einheitswurzelkörpers und seines maximalen reellen Teilkörpers in [4], § 28.4 II benutzt nicht mehr, als daß jener totalimaginäre, quadratische Erweiterung des totalreellen ist; es gilt daher auch hier

$$R' = \frac{2^{n-1}}{Q} R$$

mit dem Einheitenindex $Q = \frac{w}{w'}(\mathfrak{u}_{K'} : \mathfrak{u}_K)$. Damit kann man den Wert der L-Funktion durch arithmetische Invarianten von K und K' ausdrücken, und die Maßformel reduziert sich auf

$$\frac{1}{M(A)} = 2^n w' Q \frac{h}{h'}.$$

Das Maß des Gitters A auf dem totalpositiven Vektorraum $V = K'$ ist definiert als die Summe

$$M(A) = \sum_{i=1}^{h(A)} \frac{1}{E(A_i)}$$

über ein Repräsentantensystem A_i der Klassen im Geschlecht von A mit den Ordnungen $E(A_i)$ der orthogonalen Gruppen $O(A_i) = \{\sigma \in O(V) \mid A_i^{\sigma} = A_i\}$.

Die Multiplikation mit $\gamma \in K'$ ist genau dann eine Isometrie σ_{γ} von V, wenn $N(\gamma) = 1$ ist, und $SO(V)$ besteht genau aus diesen Isometrien. Die Spiegelung zum Vektor $\sqrt{\delta}$ ist die Konjugation σ_0: $x \to \bar{x}$ und $O(V) = SO(V) \cup \sigma_0 SO(V)$. Da V totalpositiv ist, sind alle Gruppen $O(A)$ endlich. Aus $\sigma_{\gamma} \in SO(V)$ folgt $\mathbf{1} = \sigma_{\gamma}^{k} = \sigma_{\gamma^k}$, also $\gamma^k = 1$ mit $k \in \mathbf{N}$. Umgekehrt gilt für jede Einheitswurzel $\gamma \in K'$ von selbst $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma\gamma^{-1} = 1$ und $\gamma A = A$; denn ich werde gleich zeigen, daß *die Gitter A aus der Ordnung von R gebrochene $\mathfrak{o}_{K'}$-Ideale* sind.

Dazu seien $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}'$ die Ringe der für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen von K und K', $\{1, \pi'\}$ eine $\mathfrak{p}$-Ganzheitsbasis und $A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}A$ (anders als oben) die Lokalisierung von A innerhalb K'. Als endlich erzeugter, torsionsfreier $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-Modul ist $A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}x \oplus \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}y$ frei. $\{x, y\}$ ist auch K-Basis von K', also

$$\pi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \xi, \eta, \zeta, \omega \in K$$

und sogar $\eta \neq 0$. Folglich sind $S(\pi') = \xi + \omega$ und $N(\pi') = \xi\omega - \eta\zeta$ ganz für $\mathfrak{p}$. Aus $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\zeta + \omega\dfrac{y}{x}}{\xi + \eta\dfrac{y}{x}}$ liest man $S\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\omega - \xi}{\eta}$ und $N\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{\zeta}{\eta}$ ab.

Der $\mathfrak{p}$-Beitrag zu $\mathfrak{d}A$ ist daher

$$\mathfrak{d}A_\mathfrak{p} = d(x, y)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \big(4N(x)N(y) - S(x\bar{y})^2\big)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \frac{N(x)^2}{\eta^2}\big(-4\eta\zeta - (\omega-\xi)^2\big)\mathfrak{o}_\mathfrak{p},$$

während der $\mathfrak{p}$-Beitrag zu $\mathfrak{d}_{K'|K}$

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = d(1, \pi')\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \big(4N(\pi') - S(\pi')^2\big)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \big(-4\eta\zeta - (\omega-\xi)^2\big)\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$$

ist. Es folgt $N(x)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \eta\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ und für den $\mathfrak{p}$-Beitrag von $\mathfrak{n}A = 2\mathfrak{o}_K$ gilt

$$2\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}A_\mathfrak{p} = 2N(x)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} + 2S(x\bar{y})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} + 2N(y)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = 2\big(\eta\mathfrak{o}_\mathfrak{p} + (\omega-\xi)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} + \zeta\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\big).$$

Das geht nur mit $\xi, \eta, \zeta, \omega \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{o}'_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} \subseteq A_\mathfrak{p}$, was wegen $A = \bigcap_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$ die Behauptung liefert.

