In this case $\frac{6}{2^r} - \frac{\gamma}{r(r+1)} < 0$ for $r \geqslant 8$ (where $\gamma \approx 2.2$), thus

$$\varrho(r) - \frac{\gamma}{r(r+1)} < \frac{\log 2}{5} \quad (\text{for } r \geqslant 8). \tag{6.8}$$

Noting that $r_1 \geqslant 7$ and $r_i \geqslant 8$ for $i \geqslant 2$, combining (6.5) and (6.8) yields

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\varrho(r_i) - \frac{\gamma}{r_i(r_i+1)}\right) < \frac{\log 2}{4} + \frac{5\log 2}{5} = \frac{5}{4}\log 2 < .875. \tag{6.9}$$

From (6.3), (6.7) and (6.9) it then follows that

$$\varrho(\mathscr{A}) < 2.0322 + 1.0926 + .875 = 3.9998 \tag{6.10}$$

for the case $a_4 = 6$.

The two estimates (6.6) and (6.10) allow us to conclude $\mu \leqslant 3.9998$, hence

$$\mu < 4. \tag{6.11}$$

7. Concluding remarks. Throughout, various questions were posed. Of these, the primary problem is that of determining the precise value of λ and those sum-free sequences $\mathscr{A}$ such that $\varrho(\mathscr{A}) = \lambda$ (if they exist). In contrast with Theorem 4, it would be of interest to prove that if a sum-free sequence $\mathscr{A}$ is such that $\varrho(\mathscr{A})$ is sufficiently close to λ, then $a_1 = 1$. In connection with $\varkappa$-sequences, the problem of determining whether or not $\varrho(\mathscr{Q}) \leqslant \mu$ remains unanswered. If this were resolved, one would have a much better estimate of μ than that provided by (6.11), hence a much better estimate of λ.

Perhaps the difficulty in determining μ results from the fact that throughout, sequences were constrained to be integer-valued. We conclude by posing a problem which avoids such a constraint. Consider the class of real-valued sequences $\mathscr{A}$ with counting function $A(x)$ and terms $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ which satisfy

$$A(x) \leqslant \frac{x}{k} + a_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ x \geqslant 0). \tag{7.1}$$

What is the best bound for $\varrho(\mathscr{A})$ over this class of sequences?

References

[1] P. Erdős, *Remarks in number theory III. Some problems in additive number theory*, Mat. Lapok 13 (1962), pp. 28–38.

[2] J. O'Sullivan, *On reciprocal sums of sum-free sequences*, Ph. D. Thesis, Adelphi University, 1973.

Received on 16. 10. 1975 (779)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1977)

О поведении функций $\mathrm{Re}\{\zeta(s)\}$, $\mathrm{Im}\{\zeta(s)\}$ в критической полосе

Ян Мозер (Братислава)

1. Пусть

$$\begin{cases} s = \sigma + it, \ \sigma = \frac{1}{2} + \delta, \\ 0 < \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant \frac{1}{4} - \Delta, \ \Delta < \frac{1}{4}, \end{cases} \tag{1}$$

и $Q(\delta)$ обозначает промежуток

$$T < t < T + (2\pi)^{-\delta} T^{\Delta+\delta} \psi(T), \tag{2}$$

где $\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция. Пусть, дальше,

$$S(a, b) = \sum_{a \leqslant n < b \leqslant 2a} e^{it \ln n}, \quad b \leqslant \sqrt{t/2\pi}, \tag{3}$$

