Conspectus materiae tomi XXXIV, fasciculi 1

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange | Address of the Editorial Board and of the exchange | Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches | Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1977)

Positive inverse Einheiten in komplexen kubischen Zahlkörpern

von

RAINER GÜTING (Frankfurt am Main)

Herrn Professor Dr. Th. Schneider zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung. Es sei θ die reelle Nullstelle des Polynoms

$$g(x) = a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

mit ganzrationalen Koeffizienten, $a_0 \geqslant 1$ und mit negativer Diskriminante D_θ. Wir betrachten positive inverse Einheiten η im Körper $K = Q(\theta)$ (Q ist der Körper der rationalen Zahlen), das sind Einheiten η mit $\eta > 1$. Jede ganze Zahl β von K läßt sich bekanntlich in der Form

$$(1)\qquad \frac{b_0\theta^2+b_1\theta+b_2}{d}, \quad d\,|\,a_0^2D_\theta, \quad b_i \text{ ganzrational}$$

darstellen. Dabei sei d die kleinste natürliche Zahl, die diese Darstellung gewährleistet. Ist K ein reiner kubischer Zahlkörper und β eine positive inverse Einheit von K, so sind die drei Koeffizienten b_i in der Darstellung (1) positiv (vgl. [4], S. 345). In dieser Arbeit sollen für genügend große Einheiten von K — und allgemeiner für alle genügend großen ganzen Elemente von K mit fester Norm M — genauere Beziehungen zwischen den Koeffizienten angegeben werden. Dazu dienen die Sätze 1 und 2. Sie liefern für diese Elemente β von K die vollständige Darstellung (1), falls nur entweder b_0 oder die Dezimalbruchentwicklung von β mit einigen Stellen nach dem Komma bekannt ist. Daraus ergeben sich noch zwei weitere Anwendungen.

Erstens läßt sich ein praktisches Verfahren angeben, das in relativ wenigen Schritten zu einer Grundeinheit des Körpers K führt, falls nur irgendeine beliebige Einheit von K vorliegt. Die Methoden zur Berechnung von Einheiten in komplexen kubischen Zahlkörpern zerfallen ja in zwei Klassen. Die erste Klasse besteht aus Verfahren, die direkt zu Grundeinheiten führen. Die Rechnungen sind dann aber meist aufwendig. Dazu gehören die Algorithmen von G. F. Voronoi [10] und von K. K. Bilevich [2] (man vergleiche dazu die Bemerkungen von L. Bernstein in [1], S. 8). Die zweite Klasse besteht aus Verfahren, die oft schneller zu Einheiten führen, aber die Frage offen lassen, ob es sich um Grundeinheiten handelt. Das gilt für die Algorithmen von Jacobi–Perron (vgl. [1] und die dort angegebene Literatur), von G. Szekeres [9] und vom Verfasser [5]–[7]. M. Sved [8] stellte fest, daß es bis jetzt kein allgemeines Kriterium gibt, um zu entscheiden, ob eine gegebene Einheit von K Grundeinheit ist oder nicht.

Als zweite Anwendung der Sätze 1 und 2 erhalten wir simultane rationale Approximationen für die Elemente

$$\beta_1 = \frac{a_0\theta + a_1}{a_0} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{a_0\theta^2 + a_1\theta + a_2}{a_0}.$$

Für jedes Paar γ_1, γ_2 reeller Zahlen ist zwar die Existenz unendlich vieler Lösungen der Ungleichung

$$q^{1/2}\max\|q\gamma_i\| < \tfrac{2}{3} \tag{2}$$

in positiven ganzen Zahlen q gesichert — dabei bedeutet $\|\gamma\|$ für die reelle Zahl γ den Abstand zur nächsten ganzrationalen Zahl — aber der Beweis ist nicht konstruktiv ([3], S. 14). Es ist daher interessant, daß man mit Hilfe der Potenzen der Grundeinheit von K für die Zahlen β_1 und β_2 unendlich viele Lösungen der Ungleichung (2) konstruieren kann.

