ACTA ARITHMETICA
XXXIII (1977)

Bemerkungen über Multiplikatoren von Modulformen zu Kongruenzgruppen der Hilbert-Siegelschen Modulgruppe

von

JÜRGEN GROSCHE (Göttingen)

In der Theorie der Modulformen zu einer Kongruenzgruppe Ψ spielen Multiplikatorensysteme (siehe Definition 1) eine wichtige Rolle. Dabei treten gewisse, nur von $M\in\Psi$ abhängige, komplexwertige Konstanten $d(M)$ auf. Im klassischen Fall der komplexen Dimension 1, also für Kongruenzgruppen zur Modulgruppe $\Gamma(1)$, gibt es Gruppen Ψ, so daß der Betrag von $d(M)$ bei geeigneter Wahl von M beliebig groß wird. Da dies für die Entwicklung der Theorie störend ist, andererseits über das Verhalten von $d(M)$ für höhere Dimensionen nichts bekannt war, wurden Bedingungen an $d(M)$ gestellt. So verlangt M. Koecher [5], daß es in Ψ eine Hauptkongruenzgruppe G geben soll mit $d(M) = 1$ für $M\in G$. U. Christian [2], [4] fordert $|d(M)| = 1$ für $M\in\Psi$.

In der vorliegenden Arbeit kann nun gezeigt werden, daß für höhere Dimensionen solche Bedingungen eine direkte Folge der Definition von $d(M)$ sind; ein Verhalten wie im Fall der Dimension 1 tritt nicht auf.

Nebenbei ergibt sich in einfacher Weise, daß die Funktionen $Q(M, \tilde{Z})$ für gewisse Elemente $M\in\Psi$ der Gestalt $M = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$ mit einer symmetrischen, n-reihigen Matrix S den festen Wert 1 haben, ein Resultat, daß Christian ([2], S. 281 f) auf ganz andere Weise erzielte.

1. Bezeichnungen und Definitionen. Sei $\mathfrak{a}$ ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade m über dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen. Seien $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(m)}$ die m verschiedenen Einbettungen von $\mathfrak{a}$ in den Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen. Für $a = a^{(1)}\in\mathfrak{a}$ sei

$$\sigma^{(i)}(a) = a^{(i)}. \tag{1}$$

Sei E die n-reihige Einheitsmatrix, 0 die n-reihige Nullmatrix und

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die reelle symplektische Gruppe $\Sigma(n)$ besteht dann aus allen $2n$-reihigen Matrizen M mit reellwertigen Elementen, die der Bedingung

$$(3)\qquad {}^tMIM = I$$

genügen. Die Matrizen aus $\Sigma(n)$ mit Elementen aus dem Ring $\mathfrak{o}$ der ganzen algebraischen Zahlen in $\mathfrak{a}$ bilden die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe $\Gamma(n, \mathfrak{a})$. Sei $\mathfrak{g}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}$. Die Matrizen $M \in \Gamma(n, \mathfrak{a})$ mit

$$(4)\qquad M \equiv E \bmod \mathfrak{g}$$

bilden die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ $\mathfrak{g}$-ter Stufe von $\Gamma(n, \mathfrak{a})$. Eine Gruppe Ψ von Matrizen aus $\Sigma(n)$ heißt Kongruenzgruppe $\mathfrak{g}$-ter Stufe, wenn sie $\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ von endlichem Index enthält. Ist Ψ eine Kongruenzgruppe der Stufe $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$ ein weiteres Ideal in $\mathfrak{o}$, so ist wegen

$$(5)\qquad \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}^*) \subset \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}),$$

$$(6)\qquad [\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}) : \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}^*)] < \infty,$$

Ψ auch eine Kongruenzgruppe der Stufe $\mathfrak{g}^*$, d.h. die Stufe ist nicht eindeutig bestimmt.

Sei K eine n-reihige Matrix mit Elementen aus $\mathfrak{a}$ und $K^{(i)}$ die (1) enstsprechend gebildeten Matrizen. Wir setzen dann

$$(7)\qquad \tilde{K} = \begin{pmatrix} K^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $M \in \Sigma(n)$ zerlegt in n-reihige Untermatrizen in der Form

$$(8)\qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$Z = X + iY$ sei eine n-reihige, komplexwertige, symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil Y. Die Gesamtheit dieser Matrizen bildet die Siegelsche obere Halbebene $\mathfrak{Z}_n$. Für $Z_1, \ldots, Z_m \in \mathfrak{Z}_n$ sei $\tilde{Z}$ definiert durch

$$(9)\qquad \tilde{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_m \end{pmatrix}.$$