обозначает элементарную тригонометрическую сумму (ср. [2], стр. 34). Положим

$$V(t, \delta) = \mathrm{Im}\{\zeta(\tfrac{1}{2} + \delta + it)\}. \tag{4}$$

Покажем, что имеет место

Теорема 1. *Если*

$$|S(a, b)| < A(\Delta)\sqrt{a}\, t^{\Delta}, \tag{5}$$

то для каждого $\delta \in \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$ *существует* $T_1(\Delta, \psi, \delta) > 0$, *такое, что при* $T \geqslant T_1$ *промежуток* $Q(\delta)$ *содержит значение* $\bar{t}$ *для которого*

$$V(\bar{t}, \delta) = 0. \tag{6}$$

Пусть

$$U(t, \delta) = \mathrm{Re}\{\zeta(\tfrac{1}{2} + \delta + it)\}. \tag{7}$$

Относительно этой функции имеет место

Теорема 2. *Если* $S(a, b)$ *удовлетворяет условию* (5), *то для каждого* $\delta \in \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$ *существует* $T_2(\Delta, \psi, \delta) > 0$, *такое, что при* $T \geqslant T_2$ *промежуток* $Q(\delta)$ *содержит значение* $\bar{\bar{t}}$, *для которого*

$$U(\bar{\bar{t}}, \delta) = 1. \tag{8}$$

Далее введем последовательность $\{\bar{t}_\nu\}$ согласно условию (ср. [4], стр. 261)

$$\vartheta_1(\bar{t}_\nu) = \frac{\pi}{2}\nu, \tag{9}$$

где

$$\vartheta_1(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}, \tag{10}$$

и ν — целое положительное. Относительно функции $U(t,\delta)$, в связи с последовательностью $\{\bar{t}_\nu\}$ покажем, что имеет место

Теорема 3. *Если $S(a,b)$ удовлетворяет условию (5), то для каждого $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ существует $T_3(\Delta,\psi,\delta)>0$, такое, что при $T\geqslant T_3$*

$$\sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H} U(\bar{t}_\nu,\delta) = \frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{\Delta}\ln T), \tag{11}$$

где $0<H\leqslant\sqrt[4]{T}$.

Примечание. Соотношение (11) является асимптотическим при соблюдении условия

$$T^{\Delta} = o(H), \tag{12}$$

т.е. например, при

$$H = T^{\Delta}\psi(T). \tag{13}$$

Соотношение (11), в случае (13), показывает, что „большинство" значений $U(\bar{t}_\nu,\delta)$ положительно.

Перечисленные теоремы показывают, что (относительно примененного метода) проявляется некоторая асимметрия в поведении функций $U(t,\delta)$, $V(t,\delta)$ в критической полосе. А именно:

(a) функция $V(t,\delta)$ не препятствует регистрации своих нулей в некоторой окрестности критической прямой $\sigma=\frac{1}{2}$ (теорема 1),

(b) подобное обстоятельство имеет место и для функции $U(t,\delta)$, однако, в связи со значением 1 (теорема 2),

(c) соотношение (11) (теорема 3) показывает, что способ исследования принятый здесь является недостаточно чувствительным для регистрации нулей функции $U(t,\delta)$, в окрестности критической прямой $\sigma=\frac{1}{2}$.

2. Исходим из приближенного функционального уравнения ([4], стр. 82)

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} + \chi(s)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-}) + O(t^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}), \tag{14}$$

$$2\pi xy = t > 0.$$

Полагая $x=y=\sqrt{t/2\pi}=\tau$, $\sigma=\frac{1}{2}+\delta$, получаем

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+\delta+it) = \sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{n^{1/2+\delta+it}} + \chi(\tfrac{1}{2}+\delta+it)\sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{n^{1/2-\delta-it}} + O(t^{-1/4-\delta/2}). \tag{15}$$

Далее ([4], стр. 81, ср. (10))

$$\chi\left(\frac{1}{2}+\delta+it\right) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\delta+it} e^{i(t+\pi/4)}\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\delta} e^{-i\left(t\ln\frac{t}{2\pi}-t-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \frac{e^{-i2\vartheta_1(t)}}{\tau^{2\delta}} + O\left(\frac{1}{t^{1+\delta}}\right). \tag{16}$$

Однако,

$$\sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{n^{1/2-\delta-it}}O\left(\frac{1}{t^{1+\delta}}\right) = O\left(\frac{\tau^{1/2+\delta}}{t^{1+\delta}}\right) = O\left(\frac{\tau}{t}\right) = O(t^{-1/2}). \tag{17}$$