2. Die Darstellung positiver inverser Einheiten. Wir verwenden noch folgende Abkürzungen: $c_0 = a_0$, $c_1 = a_0\theta + a_1$, $c_2 = a_0\theta^2 + a_1\theta + a_2$. Dann sind die Konjugierten θ' und θ'' von θ Nullstellen des Polynoms $c_0x^2 + c_1x + c_2$. Sie sind wegen $D_\theta < 0$ nicht reell, folglich ist $D = 4c_0c_2 - c_1^2 > 0$.

Hilfssatz. *Ist η eine positive Zahl der Norm M im Körper K und hat η die Darstellung $\eta = (b_0\theta^2 + b_1\theta + b_2)/d$, so befriedigen die Zahlen*

$$\delta_1 = b_1c_0 - b_0c_1 \quad \textit{und} \quad \delta_2 = b_2c_0 - b_0c_2 \tag{3}$$

die Ungleichungen

$$\delta_1^2 \leqslant Ac_0/\eta, \quad \delta_2^2 \leqslant Ac_2/\eta \quad \textit{und} \quad (\delta_1\theta + \delta_2)^2 \leqslant Ag'(\theta)/\eta$$

mit $A = 4Mc_0^3d^2/D$.

Beweis. Wir setzen $\delta(x) = \delta_1 x + \delta_2$ und $h(x) = (b_0x^2 + b_1x + b_2)/d$. Dann ist

$$\delta(x) = c_0(b_0x^2 + b_1x + b_2) - b_0(c_0x^2 + c_1x + c_2) \tag{4}$$

$$= \begin{cases} c_0dh(x) - b_0\dfrac{g(x)}{x-\theta} & \text{für} \quad x \neq \theta, \\ c_0dh(\theta) - b_0g'(\theta) & \text{für} \quad x = \theta. \end{cases}$$

Daher haben wir

$$\delta(\theta) = c_0d\eta - b_0g'(\theta), \qquad \delta(\theta') = c_0dh(\theta'), \qquad \delta(\theta'') = c_0dh(\theta'').$$

Da η nach Voraussetzung die Norm M hat, gilt

$$M = h(\theta)h(\theta')h(\theta'') = \frac{\eta}{c_0^2d^2}\,\delta(\theta')\delta(\theta'') = \frac{\eta}{c_0^3d^2}\,(c_2\delta_1^2 - c_1\delta_1\delta_2 + c_0\delta_2^2). \tag{5}$$

Wir haben also die Beziehung

$$c_2\delta_1^2 - c_1\delta_1\delta_2 + c_0\delta_2^2 = \frac{Mc_0^3d^2}{\eta} = \frac{MAD}{4\eta}. \tag{6}$$

Schreibt man die linke Seite dieser Gleichung auf verschiedene Weise als Summe zweier Quadrate, so erhält man die angegebenen Ungleichungen des Hilfssatzes.

Wir wollen nun die beiden angekündigten Sätze über die Darstellung positiver inverser Einheiten von K ableiten. Der erste Satz gestattet es uns, die Darstellung (1) von η und damit η selbst zu finden, falls η nur als genügend groß vorausgesetzt werden kann und der Koeffizient b_0 in dieser Darstellung bekannt ist. Der zweite Satz liefert eine vollständige Darstellung von η in der gewünschten Form für genügend große Einheiten η, deren Zahlenwerte schon vorliegen.

Wir werden von jetzt ab die der reellen Zahl γ nächstgelegene ganzrationale Zahl mit $\langle\gamma\rangle$ bezeichnen, d.h. $\langle\gamma\rangle = [\gamma + \frac{1}{2}]$.

Satz 1. *Hat das Element η von K die Norm M und ist η größer als $B = 16\,d^2c_0\,M\max(c_0, c_2)/D$, so ist*

$$\eta = \frac{1}{d}\left(b_0\theta^2 + \left\langle\frac{b_0}{c_0}c_1\right\rangle\theta + \left\langle\frac{b_0}{c_0}c_2\right\rangle\right).$$

Beweis. Für $i = 1, 2$ gilt unter Benutzung des Hilfssatzes und der Voraussetzung über η

$$\left|b_i - \frac{b_0}{c_0}c_i\right|^2 = \frac{\delta_i^2}{c_0^2} \leqslant \frac{A}{\eta}\,\frac{\max(c_0, c_2)}{c_0^2} < \frac{A\max(c_0, c_2)}{Bc_0^2} = \frac{1}{4}.$$

