ACTA ARITHMETICA
XXXIII (1977)

Распределение значений аддитивных функций, II*

Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев (Владимир)

Пусть $g(n)$ вещественная аддитивная функция. Аддитивность означает, что $g(n\cdot m) = g(n)+g(m)$ при $(n, m) = 1$. Пусть, далее, $A(x)$ и $B(x)$ — вещественные функции, x — натуральное,

$$F_x\big(u, A(x), B(x)\big) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ \frac{g(n)-A(x)}{B(x)} \leqslant u}} 1.$$

Одной из основных задач вероятностной теории чисел является задача об отыскании необходимых и достаточных условий существования $A(x)$ и $B(x)$, таких что

$$F_x\big(u, A(x), B(x)\big) \to F(u) \tag{1}$$

при $x\to\infty$ во всех точках непрерывности функции распределения $F(u)$. Интересен случай когда $F(u)$, так называемая, нетривиальная функция распределения, то есть

$$F(u) \neq E_a(u) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad u \geqslant a, \\ 0, & \text{если} \quad u < a. \end{cases}$$

Закон $E_a(u)$ называется тривиальным, сосредоточенным в точке a.

Если x нецелое, то условимся считать, что $A(x) = A([x])$, $B(x) = B([x])$. Тогда $F_x\big(u, A(x), B(x)\big)$ и $F_{[x]}\big(u, A(x), B(x)\big)$ отличаются незначительно и, очевидно, одновременно имеют или не имеют предел при $x\to\infty$.

В общей постановке задача о существовании предельного распределения для $F_x\big(u, A(x), B(x)\big)$ не решена. Получен ряд результатов при дополнительных ограничениях на $A(x)$ и $B(x)$. Перечислим основные результаты:

---

* Первая часть опубликована в Acta Arithmetica, 26(1974), стр. 333–364.

1. Найдены необходимые и достаточные условия для (1) в случае $B(x)\to 1$ и произвольного $A(x)$ (см. [1], [4]).

2. Доказано (см. [4]), что если $B(x)\not\to\infty$, то можно считать $B(x)\to 1$.

3. Доказано (см. [3]), что $A(x)$ и $B(x)$ не могут расти очень быстро, если $F(u)\neq E(u)$. Точнее, доказано, что для каждой аддитивной функции $g(n)$ существует m, такое что

$$\max\big(|A(x)|,\,|B(x)|\big)\leqslant(\log x)^m.$$

4. Можно установить, что достаточно ограничиться случаем $B(x)>0$. Действительно, из определения следует

$$F_y\big(u,A(y),B(y)\big)\to F(u)\quad\text{и}\quad F_y\big(u,A(x),B(x)\big)\to F(u)$$

при $x\to\infty$, для любого $y=x+o(x)$. Но

$$F_y\big(u,A(y),B(y)\big)=$$
$$=\begin{cases}F_y\Big(u\dfrac{B(y)}{B(x)}-\dfrac{A(x)-A(y)}{B(x)},\,A(x),\,B(x)\Big), & \text{если}\quad \dfrac{B(y)}{B(x)}>0,\\[2ex] 1-F_y\Big(u\dfrac{B(y)}{B(x)}-\dfrac{A(x)-A(y)}{B(x)}-0,\,A(x),\,B(x)\Big), & \text{если}\quad \dfrac{B(y)}{B(x)}<0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $B(y)/B(x)\to 1$, $\big(A(x)-A(y)\big)/B(x)\to 0$, если $F(u)\neq\neq 1-F(-u-a-0)$ ни при каком a. Если же существует a, при котором $F(u)=1-F(-u-a-0)$, то для этого a может выполняться соотношение

$$\frac{A(x)-A(y)}{B(x)}\to a\quad\text{и}\quad\frac{B(y)}{B(x)}\to -1.$$

В этом случае после замены $A(x)$ на $A(x)+\dfrac{a}{2}B(x)$ закон становится симметричным и вместо $B(x)$ можно брать $\varepsilon(x)B(x)$, где $|\varepsilon(x)|=1$ (см. [3]).

5. Наиболее общий результат для случая $B(x)\to\infty$ получен в работе [3]. Ниже нам потребуется частный случай доказанной там теоремы 6, которую мы сформулируем так:

Теорема 6. *Для того чтобы*

$$F_x\big(u,A(x),B(x)\big)\to F(u)$$

во всех точках непрерывности нетривиальной функции распределения $F(u)$, причем $A(x)$ и $B(x)\to\infty$ таковы, что

$$(2)\qquad \varphi_x(u)\overset{\text{def}}{=}\frac{B(x^u)}{B(x)}\to\varphi(u)\quad\text{и}\quad\psi_x(u)\overset{\text{def}}{=}\frac{A(x^u)-A(x)}{B(x)}\to\psi(u)$$

равномерно по u на любом отрезке $[a,b]\subset(0,+\infty)$, где $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ непрерывны при $u\in(0,+\infty)$, необходимо и достаточно чтобы нашлось $d=\text{const.}$ такое, что

$$(3)\qquad \frac{A(x)}{B(x)}=\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|\frac{1}{p}+d+o(1),$$

где

$$\|u\|=\begin{cases}1, & \text{если}\quad u>1,\\ u, & \text{если}\quad |u|\leqslant 1,\\ -1, & \text{если}\quad u<-1,\end{cases}$$

и существовали неубывающие функции $L_l(u)$, $l=0,1,2,\ldots$, $L_l(\pm\infty)==\lim\limits_{u\to\pm\infty}L(u)$ такие, что во всех точках непрерывности $L_l(u)$

$$(4)\qquad \sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\to L_0(u),\qquad 0=L_0(-\infty)<L_0(+\infty),$$

и

$$(5)\qquad \frac{l}{(\log x)^l}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\frac{\log^l p}{p}\to L_l(u),\qquad l=1,2,3,\ldots$$

и если $L_1(u)\neq E_0(u)$, то для любого a

$$\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}+a\frac{B(x/p)}{B(x)}+\frac{A(x/p)-A(x)}{B(x)}-a\right\|^2\frac{\log p}{p}=\Omega(\log x).$$

Замечание. Последнее условие обеспечивает нетривиальность предельного распределения $F(u)$. Если выполнены только условия (3)–(5), то предельное распределение существует, но, возможно, тривиальное.

Позднее мы покажем, что вместо серии условий (5) можно ограничиться одним условием для $l=1$ и можно значительно упростить условие нетривиальности. Соответствующая теорема 2 будет сформулирована и доказана в конце этой работы.

Условия (3), (4), (5) иногда записывают в другой эквивалентной им форме. Например, условия (3), (4) эквивалентны соотношению

$$(6)\qquad \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\big(e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}-1\big)-i\xi\frac{A(x)}{B(x)}=\tau_0(\xi)+o(1)$$

равномерно по ξ при $|\xi|\leqslant c$ для любого $c=\mathrm{const}$, где $e^{\tau_0(\xi)}$ — характеристическая функция. Это, в свою очередь, означает, что выражение

$$\sum_{p\leqslant x} X_p-\frac{A(x)}{B(x)},$$

где X_p случайная величина принимающая значение $g(p)/B(x)$ с вероятностью $1/p$ и значение 0 с вероятностью $1-1/p$, имеет предельную функцию распределения, характеристическая функция которой равна $e^{\tau_0(\xi)}$. Условие (5) при $l=1$ эквивалентно условию существования предельного распределения $g(p)/B(x)$ с весом $\log p/p$, или на языке характеристических функций, условию

$$\frac{1}{\log x}\sum_{p\leqslant x} e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}\frac{\log p}{p}=\tau_1(\xi)+o(1)$$

равномерно по ξ при $|\xi|\leqslant c$ для любого c. Эквивалентность, указанных выше условий, следует из теоремы о соответствии между сходимостью последовательностей характеристических функций и функций распределения.

6. Наряду с $F_x(u,A(x),B(x))$ введем последовательность функций распределения

$$\Phi_x(u,A(x),B(x))\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)-A(x)\leqslant uB(x)}}\frac{1}{n}$$

и поставим задачу о необходимых и достаточных условиях для того чтобы

(7) $$\Phi_x(u,A(x),B(x))\to\Phi(u),\quad \text{при}\quad x\to\infty,$$

во всех точках непрерывности $\Phi(u)$. При решении этой задачи возникают примерно те же трудности, что и при нахождении условий справедливости (1). Однако, если потребовать чтобы одновременно выполнялись (1) и (7), то можно найти необходимые и достаточные условия для этого. Причем эти условия совпадают по существу с условиями теоремы 6.