Следовательно, в силу (15), (16), (17),

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+\delta+it) = \sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{n^{1/2+\delta+it}} + \frac{e^{-i2\vartheta_1}}{\tau^{2\delta}}\sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{n^{1/2-\delta-it}} + O(t^{-1/4-\delta/2}). \tag{18}$$

Отделяя мнимую часть в соотношении (18), получаем

$$-V(t,\delta) = \sum_{n\leqslant\tau}\frac{\sin(t\ln n)}{n^{1/2+\delta}} + \frac{1}{\tau^{2\delta}}\sum_{n\leqslant\tau}\frac{\sin(2\vartheta_1 - t\ln n)}{n^{1/2-\delta}} + O(t^{-1/4-\delta/2}). \tag{19}$$

Пусть $t\in\langle T, T+H\rangle$ (напомним, что $H\leqslant\sqrt[4]{T}$). Так как

$$\frac{1}{\tau^{2\delta}} = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\delta} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\delta} + \left\{\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\delta} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\delta}\right\} = \frac{1}{(P_0)^{2\delta}} + O\left(\frac{\delta H}{T^{\delta+1}}\right) = \frac{1}{(P_0)^{2\delta}} + O(T^{-3/4}), \tag{20}$$

и

$$\sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{n^{1/2-\delta-it}}O(T^{-3/4}) = O(T^{-3/4}\tau^{1/2+\delta}) = O(T^{-3/4}\tau) = O(T^{-1/4}), \tag{21}$$

то, из (19), в силу (20), (21), при $t\in\langle T, T+H\rangle$,

$$(22)\qquad -V(t,\delta)=\sum_{n\leqslant\tau}\frac{\sin(t\ln n)}{n^{1/2+\delta}}+\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n\leqslant\tau}\frac{\sin(2\vartheta_1-t\ln n)}{n^{1/2-\delta}}+O(T^{-1/4}).$$

Далее, так как

$$(23)\qquad \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}-\sqrt{\frac{T}{2\pi}}=O\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right)=O(T^{-1/4}),$$

т.е. в промежуток

$$\left\langle\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}\right\rangle$$

попадает не более одного целого положительного, то

$$(24)\qquad \sum_{\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}}\frac{\sin(t\ln n)}{n^{1/2+\delta}}=O(T^{-1/4-\delta/2})=O(T^{-1/4}),$$

и

$$(25)\qquad \frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}}\frac{\sin(2\vartheta_1-t\ln n)}{n^{1/2-\delta}}=O(T^{-\delta}\cdot T^{-1/4+\delta/2})=O(T^{-1/4-\delta/2})=O(T^{-1/4}).$$

Следовательно, из (22), в силу (24), (25), при $t\in\langle T, T+H\rangle$, получается

$$(26)\qquad -V(t,\delta)=\sum_{n<P_0}\frac{\sin(t\ln n)}{n^{1/2+\delta}}+\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n<P_0}\frac{\sin(2\vartheta_1-t\ln n)}{n^{1/2-\delta}}+O(T^{-1/4}).$$

3. Далее, введем последовательность $\{\tilde t_\nu\}$ согласно условию (ср. [5], стр. 98)

$$(27)\qquad \vartheta_1(\tilde t_\nu)=\frac{\pi}{2}\nu+\frac{\pi}{4},$$

где ν — целое положительное. Теперь, из (26), в силу (27), получается

Формула 1. *При* $\tilde t_\nu\in\langle T, T+H\rangle$

$$(28)\qquad -V(\tilde t_\nu,\delta)=\frac{(-1)^\nu}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n<P_0}\frac{\cos(\tilde t_\nu\ln n)}{n^{1/2-\delta}}+\sum_{n<P_0}\frac{\sin(\tilde t_\nu\ln n)}{n^{1/2+\delta}}+O(T^{-1/4}).$$

Еще остановимся на свойствах последовательности $\{\tilde t_\nu\}$. Так как, в силу (10),

$$(29)\qquad \vartheta_1'(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi},\quad \vartheta_1''(t)=\frac{1}{2t},$$