Wenn $W' \subseteq \mathfrak{u}_{K'}$ die Einheitswurzelgruppe von K' bezeichnet, ist damit $SO(A) \cong W'$ bewiesen. Genau dann gilt $O(A) > SO(A)$, wenn $\bar{A} = \gamma A$ mit $N(\gamma) = 1$ ist, das heißt wenn die Klasse von A nur eine engere Klasse enthält. Sonst repräsentieren A und $\bar{A}$ zwei verschiedene engere Klassen und man kann schreiben

$$M(A) = \sum_{i=1}^{h(A)} \frac{1}{E(A_i)} = \sum_{\bar{A}_i = \gamma A_i} \frac{1}{2w'} + \sum_{\bar{A}_i \neq \gamma A_i} \frac{1}{w'} = \frac{h^+(A)}{2w'},$$

worin $h^+(A)$ die *Anzahl der engeren Klassen im Geschlecht von* A bezeichnet. Die Maßformel geht nun in eine *Klassenzahlformel*

$$h^+(A) = \frac{h'}{hQ\cdot 2^{\mu-1}}$$

über.

Im klassischen Fall $K = \boldsymbol{Q}$ ist $h = 1$, $Q = 1$, und man betrachtet primitive, ganzzahlige Formen $q = a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2$ mit „Diskriminante" $d = b^2 - 4ac$. Diese entsprechen gerade den Gittern der oben betrachteten Ordnung. Die Maßformel bedeutet dann, daß die Anzahl der engeren Klassen eines jeden Geschlechts dieser Ordnung, multipliziert mit dem konstanten Faktor $2^{\mu-1}$, mit der Idealklassenzahl von $K' = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, wegen der eineindeutigen Beziehung zwischen Idealklassen und engeren Formenklassen also mit der Anzahl aller engeren Formenklassen zusammenfällt. Der Faktor $2^{\mu-1}$ muß daher die Anzahl der Geschlechter sein. In [8] wird eine Formel angegeben, die ebenfalls diese klassische Aussage als Spezialfall enthält.

Nachtrag: Eine ähnliche Klassenzahlformel kommt in der kürzlich erschienenen Note [9] mittels einer Beziehung zur Tamagawazahl τ der Gruppe $G = \{\gamma \in K'^* \mid N(\gamma) = 1\}$ zustande. Das ist nicht verwunderlich, denn $G = SO(V)$ und die Siegelsche Maßformel ist mit $\tau = 2$ gleichbedeutend.

Literaturverzeichnis

[1] Hermann Minkowski, *Untersuchungen über quadratische Formen I: Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält*, Acta Math. 7 (1885), S. 201–258 = Ges. Abh. I, Leipzig 1911, S. 157–202.

[2] Carl Ludwig Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III*, Ann. Math. 38 (1937), S. 212–291 = Ges. Abh. I, Berlin 1966, S. 469–548.

[3] O. T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms*, Grundlehren 117, Berlin 1963.

[4] Helmut Hasse, *Zahlentheorie*, Berlin 1963.

[5] Franz Halter-Koch, *Arithmetische Kennzeichnung der Spur des Einsdivisors*, J. reine angew. Math. 228 (1967), S. 217–219.

[6] Otto Körner, *Die Maße der Geschlechter quadratischer Formen vom Range $\leqslant 3$ in quadratischen Zahlkörpern*, Math. Ann. 193 (1971), S. 279–314.

[7] Horst Pfeuffer, *Einklassige Geschlechter totalpositiver quadratischer Formen in totalreellen algebraischen Zahlkörpern*, J. Number Theory 3 (1971), S. 371–411.

[8] — *Integral representations over local fields and the number of genera of quadratic forms*, Acta Arith. 24 (1973), S. 301–311.

[9] Jih-Min Shyr, *On relative class number of certain quadratic extensions*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), S. 500–502.

Eingegangen den 8. 4. 1976 (836)