Легко доказать (это будет сделано ниже), что если $\varphi_x(u)\to\varphi(u)$ и $\psi_x(u)\to\psi(u)$, то из (1) вытекает (7). Однако имеет место и обратное. Основным результатом этой работы является

Теорема 1. *Для аддитивной функции $g(n)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(A) *Существуют $A(x)$ и $B(x)$ такие, что*

$$F_x(u,A(x),B(x))\to F(u)$$

и

$$\Phi_x(u,A(x),B(x))\to\Phi(u)$$

при $x\to\infty$ во всех точках непрерывности $F(u)$ и $\Phi(u)$, причем $\Phi(u)\neq E_a(u)$ ни для какого a.

(B) *Существуют $A(x)$ и $B(x)$, непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, постоянная d, неубывающая функция $L_0(u)$, $L_0(\pm\infty)=\lim\limits_{u\to\pm\infty}L_0(u)$ такие, что при $x\to\infty$*

$$\varphi_x(t)=\frac{B(x^t)}{B(x)}\to\varphi(t),\qquad \psi_x(t)=\frac{A(x^t)-A(x)}{B(x)}\to\psi(t)$$

равномерно по t в любом отрезке $[a,b]\subset(0,+\infty)$

(4) $$L_x(u)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\to L_0(u),\qquad 0=L_0(-\infty)<L_0(+\infty),$$

во всех точках непрерывности $L_0(u)$ за исключением, быть может, точки $u=0$ и

(3) $$d(x)=\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|\frac{1}{p}-\frac{A(x)}{B(x)}\to d.$$

(C) *Существуют $A(x)$, $B(x)$, неубывающие функции $L_0(u)$, $L_1(u)$, $L_l(\pm\infty)=\lim\limits_{u\to\pm\infty}L_l(u)$ $(l=0,1)$ такие, что выполняется* (3), (4) *и*

(5′) $$\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\frac{\log p}{p}\to L_1(u)$$

во всех точках непрерывности $L_1(u)$.

I. Вначале докажем, что из (B) следует (C). Из (3) и (4), применяя теорему Хелли, получаем

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\left(e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}-1\right)-i\xi\frac{A(x)}{B(x)}=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi u}-1-i\xi\|u\|}{\|u\|^2}\,dL_0(u)+i\xi d(x)=\tau_0(\xi)+o(1)$$

равномерно по ξ при $|\xi|\leqslant c$ где c произвольная постоянная. Следовательно,

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}=\log\log x+\gamma+\tau_0(\xi)+i\xi\frac{A(x)}{B(x)}+o(1).$$

Суммирование по Абелю и условия[1] $\varphi_x(t)\to\varphi(t)$ и $\psi_x(t)\to\psi(t)$ приводят к соотношению

$$\frac{l}{(\log x)^l}\sum_{p\leqslant x}\frac{\log^l p}{p}e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}=\tau_l(\xi)+o(1),$$

а отсюда получаем (5'). Этим завершается доказательство того, что (B) ⇒ (C).

II. Доказательство того, что (B) ⇒ (A). Мы доказали, что из (B) вытекает справедливость условий теоремы 6 за исключением, быть может, условия нетривиальности, и, согласно, замечанию к этой теореме, получаем, что $F_x(u, A(x), B(x))\to F(u)$. Для соответствующей характеристической функции, поэтому, имеем

$$\tau_x(\xi)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}e^{i\xi\frac{g(n)-A(x)}{B(x)}}=\tau(\xi)+o(1).$$

Вводя характеристическую функцию

$$f_x(\xi)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\log x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(x)}{B(x)}}$$

и суммируя по Абелю, находим связь между $f_x(\xi)$ и $\tau_x(\xi)$ и так как $\tau_x(\xi)\to\tau(\xi)$, $\varphi_x(t)\to\varphi(t)$ и $\psi_x(t)\to\psi(t)$, то

$$f_x(\xi)=\int_0^1\tau_x(\xi\varphi_x(t))e^{i\xi\psi_x(t)}dt=f(\xi)+o(1).$$

Таким образом, $\Phi_x(u, A(x), B(x))\to\Phi(u)$. Для того чтобы доказать, что из (B) следует (A) осталось показать, что $\Phi(u)\neq E_a(u)$ ни для какого a, если $L_0(+\infty)>0$. Это, очевидно, следует из леммы 1, которая доказывается ниже и имеет самостоятельный интерес.

III. Для доказательства импликаций (A) ⇒ (B) и (C) ⇒ (B) достаточно показать, что $\varphi_x(t)\to\varphi(t)$ и $\psi_x(t)\to\psi(t)$. Упоминавшаяся уже лемма 1 будет полезна и для этих целей.

Лемма 1. *Для того чтобы*

$$\Phi_y(u, A(y), B(y))\to E_0(u), \tag{8}$$

где $y\to\infty$ по подпоследовательности последовательности x необходимо и достаточно чтобы

$$\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|^2\frac{1}{p}\to 0 \quad \text{и} \quad \frac{A(y)}{B(y)}=\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|\frac{1}{p}+o(1). \tag{9}$$

[1] Из этих условий и непрерывности $\varphi(u)$ и $\psi(u)$, легко следует (см. стр. 344), что $\varphi(u)=u^\varrho$ и $\psi(u)=c(1-u^\varrho)$, где $\varrho\geqslant 0$, $c=\text{const}$.

Доказательство. Из условия (8), получаем

$$f_y(\xi)=\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}}=1+O(\varepsilon_1(y)) \tag{10}$$

равномерно по ξ в любой области $|\xi|\leqslant c$, причем, $\varepsilon_1(y)\to 0$ при $y\to\infty$.

Из этого соотношения, переходя к вещественным частям, получим

$$\frac{1}{(\log y)^r\log y^\nu}\sum_{n\leqslant y^\nu}\frac{\log^r n}{n}\left(1-\cos\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}\right)=O\left(\sqrt{\varepsilon_1(y)}\right)\qquad (r=0,1)$$

равномерно по ξ,ν при $|\xi|\leqslant c$, $\sqrt{\varepsilon_1(y)}\leqslant\nu\leqslant 1$. Отсюда, если учесть что $|1-e^{i\varphi}|=2(1-\cos\varphi)$ и применить неравенство Шварца, получим

$$\frac{1}{\log y^\nu}\sum_{n\leqslant y^\nu}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}}=1+o(1) \tag{11}$$

и, аналогично,

$$\frac{2}{\log^2 y}\sum_{n\leqslant y}\frac{\log n}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}}=1+o(1)$$

при $y\to\infty$.

Левую часть последнего равенства можно преобразовать следующим образом

$$\frac{2}{\log^2 y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}}\sum_{p^\alpha\| n}\log p^\alpha=$$

$$=\frac{2}{\log^2 y}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p}\log\frac{y}{p}e^{i\xi\frac{g(p)}{B(y)}}\frac{1}{\log(y/p)}\sum_{n\leqslant y/p}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}}+o(1).$$

Используя (11), получим соотношение

$$\frac{2}{\log^2 y}\sum_{p\leqslant y}\left(1-\cos\xi\frac{g(p)}{B(y)}\right)\frac{\log p}{p}\log\frac{y}{p}=o(1),$$

из которого следует, что

$$\frac{1}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\left(1-\cos\xi\frac{g(p)}{B(y)}\right)\frac{\log p}{p}=\varepsilon_2(y), \tag{12}$$

где $\varepsilon_2(y)\to 0$ при $y\to\infty$. Покажем, что последнее эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|^2\frac{\log p}{p}=\varepsilon_3(y)\to 0 \quad \text{при} \quad y\to\infty. \tag{13}$$

Из (13), очевидным образом, следует (12). Для доказательства обратного соотношения, при $|g(p)| < B(y)$, воспользуемся неравенством $1-\cos\varphi \geqslant \frac{8}{\pi^2}\varphi^2$, справедливым, если $|\varphi| < \pi/2$, а ту часть суммы в которой $|g(p)| \geqslant B(y)$, проинтегрируем по ξ от 0 до 2 и поделим на 2. Получим

$$\frac{8}{\pi^2}\frac{\xi^2}{\log y}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ g(p)<B(y)}}\left(\frac{g(p)}{B(y)}\right)^2\frac{\log p}{p} \leqslant \varepsilon_2(y)$$

и

$$\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ |g(p)|\geqslant B(y)}}\left(1-\frac{\sin 2\frac{g(p)}{B(y)}}{2\frac{g(p)}{B(y)}}\right)\frac{\log p}{p} \leqslant \varepsilon_2(y).$$

Отсюда легко следует (13). Из (9) также следует (13).