то, подобно изложенному в [2], стр. 102, получаем

$$(30)\qquad \tilde t_{\nu+1}-\tilde t_\nu=\frac{\pi}{2\vartheta_1'(\tilde t_\nu)}+O\left\{\frac{\vartheta_1''(\tilde t_\nu)}{[\vartheta_1'(\tilde t_\nu)]^3}\right\}=\frac{\pi}{\ln(\tilde t_\nu/2\pi)}+O\left\{\frac{1}{\tilde t_\nu(\ln\tilde t_\nu)^3}\right\}.$$

Из этого, действуя способом [2], (40)–(42), при $\tilde t_\nu\in\langle T, T+H\rangle$, получаем

$$(31)\qquad \tilde t_{\nu+1}-\tilde t_\nu=\frac{\pi}{\ln(T/2\pi)}+O\left(\frac{H}{T\ln^2T}\right).$$

Из этого последнего (ср. [3], (23))

$$(32)\qquad \sum_{T\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T+H}1=\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{H^2}{T}\right).$$

4. В этой части попробуем получить оценку для суммы

$$(33)\qquad S_1=\sum_{n\leqslant M<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(\tilde t_\nu)}(-1)^\nu\cos(\tilde t_\nu\ln n).$$

Однако (ср. [2], (43)–(54), (60), (61)) имеет место

$$(34)\qquad S_1=\frac{(-1)^{\bar\nu}}{2}\sum\frac{\cos\tilde\varphi}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{N+\bar\nu}}{2}\sum\frac{\cos(\tilde\omega N+\tilde\varphi)}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{\bar\nu}}{2}\sum\frac{\operatorname{tg}(\tilde\omega/2)}{\sqrt{n}}\sin\tilde\varphi+\frac{(-1)^{N+\bar\nu+1}}{2}\sum\frac{\operatorname{tg}(\tilde\omega/2)}{\sqrt{n}}\sin(\tilde\omega N+\tilde\varphi)+O(\ln T),$$

где

$$(35)\qquad \tilde\omega=\pi\frac{\ln n}{\ln(T/2\pi)},\quad \tilde\varphi=\tilde t_{\bar\nu}\ln n,\qquad \tilde t_{\bar\nu}=\min_{T\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T+H}\{\tilde t_\nu\},\quad \tilde t_{\bar\nu+N}=\max_{T\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T+H}\{\tilde t_\nu\}.$$

Конечно (ср. [2], (70), (71))

$$(36)\qquad \left|\sum\frac{\cos\tilde\varphi}{\sqrt{n}}\right|<A(\Delta)T^\Delta\ln T,\qquad \left|\sum\frac{\cos(\tilde\omega N+\tilde\varphi)}{\sqrt{n}}\right|<A(\Delta)T^\Delta\ln T.$$

Рассмотрим последовательность

(37) $$\left\{\frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\right\},$$

где

$$\frac{\tilde{\omega}}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{\ln n}{\ln(T/2\pi)} = \frac{\pi}{4}\frac{\ln n}{\ln P_0}.$$

Так как

(38) $$\frac{d}{dn}\frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{2\pi}{\ln(T/2\pi)} - \sin\tilde{\omega}}{4n^{3/2}\cos^2(\tilde{\omega}/2)},$$

то производная обращается в нуль для значения (ср. [2], (75)–(76))

(39) $$\overset{*}{\tilde{\omega}} = \arcsin\frac{2\pi}{\ln(T/2\pi)} = \frac{2\pi}{\ln(T/2\pi)} + O\left(\frac{1}{\ln^3 T}\right).$$

Однако, в силу (35),

$$\ln\overset{*}{n} = 2 + O\left(\frac{1}{\ln^2 T}\right),$$

т.е.

(40) $$\overset{*}{n} \sim e^2, \quad T \to +\infty.$$

Значит, последовательность (37) убывает для $n \geqslant 8$.