Korollar zu Satz 1. *Es sei $B \leqslant k_1 < k_2$. Enthält das Intervall $[k_1, k_2]$ ein Element η von K mit der Norm M, so gibt es im abgeschlossenen Intervall*

$$I(k_1, k_2) = \left[\frac{c_0}{2g'(\theta)}\,(2dk_1 - 1 - |\theta|), \frac{c_0}{2g'(\theta)}(2dk_2 + 1 + |\theta|)\right]$$

eine natürliche Zahl n, derart daß

$$\eta = s(n) = \frac{1}{d}\left(n\theta^2 + \left\langle\frac{nc_1}{c_0}\right\rangle\theta + \left\langle\frac{nc_2}{c_0}\right\rangle\right) \tag{7}$$

ist.

Beweis. Nach Satz 1 hat η die Darstellung (7) für $n = b_0$. Aus (7) erhält man aber die Abschätzung

$$\left| s(n) - \frac{ng'(\theta)}{c_0 d} \right| \leqslant \frac{1+|\theta|}{2d}$$

und daraus folgt, daß n im angegebenen Intervall liegt.

Satz 2. *Ist η ein Element von K mit der Norm M und ist*

$$\eta > C = \frac{16Md^2c_0^2}{Dg'(\theta)} \max(c_0,\, c_0\theta^2 - c_1\theta + c_2,\, c_2\theta^2),$$

so hat η die Darstellung

$$\eta = \frac{1}{d}(\langle c_0 t\rangle \theta^2 + \langle c_1 t\rangle \theta + \langle c_2 t\rangle)$$

mit $t = d\eta/g'(\theta)$.

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Teilen.

(a) Auf Grund von (4) ist

$$b_0 = \frac{c_0 d\eta - \delta(\theta)}{g'(\theta)}. \tag{8}$$

Also ist $b_0 = \langle c_0 t\rangle$, falls $|\delta(\theta)| \leqslant \frac{1}{2} g'(\theta)$ ist. Der Hilfssatz zeigt, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn $\eta > 4A/g'(\theta)$ ist.

(b) Aus (3) und (8) ergibt sich

$$b_1 = \frac{c_1 d\eta}{g'(\theta)} + \frac{\delta_1 g'(\theta) - c_1\delta(\theta)}{c_0 g'(\theta)}.$$

Demnach gilt $b_1 = \langle c_1 t\rangle$, falls

$$|\delta_1 g'(\theta) - c_1\delta(\theta)| < \tfrac{1}{2} c_0 g'(\theta) \tag{9}$$

ist. Wir setzen

$$\delta_3 = \delta_1 g'(\theta) - c_1\delta(\theta) = \delta_1(c_2 + c_1\theta + c_0\theta^2) - c_1(\delta_1\theta + \delta_2) = \delta_1 c_3 - c_1\delta_2,$$

wobei $c_3 = c_2 + c_0\theta^2$ ist. Eliminiert man daraus δ_2 und setzt das in (6) ein, so liefert das die Gleichung

$$c_0\delta_1^2(c_3^2 - c_1^2\theta^2) + \delta_1\delta_3(c_1^2 - 2c_0c_3) + c_0\delta_3^2 = ADc_1^2/4. \tag{10}$$

Geht man jetzt wie im Hilfssatz vor und ersetzt noch c_3 durch $c_2 + c_0\theta^2$, so findet man die Ungleichung

$$\delta_3^2 \leqslant Ac_0 g'(\theta)(c_0\theta^2 - c_1\theta + c_2)/\eta. \tag{11}$$

Die Bedingung (9) ist also erfüllt, wenn die rechte Seite von (11) kleiner als $\left(\frac{1}{2}c_0 g'(\theta)\right)^2$ ist. Das ist aber der Fall, wenn

$$\eta > \frac{4A(c_0\theta^2 - c_1\theta + c_2)}{c_0 g'(\theta)}$$

ist.

(c) Wie im Teil (b) des Beweises sieht man auch, daß $b_2 = \langle c_2 t\rangle$ ist, wenn man $\eta > 4Ac_2\theta^2/(c_0 g'(\theta))$ voraussetzt.