Введем урезанную аддитивную функцию $g_z(n)$, такую что

$$g_z(p^\alpha) = \begin{cases} \dfrac{g(p^\alpha)}{B(y)}, & \text{если} \quad p \leqslant z,\\ 0, & \text{если} \quad p > z.\end{cases}$$

Покажем, что существует $z \leqslant y$, для которого

$$\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)}{B(y)}} = \frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi g_z(n)} + o(1).$$

Действительно,

$$\frac{1}{\log y}\left|\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}\left(e^{i\xi\frac{g(n)}{B(y)}} - e^{i\xi g_z(n)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\log y}\left(\sum\nolimits_1\frac{2}{n} + \sum\nolimits_2\frac{2}{n} + \sum\nolimits_3\frac{a(n)}{n}\right),$$

где в $\sum_1$ суммирование распространено по тем $n \leqslant y$ для которых $\exists p\colon p > z$, $p\|n$, $|g(p)| > B(y)\left(\varepsilon_3(y)\right)^{1/4}$, в $\sum_2$ по $n \leqslant y$ таким, что $\exists p > z$, $p^2|n$ и наконец в $\sum_3$ оставшиеся $n \leqslant y$, причем,

$$a(n) = \left|\sum_{\substack{p\|n,\ p>z\\ |g(p)|<B(y)(\varepsilon_3(y))^{1/4}}}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|\right| \leqslant \left(\varepsilon_3(y)\right)^{1/4}\frac{\log y}{\log z}.$$

Оценим каждую из полученных сумм:

$$\sum\nolimits_1\frac{2}{n} \leqslant \frac{4}{\sqrt{\varepsilon_3(y)}}\frac{\log y}{\log z}\sum_{z<p\leqslant y}\frac{\log p}{p}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|^2 \leqslant 4\frac{\log^2 y}{\log z}\sqrt{\varepsilon_3(z)},$$

$$\sum\nolimits_2\frac{2}{n} \leqslant 4\sum_{z<p^2\leqslant y}\frac{1}{p^2}\log y \leqslant 4\frac{\log y}{\log z},$$

$$\sum\nolimits_3\frac{\alpha(n)}{n} \leqslant \left(\varepsilon_3(y)\right)^{1/4}\frac{\log^2 y}{\log z}.$$

При оценке $\sum_1$ использовалось равенство (13). Таким образом, из приведенных оценок видно, что z можно выбрать так чтобы $\log z/\log y \to 0$, $z\to\infty$, при $y\to\infty$ и

$$(13') \qquad \frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)}{B(y)}} = \frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}e^{i\xi g_z(n)}\frac{1}{n} + o(1).$$

Аддитивную функцию $g_z(n)$ называют урезанной. Исследование поведения

$$\frac{1}{y}\sum_{n\leqslant y}e^{i\xi g_z(n)}$$

при $y\to\infty$ подробно проведено в работе [5]. В данном случае задача проще из-за присутствия множителя $1/n$.

Из леммы 1 работы [5] следует, что

$$\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi g_z(n)} = \prod_{p\leqslant z}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi\frac{g(p^r)}{B(y)}} - e^{i\xi\frac{g(p^{r-1})}{B(y)}}}{p^r}\right) + o(1).$$

Так как $B(y)\to\infty$ и в силу (12)

$$\sum_{z<p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(e^{i\xi\frac{g(p)}{B(y)}}-1\right) = O\left(\sqrt{\sum_{z<p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(1-\cos\xi\frac{g(p)}{B(y)}\right)\sum_{z<p\leqslant y}\frac{1}{p}}\right) =$$

$$= O\left(\sqrt{\log\frac{\log y}{\log z}\frac{1}{\log z}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p}\left(1-\cos\xi\frac{g(p)}{B(y)}\right)}\right) = o(1)$$

при $z \geqslant y^{\sqrt{\varepsilon_3(y)}}$, то предыдущее соотношение можно записать в следующем виде

$$\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi g_z(n)} = \exp\left[\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(e^{i\xi\frac{g(p)}{B(y)}}-1\right)\right] + o(1)$$

и, следовательно, учитывая (10), (13′) получаем

$$f_y(\xi) = \exp\left[\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(e^{i\xi\frac{g(p)}{B(y)}}-1\right)-i\xi\frac{A(y)}{B(y)}\right]+o(1) = 1+o(1)$$

или

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(e^{i\xi\frac{g(p)}{B(y)}}-1\right)-i\xi\frac{A(y)}{B(y)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi u}-1-i\xi\|u\|}{\|u\|^2}\, d\sum_{\substack{p\leqslant y\\ g(p)\leqslant uB(y)}}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|^2\frac{1}{p}+$$

$$+i\xi\left(\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|\frac{1}{p}-\frac{A(y)}{B(y)}\right) = o(1).$$

Из этого равенства следует утверждение леммы, если применить теорему из [2], стр. 634. В данном случае можно было бы обойтись без использования столь сильного факта. Для этого достаточно провести рассуждения аналогичные использованным при выводе из (12) соотношения (13).

Замечание. Если выполнены условия (9), то точно также можно доказать, что и $F(u, A(y), B(y))\to E_0(u)$.

Лемма 1 позволяет вывести ряд необходимых условий и в том случае, когда $\Phi(u)$ — нетривиальное предельное распределение.

Лемма 2. *Если $\Phi_x(u, A(x), B(x))\to\Phi(u)$ при $x\to\infty$ во всех точках непрерывности $\Phi(u)$ и $\Phi(u)$ собственное предельное распределение, то*

$$0<c_1\leqslant\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\leqslant c_2,\qquad \frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)|\leqslant B(x)}}\frac{g(p)}{B(x)}\frac{1}{p}+O(1)$$

равномерно по x и для любой последовательности $\delta(y)$, $\delta(y)\to\infty$, при $y\to\infty$

$$\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{\delta(y)B(y)}\right\|^2\frac{1}{p}\to 0.$$

Доказательство. Существование c_1 непосредственно следует из леммы 1.

Пусть $\delta(y)$ произвольная последовательность стремящаяся к бесконечности при $y\to\infty$, тогда

$$\Phi_y(u, A(y), \delta(y)B(y))\to E_0(u) = \begin{cases}1, & \text{при}\quad u\geqslant 0,\\ 0, & \text{при}\quad u<0,\end{cases}$$

поэтому из леммы 1 следует последнее утверждение леммы 2, а также соотношение

$$(14)\qquad \frac{A(y)}{\delta(y)B(y)} = \sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{\delta(y)B(y)}\right\|\frac{1}{p}+o(1).$$

Предположим, что c_2 не существует, тогда найдется последовательность $y\to\infty$ такая, что

$$\delta^2(y) = \sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(y)}\right\|^2\frac{1}{p}\to\infty.$$

Тогда по доказанному

$$\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{\delta(y)B(y)}\right\|^2\frac{1}{p}\to 0,$$

с другой стороны,

$$\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{\delta(y)B(y)}\right\|^2\frac{1}{p}\geqslant\frac{1}{\delta^2(y)}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ |g(p)|<B(y)}}\frac{g^2(p)}{B^2(y)}\frac{1}{p}+\frac{1}{\delta^2(y)}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ |g(p)|<B(y)}}\frac{1}{p} = 1.$$

Из полученного противоречия следует существование c_2. Соотношение для $A(x)/B(x)$ из доказанного неравенства и из (14) получается следующим образом. Заметим, что

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)|\geqslant B(x)}}\frac{1}{p}\leqslant\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\leqslant c_2.$$

Следовательно, соотношение (14) можно записать в следующем виде

$$\frac{A(x)}{\delta(x)B(x)}-\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)|<B(x)}}\frac{1}{p}\frac{g(p)}{B(x)\delta(x)} = O(1).$$

И так как $\delta(x)$ произвольная стремящаяся к бесконечности последовательность, то отсюда следует нужное соотношение.