Последовательность

(41) $$\left\{\operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2}\right\}$$

возрастает при $n < P_0$. Однако,

$$\frac{\tilde{\omega}}{2} < \frac{\pi}{4}\frac{\ln n}{\ln P_0} < \frac{\pi}{4},$$

т.е.

(42) $$\operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2} < 1, \quad n < P_0.$$

Теперь подразделим сумму (ср. [2], (78))

(43) $$C(\tilde{t}_\nu) = \sum_{8 \leqslant n < P_0} \frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}} e^{i\tilde{t}_\nu \ln n}$$

на $O(\ln T)$ частей типа

(44) $$\tilde{S}(a, b) = \sum_{a \leqslant n < b \leqslant 2a} \frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}} e^{i\tilde{t}_\nu \ln n},$$

где $b \leqslant P_0$. В силу (5), преобразования Абеля и (42) получаем

(45) $$|\tilde{S}(a, b)| < A(\Delta)(\tilde{t}_\nu)^\Delta < A(\Delta)T^\Delta,$$

т.е.

(46) $$|C(\tilde{t}_\nu)| < A(\Delta)T^\Delta \ln T.$$

Следовательно

(47) $$\left|\sum \frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\sin\tilde{\varphi}\right| < A(\Delta)T^\Delta \ln T,$$
$$\left|\sum \frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\sin(\tilde{\omega}N + \tilde{\varphi})\right| < A(\Delta)T^\Delta \ln T.$$

Теперь, из (34), в силу (36), (47) получается

Лемма 1. *В предположении* (5),

(48) $$|S_1| < A(\Delta)T^\Delta \ln T.$$

5. В этой части попробуем получить оценку суммы

(49) $$S_2 = \sum_{2 \leqslant n \leqslant M < P_0}' \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{(\tilde{t}_\nu)} \cos(\tilde{t}_\nu \ln n).$$

Сумма S_2 соответствует сумме $\tilde{W}(T, H)$ в работе [3], (26). Значит ([3], лемма 2)

(50) $$S_2 = \sum \frac{\cos\tilde{\varphi}}{\sqrt{n}} + \sum \frac{\cos(\tilde{\omega}N + \tilde{\varphi})}{\sqrt{n}} - \sum \frac{\operatorname{ctg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\sin\tilde{\varphi} + \\ + \sum \frac{\operatorname{ctg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\sin(\tilde{\omega}N + \tilde{\varphi}) + O(\ln T).$$

Последовательности

(51) $$\left\{\frac{\operatorname{ctg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\right\}, \quad \left\{\operatorname{ctg}\frac{\tilde{\omega}}{2}\right\}$$

убывают для $n \in \langle 2, P_0)$. Однако

(52) $$\operatorname{ctg}\frac{\tilde{\omega}}{2} \sim \frac{2}{\tilde{\omega}}, \quad \tilde{\omega} \to 0.$$

Следовательно, (35),

(53) $$\operatorname{ctg}\frac{\tilde{\omega}}{2} < A\ln T, \quad n \in \langle 2, T^\Delta \rangle.$$

С другой стороны, при $n\in(T^{\Delta}, P_0)$,

$$\operatorname{ctg}\frac{\tilde\omega}{2}\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\,\frac{\ln[T^{\Delta}]}{\ln P_0}<A(\Delta). \tag{54}$$

Теперь положим

$$D(\tilde t_\nu)=\sum\frac{\operatorname{ctg}(\tilde\omega/2)}{\sqrt n}e^{i\tilde t_\nu\ln n}=\sum_{2\leqslant n\leqslant T^{\Delta}}+\sum_{T^{\Delta}<n\leqslant M}=D_1+D_2. \tag{55}$$

В силу (53), для суммы D_1 получаем оценку

$$|D_1|<A(\Delta)T^{\Delta/2}\ln T. \tag{56}$$

Сумму D_2 подразделим на $O(\ln T)$ частей типа

$$\tilde S_2(a,b)=\sum_{a\leqslant n<b\leqslant 2a}\frac{\operatorname{ctg}(\tilde\omega/2)}{\sqrt n}e^{i\tilde t_\nu\ln n}. \tag{57}$$