Die Gesamtheit aller $\tilde{Z}$ wird mit $\mathfrak{H}_n$ bezeichnet. Auf $\mathfrak{H}_n$ wird eine Zuordnung definiert durch

$$(10)\qquad \tilde{Z} \to M\langle\tilde{Z}\rangle = (\tilde{A}\tilde{Z} + \tilde{B})(\tilde{C}\tilde{Z} + \tilde{D})^{-1}.$$

Ferner setzen wir

$$(11)\qquad M\{\tilde{Z}\} = \tilde{C}\tilde{Z} + \tilde{D}.$$

In Anlehnung an [2], [4] definieren wir nun:

Definition 1. Sei Ψ eine Kongruenzgruppe $\mathfrak{g}$-ter Stufe, s eine komplexe Zahl. Jedem $M \in \Psi$ sei eine Funktion

$$Q(M, \tilde{Z})\colon \mathfrak{H}_n \to C^*$$

zugeordnet. Diese Funktionen bilden ein *Multiplikatorensystem* $\mathfrak{M}(\Psi, s)$ zu Ψ vom Gewicht s, wenn die nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $Q(M, \tilde{Z})$ ist holomorph.

(b) Für $M_1, M_2 \in \Psi$ gilt

$$Q(M_1M_2, \tilde{Z}) = Q(M_1, M_2\langle\tilde{Z}\rangle)Q(M_2, \tilde{Z}).$$

(c) Ist mit M auch $(-M)$ aus Ψ, so gilt $Q(M, \tilde{Z}) = Q(-M, \tilde{Z})$.

(d) Es gibt eine komplexwertige Konstante $d(M)$ mit

$$Q(M, \tilde{Z}) = d(M)(\det M\{\tilde{Z}\})^s.$$

Bemerkung 1. Die Konstante $d(M)$ hängt von der Wahl des Zweiges von $(\det M\{Z\})^s$ ab. Für alle $Q(M, \tilde{Z})$ aus $\mathfrak{M}(\Psi, s)$ ist daher ein Zweig fest zu wählen. Sonst ist i.a. die Bedingung (b) nicht erfüllt.

Bemerkung 2. Nach [2], Satz 1, ist das Gewicht s für $n \geqslant 2$ oder $m \geqslant 2$ stets rational. Dies gilt nicht im Falle $m = n = 1$.

Bemerkung 3. Für $C = 0$ ist $Q(M, \tilde{Z})$ offenbar nicht mehr von $\tilde{Z}$ abhängig. Es gilt dann

$$(12)\qquad Q(M, \tilde{Z}) = d(M)(\det\tilde{D})^s.$$

Hat M überdies die Gestalt

$$(13)\qquad M = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

so gilt

$$(14)\qquad Q(M, \tilde{Z}) = d(M).$$

2. Kommutatorgruppen

Lemma 1. *Sei $n > 1$ oder $m > 1$ und Ψ eine Kongruenzgruppe der Stufe $\mathfrak{g}$. Bezeichnet man mit Ψ_k die Kommutatorgruppe von Ψ, so gilt*

$$(15)\qquad [\Psi : \Psi_k] < \infty.$$

Beweis. Ψ ist Kongruenzgruppe der Stufe $\mathfrak{g}$, somit gilt

$$(16)\qquad [\Psi : \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})] < \infty.$$

Ferner gilt für die Kommutatorgruppe $\Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ von $\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$

$$\Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}) \subset \Psi_k. \tag{17}$$

Daher genügt es zum Beweise von (15)

$$[\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}) : \Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})] < \infty \tag{18}$$

zu beweisen.

Fall 1: $n > 1$, $m = 1$. Zur Vereinfachung schreiben wir $\Gamma(n, q)$ und $\Gamma(n)$ statt $\Gamma(n, \boldsymbol{Q}, \mathfrak{g})$ und $\Gamma(n, \boldsymbol{Q})$.