Лемма 3. *Если выполнены условия предыдущей леммы, то*

$$\varphi_x(v) = \frac{B(x^v)}{B(x)} = O(1)\quad\text{и}\quad \psi_x(v) = \frac{A(x^v)-A(x)}{B(x)} = O(1)$$

равномерно по v соответственно при $0\leqslant v\leqslant 1$ и $a\leqslant v\leqslant 1$, где $[a,1]\subset(0,1]$.

Доказательство. Если $\varphi_x(v)$ не ограничена, то найдутся последовательность $y\to\infty$ и $0\leqslant v = v(y)\leqslant 1$, такие что $\varphi_y(v(y))\to\infty$ при

$y\to\infty$. Но тогда $\Phi_y\big(u, B(y^{\tau(y)}), A(y)\big)\to E_0(u)$ при $y\to\infty$ и из леммы 1 вытекает, что

$$\sum_{p\leqslant y^{\tau(y)}}\left\|\frac{g(p)}{B(y^{\tau(y)})}\right\|^2\frac{1}{p}\leqslant\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(y^{\tau(y)})}\right\|^2\frac{1}{p}\to 0.$$

То есть, $\Phi_{y^\tau}\big(u, A'(y^{\tau(y)}), B(y^{\tau(y)})\big)\to E_0(u)$, что противоречит предположению о нетривиальности $\Phi(u)$. Для доказательства второй части используем лемму 2. Получим

$$\psi_x(v) = O\Bigg(\sum_{x^v<p\leqslant x}\frac{1}{p}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\| + \sum_{p\leqslant x^v}\frac{1}{p}\left\|\frac{g(p)}{B(x^v)}\right\|^2+1\Bigg) =$$
$$= O\Bigg(\sqrt{\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\sum_{x^v\leqslant p\leqslant x}\frac{1}{p}}+1\Bigg) = O\Bigg(\sqrt{\log\frac{1}{v}}+1\Bigg).$$

Отсюда следует равномерная ограниченность $\psi_x(v)$ на отрезках указанного вида.

Из леммы 3 следует

Лемма 4. *Пусть, по прежнему, $\Phi_x\big(u, A(x), B(x)\big)\to\Phi(u)$, распределение $\Phi(u)$ нетривиальное, тогда для любой последовательности y существует подпоследовательность y_1 и непрерывные функции $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ такие что $\varphi_{y_1}(v)\to\varphi(v)$, $\psi_{y_1}(v)\to\psi(v)$, при $y_1\to\infty$ равномерно по v на любом отрезке $[\alpha, 1]\subset(0,1]$. Причем $\varphi(v)\neq 0$ для всех $v\in(0,1]$.*

Доказательство. Пусть E множество рациональных чисел на $(0,1]$. Функции $\varphi_x(v)$ и $\psi_x(v)$ на любом $[\alpha, 1]$ ограничены одним и тем же числом K, вообще говоря, зависящим от α, то есть, $|\varphi_x(v)|\leqslant K$ и $|\psi_x(v)|\leqslant K$ для всех x и $v\in[\alpha,1]$. Следовательно, существует последовательность y_1 (см. лемму 1, [6], стр. 207), такая что $\varphi_{y_1}(v)\to\varphi(v)$ и $\psi_{y_1}(v)\to\psi(v)$ для всех $v\in E$. Покажем, что эти пределы существуют для любого $v_0\in(0,1]$.

Из условий леммы мы имеем

$$\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}} = f(\xi)+o(1).$$

Следовательно, если учесть, что

$$\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y^{v+\varepsilon}}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}}-\frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant y^v}\frac{1}{n}e^{i\xi\frac{g(n)-A(y)}{B(y)}} = O(\varepsilon),$$

то получим

$$(15)\qquad (v+\varepsilon)f\big(\xi\varphi_y(v+\varepsilon)\big)e^{i\xi\psi_y(v+\varepsilon)}-vf\big(\xi\varphi_y(v)\big)e^{i\xi\psi_y(v)} = O(\varepsilon).$$

Рассмотрим это соотношение при $v=v_0\notin E$. Предположим, что $\varphi_{y_1}(v_0)$ и $\psi_{y_1}(v_0)$ не имеют пределов при $y_1\to\infty$. Тогда существуют подпоследовательности y' и y'', такие что, например, $\lim\limits_{y'\to\infty}\varphi_{y'}(v_0) = c_0 > c_1 = \lim\limits_{y''\to\infty}\varphi_{y''}(v_0)$. Обозначим соответствующие пределы для $\psi_y(v_0)$ через b_0 и b_1. Возьмем ε таким чтобы $v_0+\varepsilon\in E$. Имеем при $y'\to\infty$

$$(v_0+\varepsilon)f\big(\xi\varphi(v_0+\varepsilon)\big)e^{i\xi\psi(v_0+\varepsilon)}-v_0f(\xi c_0)e^{i\xi b_0} = O(\varepsilon).$$

Аналогичное соотношение имеет место и при $y''\to\infty$. Сравнивая их получим, в силу произвольности $\varepsilon>0$,

$$f(\xi c_0)e^{i\xi b_0} = f(\xi c_1)e^{i\xi b_1}$$

или

$$f(\xi) = f\left(\xi\frac{c_1}{c_0}\right)e^{i\xi\frac{b_1-b_0}{c_1}}.$$

Напомним, что $c_0>c_1>0$, то есть, $0<c_1/c_0<1$. И, так как это равенство справедливо при любом ξ, применив его несколько раз, получим

$$|f(\xi)| = \left|f\left(\xi\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^n\right)\right|.$$

Следовательно, в силу произвольности n, $|f(\xi)|\equiv 1$, а это возможно лишь тогда, когда $f(\xi) = e^{i\xi a}$, то есть $\Phi(u)$ — тривиальное предельное распределение. Из полученного противоречия следует, что $\varphi_{y_1}(v_0)\to\varphi(v_0)$ для любого $v_0\in(0,1]$. Аналогично доказывается для $\psi_{y_1}(v_0)$.

Соотношение (15) играет основную роль и при доказательстве равномерной сходимости. Предположим, что на каком-нибудь отрезке $[\alpha_0, 1]\subset(0,1]$ $\varphi_{y_1}(v)\to\varphi(v)$ не равномерно. Тогда найдется последовательность $v_l\to v_0$, $\alpha_0\leqslant v_l\leqslant 1$ и подпоследовательность y_l последовательности y_1 такие, что $\varphi_{y_l}(v_l)\to c = \varphi(v_0)$. И пусть $\psi_{y_l}(v_l)\to b_1$ при $l\to\infty$. Применим соотношение (15). Получим

$$f(\xi c)e^{i\xi b_1} = f\big(\xi\varphi(v_0)\big)e^{i\xi\psi(v_0)}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, придем к противоречию.

Аналогично доказывается непрерывность $\varphi(v)$ и $\psi(v)$. Докажем последнее утверждение леммы. Пусть $\varphi(v_0) = 0$, $0<v_0<1$, а $\varphi(v_0+\varepsilon)\neq 0$ для любого $\varepsilon>0$. Существование такого v_0, если $\varphi(v)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $(0,1]$, следует из непрерывности $\varphi(v)$ и равенства $\varphi(1) = 1$. Тогда

$$B(y^{v_0})/B(y^{v_0+\varepsilon})\to\varphi(v_0)/\varphi(v_0+\varepsilon) = 0$$

и, следовательно,

$$F_{y^{v_0}}\big(u, A(y^{v_0}), B(y^{v_0+\varepsilon})\big)\to E_0(u).$$

Из леммы 1 имеем

$$0 \leqslant c_1 \leqslant \sum_{p \leqslant y^{v_0+\varepsilon}} \left\| \frac{g(p)}{B(y^{v_0+\varepsilon})} \right\|^2 \frac{1}{p} \leqslant 2 \log \frac{v_0+\varepsilon}{v_0} + \sum_{p \leqslant y^{v_0}} \left\| \frac{g(p)}{B(y^{v_0+\varepsilon})} \right\|^2 \frac{1}{p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{v_0} + o(1).$$

Получаем противоречие, так как $\varepsilon > 0$ любое.