Ersetzt man jetzt noch A durch $4Mc_0^3 d^2/D$, so ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die Sätze 1 und 2 gelten nicht unbedingt für kleine positive inverse Einheiten von K. Ist zum Beispiel $\theta = \sqrt[3]{28}$, so ist $d = 6$ und $\eta = \frac{1}{6}(\theta^2 + 4\theta + 10) \approx 5.2279$ ist eine Einheit, während die Sätze 1 und 2 die falschen Darstellungen $\frac{1}{6}(\theta^2 + 3\theta + 9)$ bzw. $\frac{1}{6}(\theta^2 + 3\theta + 10)$ liefern würden.

3. Anwendungen. Wir wollen jetzt das Korollar zu Satz 1 und Satz 2 anwenden, um im Körper K eine Grundeinheit zu finden, sofern wenigstens *eine* Einheit bekannt ist. Damit ist dann auch die Frage beantwortet, ob eine gegebene Einheit Grundeinheit ist oder nicht. Das Verfahren besteht aus zwei Teilen.

(a) Wir prüfen zunächst nach, ob es in K eine Einheit η gibt mit $B \leqslant \eta \leqslant B' = \max(B^2, C)$. Nach dem Korollar zu Satz 1 prüft man dazu für natürliche Zahlen $n \in I(B, B')$ nach, ob $s(n)$ eine Einheit ist. Findet man unter diesen Zahlen $s(n)$ keine Einheit, so geht man zum zweiten Teil des Verfahrens über. Gibt es aber eine Einheit η, so kann man mit ihrer Hilfe eine Grundeinheit finden. Ist η nämlich nicht selbst Grundeinheit, so ist η die mindestens zweite Potenz der Grundeinheit $\varepsilon > 1$. Dann gibt es aber im Intervall $[\eta, \eta^{3/2}]$ neben η noch wenigstens eine weitere Einheit. Daher muß nach dem Korollar unter den Zahlen $s(n)$ für $n \in I(\eta, \eta^{3/2})$ noch eine weitere Einheit vorkommen. Nennen wir die kleinste solche Einheit η', so ist offensichtlich $\varepsilon = \eta'/\eta$ Grundeinheit. Ist keine dieser Zahlen $s(n)$ eine Einheit, so ist $\varepsilon = \eta$ Grundeinheit.

(b) Gibt es im Intervall $[B, B']$ keine Einheit von K, so liegt auch keine Einheit im halboffenen Intervall $]1, B']$. Denn jede Einheit η mit $1 < \eta < B$ muß ja wegen $B^2 < B'$ eine ganzzahlige Potenz im Intervall $[B, B']$ haben. Wir müssen jetzt auf eine mit einer anderen Methode gefundene Einheit zurückgreifen. Dabei können wir voraussetzen, daß $\eta > 1$ ist. Die Einheit η sei die r-te Potenz der Grundeinheit $\varepsilon > B'$. Dann ist $\eta = \varepsilon^r > B'^r$, also $r < \dfrac{\log\eta}{\log B'} = \varrho$. Um ε zu finden, prüft man jetzt nach Satz 2 für $r = [\varrho], [\varrho]-1, \ldots, 2$ nacheinander, of $\sqrt[r]{\eta}$ eine Einheit ist, indem man nachrechnet, ob

$$\frac{1}{d}\left(\langle c_0 t\rangle \theta^2 + \langle c_1 t\rangle \theta + \langle c_2 t\rangle\right)$$

mit $t = d\sqrt[r]{\eta}/g'(\theta)$ die Norm 1 hat. Die erste Zahl r, für die das zutrifft, liefert die gesuchte Grundeinheit ε. Ist keine dieser Zahlen eine Einheit, so ist η selbst Grundeinheit.

Bemerkung. Es ist versucht worden, die Konstanten B und C in den Sätzen 1 und 2 möglichst klein zu machen, damit die Anzahl der Schritte im ersten Teil dieses Verfahrens nicht zu groß wird.