Так как, в силу преобразования Абеля и (54),

$$|\tilde S_2(a,b)|<A(\Delta)T^{\Delta}, \tag{58}$$

то

$$|D_2|<A(\Delta)T^{\Delta}\ln T, \tag{59}$$

и, следовательно,

$$|D|<A(\Delta)T^{\Delta}\ln T. \tag{60}$$

В силу этого

$$\begin{gathered}\left|\sum\frac{\operatorname{ctg}(\tilde\omega/2)}{\sqrt n}\sin\tilde\varphi\right|<A(\Delta)T^{\Delta}\ln T,\\ \left|\sum\frac{\operatorname{ctg}(\tilde\omega/2)}{\sqrt n}\sin(\tilde\omega N+\tilde\varphi)\right|<A(\Delta)T^{\Delta}\ln T.\end{gathered} \tag{61}$$

Теперь, из (50), в силу (36), (61) получается

Лемма 2. *В предположении* (5),

$$|S_2|<A(\Delta)T^{\Delta}\ln T. \tag{62}$$

6. Мы должны еще получить оценки для следующих сумм

$$S_3=\sum_{n\;\;M<P_0}\frac{1}{\sqrt n}\sum_{(\tilde t_\nu)}(-1)^\nu\sin(\tilde t_\nu\ln n), \tag{63}$$

$$S_4=\sum_{n\leqslant M<P_0}\frac{1}{\sqrt n}\sum_{(\tilde t_\nu)}\sin(\tilde t_\nu\ln n). \tag{64}$$

Напомним, что в случае сумм S_1, S_2 мы использовали формулу (ср. [2], [3])

$$\sum_{m=0}^{N}\cos(am+\beta)=\frac{\sin\bigl(a(N+1)/2\bigr)\cos(aN/2+\beta)}{\sin(a/2)}. \tag{65}$$

В случае сумм S_3, S_4 мы используем формулу (см. например [1], стр. 57)

$$\sum_{m=0}^{N}\sin(am+\beta)=\frac{\sin\bigl(a(N+1)/2\bigr)\sin(aN/2+\beta)}{\sin(a/2)}. \tag{66}$$

Так как формула (66) приводит к членам родственным тем, которые входят в (34), (50), немедленно получается

Лемма 3. *В предположении* (5),

$$\left.\begin{matrix}|S_3|\\|S_4|\end{matrix}\right\}<A(\Delta)T^{\Delta}\ln T. \tag{67}$$

7. В этой части приведем

Доказательство теоремы 1. (A) Из (28) в силу (32) находим, что

$$\begin{aligned}-\sum_{(\tilde t_\nu)}(-1)^\nu V(\tilde t_\nu,\delta)&=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+\\&+\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{2\leqslant n<P_0}n^{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt n}\sum_{(\tilde t_\nu)}\cos(\tilde t_\nu\ln n)+\\&+\sum_{n<P_0}n^{-\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt n}\sum_{(\tilde t_\nu)}(-1)^\nu\sin(\tilde t_\nu\ln n)+O(\ln T).\end{aligned} \tag{68}$$

Применяя теперь в надлежащих местах преобразование Абеля и оценки (62), (67), получается

$$-\sum_{T\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu V(\tilde t_\nu,\delta)=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T). \tag{69}$$

Последнее соотношение является асимптотическим при (ср. (2))

$$H=(2\pi)^{-\delta}T^{\Delta+\delta}\psi(T). \tag{70}$$

(B) Из (28) в силу (32) получается

$$\begin{aligned}-\sum_{(\tilde t_\nu)}V(\tilde t_\nu,\delta)&=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n<P_0}n^{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt n}\sum_{(\tilde t_\nu)}(-1)^\nu\cos(\tilde t_\nu\ln n)+\\&+\sum_{n<P_0}n^{-\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt n}\sum_{(\tilde t_\nu)}\sin(\tilde t_\nu\ln n)+O(\ln T).\end{aligned} \tag{71}$$