IV. Доказательство (A) $\Rightarrow$ (C): Имеем

$$F\big(u, A(x), B(x)\big) \to F(u) \quad \text{и} \quad \Phi\big(u, A(x), B(x)\big) \to \Phi(u).$$

Перейдем к характеристическим функциям. Получим

$$(16) \qquad \tau_x(\xi) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} e^{i\xi \frac{g(n)-A(x)}{B(x)}} = \tau(\xi) + o(1),$$

$$(17) \qquad f_x(\xi) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} e^{i\xi \frac{g(n)-A(x)}{B(x)}} = f(\xi) + o(1)$$

равномерно по ξ в любой области вида $|\xi| \leqslant c$. Применяя суммирование по Абелю, находим

$$\frac{v}{\log x^v} \sum_{n \leqslant x^v} \frac{1}{n} e^{i\xi \frac{g(n)-A(x)}{B(x)}} = \int_0^v \frac{1}{x^t} \sum_{n \leqslant x^t} e^{i\xi \frac{g(n)-A(x)}{B(x)}} dt + o(1).$$

Или, если применить (16) и (17), то

$$(18) \qquad vf\big(\xi\varphi_x(v)\big) e^{i\xi\psi_x(v)} = \int_0^v \tau\big(\xi\varphi_x(t)\big) e^{i\xi\psi_x(t)} dt + o(1).$$

Возьмем последовательность y, по которой $\varphi_y(v) \to \varphi(v)$ и $\psi_y(v) \to \psi(v)$ при $y \to \infty$. Тогда

$$vf\big(\xi\varphi(v)\big) e^{i\xi\psi(v)} = \int_0^v \tau\big(\xi\varphi(t)\big) e^{i\xi\psi(t)} dt.$$

Теорема будет доказана, если показать, что $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ не зависят от выбора последовательностей y, то есть однозначно определяются через $\tau(\xi)$ и $f(\xi)$.

Имеем

$$v^2 \big|f\big(\xi\varphi(v)\big)\big|^2 = \int_0^v \tau\big(\xi\varphi(t)\big) e^{i\xi\psi(t)} dt \int_0^v \overline{\tau\big(\xi\varphi(t)\big)} e^{-i\xi\psi(t)} dt.$$

Причем правая часть дифференцируемая по v функция.

Следовательно,

$$2v\big|f\big(\xi\varphi(v)\big)\big|^2 + 2v^2\big|f\big(\xi\varphi(v)\big)\big| \Big(\big|f\big(\xi\varphi(v)\big)\big|\Big)'_v = 2v \operatorname{Re} \overline{\tau\big(\xi\varphi(v)\big)} f\big(\xi\varphi(v)\big).$$

Таким образом,

$$(19) \qquad \Big(\big|f\big(\xi\varphi(v)\big)\big|\Big)'_v = \frac{b\big(\xi\varphi(v)\big)}{v}, \quad \text{где} \quad b(\xi) = \frac{\operatorname{Re}\overline{\tau(\xi)} f(\xi) - |f(\xi)|^2}{|f(\xi)|}.$$

Если $b(\xi) \equiv 0$, тогда $\big|f\big(\xi\varphi(v)\big)\big| = d(\xi)$ и отсюда следует, что $\varphi(v) \equiv 1$. Действительно, если бы $\varphi(v) \not\equiv 1$, то нашлось бы $0 < q < 1$ такое что $|f(\xi)| = |f(\xi q)|$. А это, как уже отмечалось при доказательстве леммы 4, приводит к противоречию с предположением о нетривиальности распределения $\Phi(u)$. Следовательно, если $b(\xi) \equiv 0$, то $\varphi(v) \equiv 1$ на $(0, 1]$. Равенство (19) можно записать в следующем виде

$$(20) \qquad \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\left|f\left(\xi \frac{\varphi(v+\Delta v)}{\varphi(v)}\right)\right| - |f(\xi)|}{\Delta v} = \frac{b(\xi)}{v},$$

где $b(\xi) \not\equiv 0$, поэтому, в силу непрерывности $b(\xi)$, найдется отрезок $[\xi_1, \xi_2]$, $\xi_1 < \xi_2$, такой, что $b(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. Покажем, что $\varphi(v)$ и $|f(\xi)|$ монотонные функции соответственно для $0 < v < 1$ и $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Действительно, если бы $\varphi(v)$ не была бы монотонной на $(0, 1)$, тогда нашелся бы отрезок $[u_1, u_2]$, $u_1 < u_2$, $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$. Тогда либо $\varphi(v) \equiv c$ для $v \in [u_1, u_2]$, либо $\varphi(v)$ принимает наибольшее или наименьшее значение в точке $v_0 \in (u_1, u_2)$. В обоих случаях найдется $v_0 \in (u_1, u_2)$, в которой левая часть в (20) равна нулю, что невозможно, так как $b(\xi) \neq 0$. Точно так же доказывается монотонность $|f(\xi)|$ для $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Следовательно, функции $\varphi(v)$ и $|f(\xi)|$ почти всюду дифференцируемы соответственно на $(0, 1]$ и $[\xi_1, \xi_2]$. Возьмем точку ξ_0, в которой $|f(\xi)|'_\xi \neq 0$. Существование такого ξ_0 будет доказано позже. Левую часть равенства (20) можно записать следующим образом

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\left|f\left(\xi_0 + \xi_0\left(\frac{\varphi(v+\Delta v)}{\varphi(v)} - 1\right)\right)\right| - |f(\xi_0)|}{\xi_0\left(\frac{\varphi(v+\Delta v)}{\varphi(v)} - 1\right)} \cdot \frac{\xi_0}{\varphi(v)} \cdot \frac{\varphi(v+\Delta v) - \varphi(v)}{\Delta v} =$$

$$= |f(\xi)|'_\xi\big|_{\xi=\xi_0} \cdot \xi_0 \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}.$$

Отсюда, в частности, следует существование точки ξ_0, в которой $|f(\xi)|'_\xi \neq 0$, так как $b(\xi) \neq 0$ при $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ и $\varphi(v)$ почти всюду имеет производную.

Таким образом, из последнего равенства и (20) получаем

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = \frac{c}{v}, \quad c \neq 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Следовательно, во втором случае, то есть когда $b(\xi) \not\equiv 0, \varphi(v) = v^{\varrho}$, где $\varrho > 0$ и ϱ — не зависит от выбора последовательности y, а однозначно определяется $f(\xi)$ и $\tau(\xi)$.

Чтобы доказать аналогичный факт для $\psi_x(v)$, рассмотрим две подпоследовательности, для которых $\psi_y(v) \to \psi_1(v)$ и $\psi_z(v) \to \psi_2(v)$. Тогда из (18), учитывая, что $\varphi_x(v) \to v^{\varrho}$, находим

$$e^{i\xi[\psi_1(v)-\psi_2(v)]} = \frac{\int\limits_0^v \tau(\xi t^{\varrho}) e^{i\xi\psi_1(t)} dt}{\int\limits_0^v \tau(\xi t^{\varrho}) e^{i\xi\psi_2(t)} dt}.$$

Правая часть дифференцируемая по v функция, следовательно, и левая так же дифференцируемая функция. Беря производную от обеих частей и используя (18), получим

$$e^{i\xi[\psi_1(v)-\psi_2(v)]} i\xi [\psi_1(v)-\psi_2(v)]'_v = 0.$$

То есть, $\psi_1(v)-\psi_2(v) \equiv c$ и так как $\psi_1(1) = \psi_2(1) = 0$, обе функции непрерывные, то $\psi_1(v) \equiv \psi_2(v)$.

Таким образом, доказано, что из (A) следует (B) и (C).

V. Докажем, что из (C) следует (B). Ещё раз отметим, что здесь будет показано, что серию условий (5) в теореме 6 работы [3] можно заменить одним условием при $l = 1$. Доказательство будет проводиться по той же схеме, что и при выводе (B) из (A).