Die zweite Anwendung wird durch folgenden Satz präzisiert:

Satz 3. *Es sei ε die positive inverse Grundeinheit von K, und $\omega > 0$ sei beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit der folgenden Eigenschaft: Hat $\eta = \varepsilon^n$ die Darstellung $\eta = (b_0\theta^2 + b_1\theta + b_2)/d$, so haben*

$$\beta_1 = \frac{a_0\theta + a_1}{a_0} \quad \textit{und} \quad \beta_2 = \frac{a_0\theta^2 + a_1\theta + a_2}{a_0}$$

die simultanen Approximationen $(i = 1, 2)$:

$$b_0^{1/2}\|b_0\beta_i\| \leqslant \frac{2a_0 d^{3/2}}{(Dg'(\theta))^{1/2}} \max(a_0, a_0\theta^2 + a_1\theta + a_2)^{1/2}(1+\omega).$$

Beweis. Wir betrachten jetzt die Koeffizienten b_i und die Zahlen δ_i im Hilfssatz als Funktionen von n. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes gilt dann für $i = 1, 2$

$$\delta_i^2 \leqslant A\max(c_0, c_2)/\eta = 4c_0^3 d^2 \max(c_0, c_2)/(D\eta). \tag{12}$$

Aus (4) erhält man

$$c_0 d\eta \geqslant b_0 g'(\theta)(1-\varrho) \quad \text{mit} \quad \varrho = |\delta(\theta)|/(b_0 g'(\theta)). \tag{13}$$

Wählt man n genügend groß, so ist auf Grund des Hilfssatzes $|\delta(\theta)| \leqslant 1$. Wegen (4) wächst ferner b_0 mit n. Gibt man daher $\omega' > 0$ beliebig vor und wählt n hinreichend groß, so ist $\varrho \leqslant \omega'$. Mit Hilfe von (13) findet man daher die Abschätzung

$$\eta^{1/2} \geqslant b_0^{1/2}\left(\frac{g'(\theta)(1-\omega')}{c_0 d}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Aus (3), (12) und (14) folgt nun für $i = 1, 2$

$$\left|b_0\frac{c_i}{c_0} - b_i\right| = \frac{|\delta_i|}{c_0} \leqslant 2c_0^{1/2} d\left(\frac{\max(c_0, c_2)}{D\eta}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{b_0^{1/2}} 2c_0\left(\frac{d^3\max(c_0, c_2)}{Dg'(\theta)(1-\omega')}\right)^{1/2}.$$

Die rechte Seite ist für genügend große n sicher kleiner als $1/2$. Für hinreichend kleines ω' ist ferner $(1-\omega')^{-1/2} < 1+\omega$. Daraus ergibt sich die gewünschte Abschätzung, wenn man noch die c_i durch die a_i ausdrückt. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Der Satz 3 gilt natürlich auch, wenn ε nicht Grundeinheit von K ist. Dann erhält man eben entsprechend weniger simultane Approximationen für die Zahlen β_i. Die simultanen Approximationen werden offenbar am besten, wenn sich η in der Form (1) mit $d = 1$ darstellen läßt.

Ist $\theta = \sqrt[3]{m}$ für ganzrationales m, so liefert der Satz 3 simultane rationale Approximationen für θ und θ^2.

Literaturverzeichnis

[1] L. Bernstein, *The Jacobi–Perron algorithm. Its theory and application*, Lecture Notes in Mathematics, Berlin–Heidelberg–New York 1971.

[2] K. K. Bilevich, *Über Einheiten in algebraischen Körpern dritten und vierten Grades* (russisch), Mat. Sb. 40 (82), (1956), S. 123–136.

[3] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 45, Cambridge 1965.

[4] B. N. Delone und D. K. Faddeev, *The theory of irrationalities of the third degree*, Amer. Math. Soc. Transl. Math. Monographs 10 (1964).

[5] R. Güting, *Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus I*, J. Reine Angew. Math. 278/279 (1975), S. 165–173.

[6] — *Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus II*, ibid. 281 (1976), S. 184–198.

[7] — *Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus III*, ibid. 283/284 (1977), S. 384–387.

[8] M. Sved, *Units in pure cubic number fields*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. 13 (1970), S. 141–149.

[9] G. Szekeres, *Multidimensional continued fractions*, ibid. 13 (1970), S. 113–140.

[10] G. F. Voronoi, *Über eine Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus* (russisch), Dissertation, Warschau 1896.

JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
Frankfurt am Main

Eingegangen am 16. 6. 1975
und in revidierter Form am 8. 6. 1976 (728)