Применяя преобразование Абеля и оценки (48), (67), получается

$$-\sum_{T\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T+H} V(\tilde{t}_\nu,\delta)=O(T^{\Delta}\ln T). \tag{72}$$

(C) Дальше, из (69), (72),

$$-\sum_{(\tilde{t}_{2k})}+\sum_{(\tilde{t}_{2k+1})}=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T), \tag{73}$$

$$-\sum_{(\tilde{t}_{2k})}-\sum_{(\tilde{t}_{2k+1})}=O(T^{\Delta}\ln T), \tag{74}$$

т.е.

$$\sum V(t_{2k})=-\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T), \tag{75}$$

$$\sum V(t_{2k+1})=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T). \tag{76}$$

Так как, в случае (70), соотношения (75), (76) являются асимптотическими, то отсюда следует (ср. [3]) утверждение теоремы 1.

8. В этой части приведем

Доказательство теоремы 2 и 3. Отделяя действительную часть в соотношении (18), действуя способом (20)–(26), при $t\in\langle T,T+H\rangle$ получается

$$U(t,\delta)=\sum_{n<P_0}\frac{\cos(t\ln n)}{n^{1/2+\delta}}+\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n<P_0}\frac{\cos(2\vartheta_1-t\ln n)}{n^{1/2-\delta}}+O(T^{-1/4}). \tag{77}$$

Отсюда, в силу (9), получается

Формула 2. *При* $\bar{t}_\nu\in\langle T,T+H\rangle$

$$U(\bar{t}_\nu,\delta)=1+\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{\cos(\bar{t}_\nu\ln n)}{n^{1/2+\delta}}+\frac{(-1)^\nu}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n<P_0}\frac{\cos(\bar{t}_\nu\ln n)}{n^{1/2-\delta}}+O(T^{-1/4}). \tag{78}$$

Введем функцию

$$\overline{U}(t,\delta)=U(t,\delta)-1. \tag{79}$$

Так как последовательность $\{\bar{t}_\nu\}$ родственна последовательности $\{\tilde{t}_\nu\}$, то имеет место следующее (ср. (32), (33), (48), (49), (62))

$$\sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H}1=\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{H^2}{T}\right), \tag{80}$$

$$\overline{S}_1=\sum_{n\leqslant M<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(\bar{t}_\nu)}(-1)^\nu\cos(\bar{t}_\nu\ln n)=O(T^{\Delta}\ln T), \tag{81}$$

$$\overline{S}_2=\sum_{2\leqslant n\leqslant M<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(\bar{t}_\nu)}\cos(\bar{t}_\nu\ln n)=O(T^{\Delta}\ln T). \tag{82}$$

Теперь из (78), в силу (80), (81), (82),

$$\begin{aligned}\sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\overline{U}(\bar{t}_\nu,\delta)&=\\&=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{2\leqslant n<P_0}n^{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(\bar{t}_\nu)}\cos(\bar{t}_\nu\ln n)+\\&\quad+\sum_{2\leqslant n<P_0}n^{-\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(\bar{t}_\nu)}(-1)^\nu\cos(\bar{t}_\nu\ln n)+O(\ln T)=\\&=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T),\end{aligned} \tag{83}$$

$$\sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H}\overline{U}(\bar{t}_\nu,\delta)=O(T^{\Delta}\ln T). \tag{84}$$

Сопоставляя соотношения (83), (84) способом (73)–(76) получаем, что функция $\overline{U}(t,\delta)$ имеет нуль в промежутке $Q(\delta)$, т.е. в силу (79), функция $U(t,\delta)$ достигает значение 1 в промежутке $Q(\delta)$. На этом доказательство теоремы 2 закончено.

Наконец, соотношение (11) немедленно следует из (78), в силу (80), (81), (82), т.е. теорема 3 доказана.

Литература

[1] Р. В. Хемминг, *Численные методы*, Москва 1972.

[2] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.

[3] — *Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. стр. 45–51.

[4] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[5] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 13. 2. 1976
и в исправленной форме 21. 6. 1976 (857)