Лемма 5. *Если существуют функции $A(x)$, $B(x)$ и неубывающая функция $L_0(u)$ такие, что $L_0(\pm\infty) = \lim\limits_{u\to\pm\infty} L_0(u)$ и*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}} \left\| \frac{g(p)}{B(x)} \right\|^2 \frac{1}{p} \to L_0(u), \quad 0 = L_0(-\infty) < L_0(+\infty), \tag{4}$$

во всех точках непрерывности $L_0(u)$ и

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{p\leqslant x} \left\| \frac{g(p)}{B(x)} \right\| \frac{1}{p} + d + o(1), \tag{3}$$

тогда $\varphi_x(v) = \dfrac{B(x^v)}{B(x)}$, $\psi_x(v) = \dfrac{A(x^v)-A(x)}{B(x)}$ равномерно ограничены на любом $[a,1] \subset (0,1]$ и для любой последовательности y найдется подпоследовательность z такая, что существуют непрерывные функции $\varphi(v), \psi(v)$ для которых $\varphi_z(v) \to \varphi(v)$, $\psi_z(v) \to \psi(v)$ равномерно на любом $[a,1] \subset (0,1]$.

Доказательство. Покажем, что для любой функции $\delta(y) \to \infty$ при $y \to \infty$

$$\sum_{p\leqslant y} \left\| \frac{g(p)}{\delta(y)B(y)} \right\|^2 \frac{1}{p} \to 0.$$

Действительно, из условия (4) следует

$$\sum_{\substack{p\leqslant y\\ |g(p)| > (\delta(y))^{1/2}B(y)}} \left\| \frac{g(p)}{B(y)} \right\|^2 \frac{1}{p} \leqslant L_0(+\infty) - L_0(u_0) - L_0(-\infty) + L_0(-u_0) + o(1),$$

справедливое для любой точки непрерывности u_0 функции $L_0(u)$. Отсюда, так как $\lim\limits_{u_0\to\pm\infty} L_0(u_0) = L_0(\pm\infty)$, следует требуемое соотношение. Далее поступаем так же как при доказательстве леммы 3. То есть, предположим что $\varphi_x(v)$ не является равномерно ограниченной по x и v. И придем к противоречию, так как $L_0(+\infty) > 0$. Равномерная ограниченность $\psi_x(v)$ по x и v следует из (3). Чтобы доказать существование функций $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ достаточно получить соотношение аналогичное (15). Из (3) и (4) следует

$$\sum_{p\leqslant x^u} \frac{e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}-1}{p} - i\xi\frac{A(x^u)}{B(x)} = \tau_0\big(\xi\varphi_x(u)\big) + o(1).$$

Следовательно,

$$\tau_0\big(\xi\varphi_x(u)\big) + i\xi\psi_x(u) - \tau_0\big(\xi\varphi_x(u+\varepsilon)\big) - i\xi\psi_x(u+\varepsilon) = O(\varepsilon) + o(1).$$

Обозначим $\mu(\xi) = \operatorname{Re}\tau_0(\xi)$, тогда, в частности,

$$\mu\big(\xi\varphi_x(u+\varepsilon)\big) - \mu\big(\xi\varphi_x(u)\big) = O(\varepsilon).$$

Причем, $\mu(\xi) \not\equiv 0$. В противном случае,

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1-\cos\xi\dfrac{g(p)}{B(x)}}{p} \to 0,$$

а отсюда следует, что

$$\sum_{p\leqslant x} \left\| \frac{g(p)}{B(x)} \right\|^2 \frac{1}{p} \to 0, \quad \text{при} \quad x\to\infty,$$

что противоречит условию $L_0(+\infty) > 0$. Дальнейшие рассуждения совпадают с аналогичными в лемме 4. Предполагая противное, получим, что $\mu(\xi) \equiv 0$, а это противоречит условию $L_0(+\infty) > 0$.

Лемма 6. *Если кроме условий* (3) *и* (4) *справедливо*

$$(5') \qquad \frac{1}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\frac{\log p}{p}\to L_1(u)$$

во всех точках непрерывности, неубывающей функции $L_1(u)$, $L_1(\pm\infty) = \lim\limits_{u\to\pm\infty} L_1(u)$, *то* $\varphi_x(u)\to\varphi(u) = u^{\varrho}, \varrho\geqslant 0$, $\psi_x(u)\to\psi(u) = c(1-u^{\varrho})$ *равномерно по* u *на любом* $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$. *Причем,* $L_1(u) = E_0(u)$ *тогда и только тогда когда* $\varrho = 0$.

Доказательство. Из (3) и (4) следует, что

$$\sum_{p\leqslant x^v}\frac{e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}}-1}{p}-i\xi\frac{A(x^v)}{B(x)} = \tau_0\big(\xi\varphi_x(v)\big)+o(1),$$

а из (5) при $l = 1$

$$\frac{1}{\log x^v}\sum_{p\leqslant x^v}\frac{\log p}{p}e^{i\xi\frac{g(p)}{B(x)}} = \tau_1\big(\xi\varphi_x(v)\big)+o(1).$$

С помощью суммирования по Абелю, получим

$$(21)\qquad \tau_1\big(\xi\varphi_x(v)\big)-\tau_0\big(\xi\varphi_x(v)\big)-i\xi\psi_x(v) = 1-\frac{1}{v}\int_0^v\big[\tau_0\big(\xi\varphi_x(t)\big)+i\xi\psi_x(t)\big]dt+o(1).$$

Возьмем последовательность $y\to\infty$, по которой

$$\varphi_x(v)\to\varphi(v),\qquad \psi_x(v)\to\psi(v).$$

Обозначим $\lambda(\xi) = \operatorname{Re}\tau_1(\xi)$, $\mu(\xi) = \operatorname{Re}\tau_0(\xi)$, тогда

$$v\big[\lambda\big(\xi\varphi(v)\big)-\mu\big(\xi\varphi(v)\big)\big] = v-\int_0^v\mu\big(\xi\varphi(t)\big)dt.$$

Правая часть дифференцируемая по v, следовательно,

$$(22)\qquad \lambda\big(\xi\varphi(v)\big)-\mu\big(\xi\varphi(v)\big)+v\big[\lambda\big(\xi\varphi(v)\big)-\mu\big(\xi\varphi(v)\big)\big]'_v = 1-\mu\big(\xi\varphi(v)\big)$$

или

$$\big[\lambda\big(\xi\varphi(v)\big)-\mu\big(\xi\varphi(v)\big)\big]'_v = \frac{1-\lambda\big(\xi\varphi(v)\big)}{v}.$$

Пусть $b(\xi) = 1-\lambda(\xi)$. Если $b(\xi)\equiv 0$, то

$$\big[\lambda\big(\xi\varphi(v)\big)-\mu\big(\xi\varphi(v)\big)\big]'_v = 0,$$

то есть,

$$\lambda\big(\xi\varphi(v)\big)-\mu\big(\xi\varphi(v)\big) = c(\xi).$$

Если $\varphi(v)\not\equiv 1$, то отсюда следует существование $0<q<1$, такого что при любом n

$$\mu(\xi) = 1-c(\xi q^n).$$

Но $c(0) = 0$. Следовательно, $\mu(\xi)\equiv 0$, но это, как отмечалось выше, противоречит условию $L_0(+\infty)>0$. Следовательно, если $b(\xi)\equiv 0$, то $\varphi(v)\equiv 1$. В частности, если $L_1(u) = E_0(u)$, то есть $\tau_1(\xi)\equiv 1$, то

$$b(\xi) = 1-\operatorname{Re}\tau_1(\xi)\equiv 0\quad \text{и}\quad \varphi(v)\equiv 1.$$

Рассмотрим случай, когда $b(\xi)\not\equiv 0$. Выделим $[\xi_1,\xi_2]$, на котором $b(\xi)\neq 0$ для любого $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$. Соотношение (22) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{r\left(\xi\dfrac{\varphi(v+\Delta v)}{\varphi(v)}\right)-r(\xi)}{\Delta v} = \frac{b(\xi)}{v},$$

где $r(\xi) = \lambda(\xi)-\mu(\xi)$. Получили соотношение вида (20), следовательно, так же как и там, получим, что $\varphi(v) = v^{\varrho}$, где $\varrho>0$ не зависит от последовательности y, а однозначно определяется $\tau_0(\xi)$ и $\tau_1(\xi)$. Подставим полученный результат в (21). Имеем

$$\tau_1(\xi v^{\varrho})-\tau_0(\xi v^{\varrho})-i\xi\psi_x(v) = 1-\frac{1}{v}\int_0^v[\tau_0(\xi t^{\varrho})+i\xi\psi_x(t)]dt+o(1).$$

Следовательно, если предположим, что $\psi_x(v)$ по двум подпоследовательностям y и z имеет разные пределы $\psi_1(v)$ и $\psi_2(v)$, то получим

$$\psi_1(v)-\psi_2(v) = \frac{1}{v}\int_0^v[\psi_1(t)-\psi_2(t)]dt.$$

То есть, $[\psi_1(v)-\psi_2(v)]'_v = 0$. Учитывая, что $\psi_1(1) = \psi_2(1) = 0$, отсюда получаем $\psi_1(v) = \psi_2(v)$. Таким образом, $\psi_x(v)\to\psi(v)$ при $v\to\infty$. Покажем, что $\psi(u) = c(1-u^{\varrho})$. Имеем

$$\psi_x(u\cdot v) = \psi_{x^u}(v)\varphi_x(u)+\psi_x(u).$$

Отсюда, переходя к пределу, получим

$$\psi(u\cdot v) = \psi(v)u^{\varrho}+\psi(u) = \psi(u)v^{\varrho}+\psi(v).$$

Или

$$\frac{\psi(u)}{\psi(v)}=\frac{u^{\varrho}-1}{v^{\varrho}-1}, \qquad \psi(u)=c(u^{\varrho}-1).$$

Отсюда и из (21) при $\varrho=0$, получим $\tau_1(\xi)\equiv 1$, то есть, $L_1(u)\equiv E_0(u)$.

Таким образом, из леммы 6 следует, что (C) $\Rightarrow$ (B). Тем самым доказано, что (C) $\Rightarrow$ (A). Это завершает доказательство теоремы 1.

VI. Сформулируем теперь и докажем теорему, улучшающую основной результат работы [3].

Теорема 2. I. *Если $F(u, A^*(x), B(x))\to F(u)$ во всех точках непрерывности $F(u)$ с $A^*(x)$ такой, что существует b для которого $A^*(x)=b\log x+A(x)$ и $\psi_x(u)=\dfrac{A(x^u)-A(x)}{B(x)}\to\psi(u)$, $\varphi_x(u)\to\varphi(u)$, равномерно на любом $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$, $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ непрерывные функции, тогда существует $d=\mathrm{const}$ такая, что*

$$(3')\qquad \frac{A^*(x)}{B(x)}=\frac{b\log x}{B(x)}+\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)-b\log p}{B(x)}\right\|\frac{1}{p}+d+o(1)$$

и найдутся неубывающие функции $L_l(u)$, $l=0,1$, $L_l(\pm\infty)=\lim\limits_{u\to\pm\infty}L_l(u)$, для которых

$$(4')\qquad \sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)-b\log p\leqslant uB(x)}}\left\|\frac{g(p)-b\log p}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\to L_0(u)$$

во всех точках непрерывности $L_0(u)$ за исключением, быть может, $u=0$,

$$(5')\qquad \frac{1}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)-b\log p\leqslant uB(x)}}\frac{\log p}{p}\to L_1(u)$$

во всех точках непрерывности $L_1(u)$.

Причем, если закон $F(u)$ нетривиальный, то для любого a

$$(6')\qquad \sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}-a\frac{\log p}{\log x}\right\|^2\frac{1}{p}\not\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

(Из последнего условия при $a=0$ следует, что $L_0(+\infty)>0$.)

II. *Если выполнены условия (3'), (4'), (5') и $L_0(+\infty)>L_0(-\infty)$, то*

$$\varphi_x(u)\to\varphi(u), \qquad \psi_x(u)\to\psi(u)$$

равномерно на указанных выше отрезках, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ — непрерывные функции и $F_x(u, A^*(x), B(x))\to F(u)$ во всех точках непрерывности $F(u)$. Если, кроме этого, выполнено условие (6'), то предельный закон будет нетривиальным.

Доказательство теоремы 2. Так как $F_x(u, A^*(x), B(x))\to F(u)$ при $x\to\infty$, то, как уже отмечалось, $\tau_x(\xi)=\tau(\xi)+o(1)$ равномерно по ξ в любой области вида $|\xi|\leqslant c$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\tau_x(\xi)&=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}e^{i\xi\frac{g(n)-A^*(x)}{B(x)}}=\\&=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}e^{i\xi\frac{g(n)-b\log n-A(x)}{B(x)}}+O\left(\left|\frac{\xi}{B(x)}\right|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\log\frac{x}{n}\right)=\\&=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}e^{i\xi\frac{g(n)-b\log n-A(x)}{B(x)}}+o(1),\end{aligned}$$

если $B(x)\to\infty$ при $x\to\infty$.

Следовательно, если существует предельное распределение для $(g(n)-A^*(x))/B(x)$, то существует предел последовательности функций распределения соответствующей аддитивной функции $g(n)-b\log n$, причем, нормировка $B(x)$ остается той же самой, а из центрировки вычитается $b\log x$.

Поэтому, без ограничения общности, можно считать что $b=0$. Первая часть теоремы 1 является следствием теоремы 2 из [3], правда, там рассмотрен случай, когда $A(x)\equiv 0$, но, как нетрудно убедиться, она остается справедливой и в том случае, когда $A(x)\not\equiv 0$, а удовлетворяет условиям теоремы 1. Осталось выяснить в каких случаях предельное распределение будет тривиальным.

Так как $\varphi_x(u\cdot v)\to\varphi(u\cdot v)$ и

$$\varphi_x(u\cdot v)=\frac{B(x^{u\cdot v})}{B(x^u)}\cdot\frac{B(x^u)}{B(x)}=\varphi_{x^u}(v)\cdot\varphi_x(u)\to\varphi(v)\cdot\varphi(u),$$

то $\varphi(u)=u^{\varrho}$, $\varrho\geqslant 0$ (см. [2], гл. VIII, § 8). То есть, $B(x)=(\log x)^{\varrho}L(\log x)$, где $L(u)$ медленно меняется, то есть, $L(cu)/L(u)\to 1$ при $u\to\infty$. Аналогично доказывается (см. лемму 6), что $\psi(u)=c(1-u^{\varrho})$. Следовательно, если $\varrho=0$, то есть, $\varphi(v)\equiv 1$, то $\psi(v)\equiv 0$. Этот случай подробно рассмотрен в работе [3]. Для того чтобы воспользоваться теоремой 6, заметим, что при $\varrho=0$, как видно из (21), $\tau_1(\xi)\equiv 1$, то есть,

$$\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\frac{\log p}{p}\to L_1(u)=E_0(u).$$

В этом случае, как следует из теоремы 6 работы [3], $F(u)$ — нетривиальная функция распределения, если $L_0(+\infty)>0$. И нетрудно убедиться, что для любого a

$$\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}-a\frac{\log p}{\log x}\right\|^2\frac{1}{p}\not\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Если $\varrho>0$, изменим центрировку. Вместо $A(x)$, рассмотрим $A'(x)=A(x)-cB(x)$. При этой замене меняется только предельная функция распределения. Тогда $\big(A'(x^u)-A'(x)\big)/B(x)\to 0$. В этом случае $A'(x)/B(x)\to 0$, то есть $F\big(u,0,B(x)\big)\to F(u)$. Действительно, если предположим что $A'(x)/B(x)\not\to 0$ при $x\to\infty$, то найдется подпоследовательность $y\to\infty$, по которой $A'(y)/B(y)\to d\neq 0$ при $y\to\infty$ и

$$\max_{x\geqslant x_0}\left|\frac{A'(x)}{B(x)}\right|\leqslant 2d \quad \text{или} \quad \frac{A'(y)}{B(y)}\to\infty \quad \text{при} \quad y\to\infty$$

и

$$\left|\frac{A(x)}{B(x)}\right|\leqslant\left|\frac{A(y)}{B(y)}\right| \quad \text{при всех } x\leqslant y.$$

В обоих случаях имеем при $y\to\infty$

$$o(1)=\left|\frac{A'(y^u)-A'(y)}{B(y)}\right|=\left|\frac{A'(y^u)}{B(y^u)}\cdot\frac{B(y^u)}{B(y)}-\frac{A'(y)}{B(y)}\right|\geqslant\left|\frac{A'(y)}{B(y)}\right|(1-4u^\varrho)$$

для любого $0<u\leqslant 1$. Из полученного противоречия следует, что $A'(x)/B(x)\to 0$ или до замены $A(x)/B(x)\to c$.

В этом случае условие нетривиальности в теореме 6 перепишется следующим образом. $F(u)$ — тривиальное предельное распределение, если найдется a, при котором

$$\text{(23)}\qquad \frac{1}{\log x}\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}+a\left(\frac{\log(x/p)}{\log x}\right)^\varrho-a\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0$$

при $x\to\infty$. Отсюда, используя неравенство $\|u+v\|^2\leqslant 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$, получим

$$\frac{1}{\log x^v}\sum_{p\leqslant x^v}\left\|\frac{g(p)}{B(x^v)}+a\left(\frac{\log(x^v/p)}{\log x^v}\right)^\varrho-a-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{g(p)}{B(x)}+a\left(\frac{\log(x/p)}{\log x}\right)^\varrho-a\right)\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0$$

или

$$\text{(23')}\qquad \frac{1}{\log x^v}\sum_{p\leqslant x^v}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\left(1-\frac{1}{\varphi_x(v)}\right)+\right.$$
$$\left.+a\left[\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)^\varrho-\left(1-\frac{\log p}{v\log x}\right)^\varrho\right]\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0.$$

Но из (4) следует, что

$$\frac{1}{\log x}\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\varepsilon(x)\right\|^2\frac{\log p}{p}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon(x)}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)|<B(x)/\sqrt{\varepsilon(x)}}}\frac{\log p}{p}+\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)|\geqslant B(x)/\sqrt{\varepsilon(x)}}}\frac{\log p}{p}\to 0$$

при $x\to\infty$ где $\varepsilon(x)\to 0$ произвольная функция.

Следовательно, соотношение (23') можно записать в следующем виде

$$\frac{1}{\log x^v}\sum_{p\leqslant x^v}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\left(1-\frac{1}{v^\varrho}\right)+a\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)^\varrho-a\left(1-\frac{\log p}{v\log x}\right)^\varrho\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0.$$

Если учесть, что соотношение (23) остается справедливым и после умножения выражения $\dfrac{g(p)}{B(x)}+a\dfrac{\log(x/p)}{\log x}-a$ на $1-\dfrac{1}{v^\varrho}$, то из (23) и последнего соотношения, используя неравенство $\|u+v\|^2\leqslant\leqslant 4\|u\|^2+4\|v\|^2$, получим

$$\frac{1}{\log x^v}\sum_{p\leqslant x^v}\left\|a\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)^\varrho-a\left(1-\frac{\log p}{v\log x}\right)^\varrho-\right.$$
$$\left.-a\left(1-\frac{1}{v^\varrho}\right)\left[\left(\frac{\log(x/p)}{\log x}\right)^\varrho-1\right]\right\|^2\frac{\log p}{p}=$$
$$=\frac{1}{\log x^v}\sum_{p\leqslant x^v}\left\|\frac{1}{v^\varrho}a\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)^\varrho-a\left(1-\frac{\log p}{v\log x}\right)^\varrho+a\left(1-\frac{1}{v^\varrho}\right)\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0.$$

Последнее при $a\neq 0$ и $\varrho\neq 1$ не выполняется. Следовательно, и (23) может быть справедливым только при $a=0$ или при $\varrho=1$. Если $a=0$, то

$$\frac{1}{\log x}\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0.$$

Но отсюда следует, что

$$\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\leqslant uB(x)}}\frac{\log p}{p}\to L_1(u)=E_0(u)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad u\geqslant 0,\\ 0, & \text{если}\quad u<0,\end{cases}$$

то есть, $\tau_1(\xi)=1$, что при $\varrho>0$ невозможно (лемма 6). Таким образом, тривиальное распределение может быть только при $\varrho=1$, если найдется $a\neq 0$ такое, что

$$(24)\qquad \frac{1}{\log x}\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}-a\frac{\log p}{\log x}\right\|^2\frac{\log p}{p}=\varepsilon(x)\to 0$$

при $x\to\infty$.

Тогда

$$(25)\qquad \sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}-a\frac{\log p}{\log x}\right\|^2\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2+\frac{4a^2}{\log^2 x}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log^2 p}{p}+\frac{1}{\log y}\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}-a\frac{\log p}{\log x}\right\|^2\frac{\log p}{p}\to 0,$$

если возмем $y=x^{\sqrt{\varepsilon(x)}}$. Для второго и третьего слагаемого это очевидно, а для первого имеем, так как $B(x^\varepsilon)/B(x)\to\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$, то

$$\sum_{p\leqslant y}\left\|\frac{g(p)}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\leqslant\sum_{p\leqslant x^\varepsilon}\left\|2\varepsilon\frac{g(p)}{B(x^\varepsilon)}\right\|^2\frac{1}{p}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2\varepsilon}\sum_{p\leqslant x^\varepsilon}\left\|\frac{g(p)}{B(x^\varepsilon)}\right\|^2\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p\leqslant x^\varepsilon\\ |g(p)|>1/\sqrt{2\varepsilon}}}\left\|\frac{g(p)}{B(x^\varepsilon)}\right\|^2\frac{1}{p}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2\varepsilon}\,L_0(+\infty)+L_0(+\infty)-L_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)+L_0\left(-\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right).$$

И так как $\varepsilon>0$ любое и $L_0(\pm\infty)=\lim\limits_{u\to\pm\infty}L(u)$, то первое слагаемое в (25) также стремится к нулю. При доказательстве теоремы 2 было уже показано, что из условий (3′), (4′) и (5′), если $L_0(+\infty)>L_0(-\infty)=0$, следует существование предела $F_x(u, A(x), B(x))$ Следовательно, для завершения доказательства второй части теоремы 2 осталось выяснить в каких случаях $F(u)$ — нетривиальная функция распределения. Этот вопрос был исследован при доказательстве первой части теоремы 2.

Замечание к теореме 2. При доказательстве теоремы 1 было выяснено, что $\varphi_x(u)\to u^\varrho$ и $\psi_x(u)\to c(1-u^\varrho)$ и если $\varrho>0$, то $A(x)/B(x)\to c$

при $x\to\infty$. Тогда из теоремы 4 [3] следует, что существует $d=\text{const}$ такое, что

$$\sum_{p\leqslant x}\left\|\frac{g(p)-b\log p}{B(x)}\right\|^2\frac{1}{p}\to d,\quad\text{при}\quad x\to\infty.$$

Кроме этого, если $L_0(+\infty)\neq 0$, $\varrho>0$, $\varrho\neq 1$, то предельное распределение нетривиальное. Если $L_0(+\infty)=0$, то можно доказать, повторяя рассуждения леммы 1, что $F_x(u,\ldots)\to E_0(u)$. И, наконец, можно привести пример аддитивной функции, для которой

$$F_x\big(u, A(x), B(x)\big)\to E_a(x),$$

$$\Phi_x\big(u, A(x), B(x)\big)\to\Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ — нетривиальная функция распределения. Такой будет, например, $g(n)=a\log n$ (и любая „близкая” к ней, в смысле (25), функция), если возьмем $A(x)=0$, $B(x)=\log x$. Если же $\Phi(u)$ тривиальное предельное распределение, то $L_0(+\infty)=0$ по лемме 1, и, как уже было отмечено, $F(u)$ также тривиальное предельное распределение.

Литература

[1] P. D. T. A. Elliott and G. Ryavec, *The distribution of values of additive arithmetical functions*, Acta Math. 126 (1971), стр. 143–164.

[2] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения*, т. 2, издательство „МИР”, Москва 1967.

[3] B. V. Levin and N. M. Timofeev, *On the distribution of values of additive functions*, Acta Arith. 26 (1974), стр. 333–364.

[4] Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев, *Аналитическийв метод в ероятностной теории чисел*, Ученые записки ВГПИ, 38, серия математика, 2 (1971), стр. 57–150.

[5] Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, *Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел*, Известия АН СССР, 34 (5) (1970), стр. 1065–1109.

[6] И. П. Натансон, *Теория функций вещественного переменного*, издательство „Наука”, Москва 1974.

Поступило 25. 9. 1975
и в исправленной форме 30. 4. 1976 (771)