$\Gamma(n, q)$ ist Normalteiler in $\Gamma(n)$, daher ist dies auch für $\Gamma_k(n, q)$ richtig. Man setze nun

$$S = (s_{ik}), \quad U = (u_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, n; \tag{19}$$

$$s_{12} = s_{21} = q, \quad s_{ik} = 0 \quad \text{sonst}; \tag{20}$$

$$u_{ii} = 1, \quad u_{21} = q, \quad u_{ik} = 0 \quad \text{sonst}. \tag{21}$$

Dann gilt

$$\check{S} = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma(n, q) \tag{22}$$

und

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma(n, q). \tag{23}$$

Also ist

$$\check{R} = \hat{U}\check{S}\hat{U}^{-1}\check{S}^{-1} \in \Gamma_k(n, q). \tag{24}$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\check{R} = \begin{pmatrix} E & R \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{25}$$

mit

$$R = (r_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, n; \tag{26}$$

$$r_{11} = 2q^2, \quad r_{ik} = 0 \quad \text{sonst}. \tag{27}$$

Nach [7] ist aber der kleinste Normalteiler von $\Gamma(n)$, der $\check{R}$ enthält, die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(n, 2q^2)$. Damit gilt

$$\Gamma(n, 2q^2) \subset \Gamma_k(n, q). \tag{28}$$

Somit ergibt sich die Beziehung (18) aus

$$[\Gamma(n, q) : \Gamma(n, 2q^2)] < \infty. \tag{29}$$

Bemerkung. $\Gamma(n, 2q^2)$ ist in $\Gamma_k(n, q)$ echtrenthalten: Mit (19), (21) und (23) gilt für $\hat{V} = {}^t\hat{U}\hat{U}^t\hat{U}^{-1}\hat{U}^{-1}$ die Beziehung

$$\hat{V} \notin \Gamma_k(n, q) \cap \Gamma(n, 2q^2). \tag{30}$$

Eine genaue Bestimmung von $\Gamma_k(n, q)$ ist hier aber nicht erforderlich.

Fall 2: $n > 1$, $m > 1$. Die Normalteilereigenschaft gilt wie im Fall 1 für $\Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$. Ferner gibt es ein $q \in \Sigma$ mit $\Gamma(n, q) \subset \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$. Nach Fall 1 ist wegen $\Gamma_k(n, q) \subset \Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ klar, daß $\Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ nicht im Zentrum von $\Gamma(n, \mathfrak{a})$ liegt. Solche Normalteiler enthalten aber nach [1] eine Hauptkongruenzgruppe einer geeigneten Stufe $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$. Es folgt

$$\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}^*) \subset \Gamma_k(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}) \subset \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}). \tag{31}$$

Aus (6) ergibt sich nun unmittelbar (18).

Fall 3: $n = 1$, $m > 1$. Es gibt eine Einheit $u \in \mathfrak{o}$ mit

$$u \equiv u^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{g}, \quad u^2 - 1 \neq 0. \tag{32}$$

Sei ferner $a \in \mathfrak{g}$, dann sind

$$U_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus $\Gamma(1, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$. Es folgt

$$U_0 S_0 U_0^{-1} S_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (u^2-1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_k(1, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}). \tag{33}$$

Für jedes $b \in \mathfrak{g}^* = (u^2-1)\mathfrak{g}$ ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_k(1, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}). \tag{34}$$

Da $\Gamma_k(1, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ Normalteiler in $\Gamma(1, \mathfrak{a})$ ist, folgt nach [8] $\Gamma(1, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}^*) \subset \Gamma_k(1, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$, und wir sind fertig.

3. Multiplikatoren. Aus den Beziehungen (9), (10) und (11) verifiziert man leicht

Lemma 2. *Für M_1 und M_2 aus $\Sigma(n)$ und $\tilde{Z} \in \mathfrak{H}_n$ gilt*

$$M_1 M_2\{\tilde{Z}\} = M_1\{M_2\langle\tilde{Z}\rangle\} M_2\{\tilde{Z}\}. \tag{35}$$

Es gilt außerdem

Lemma 3. *Sei $\mathfrak{M}(\Psi, s)$ ein Multiplikatorensystem zur Kongruenzgruppe Ψ vom Gewicht s. Dann wird durch die in Definition 1(d) erklärte komplexe Zahl $d(M)$ ein Homomorphismus von Ψ in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen definiert.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar nach Bemerkung 1 zu Definition 1. Für $M_1, M_2 \in \Psi$ folgt nach Definition 1(b), (d):

$$d(M_1M_2)(\det M_1M_2\{\tilde{Z}\})^s = d(M_1)(\det M_1\{M_2\langle\tilde{Z}\rangle\})^s d(M_2)(\det M_2\{\tilde{Z}\})^s. \tag{36}$$

Mit (35) ergibt sich

$$d(M_1M_2) = d(M_1)d(M_2). \tag{37}$$

Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Sei $n > 1$ oder $m > 1$ und $\mathfrak{M}(\Psi, s)$ ein Multiplikatorensystem zur Kongruenzgruppe Ψ vom Gewicht s. Dann gibt es eine rationale Zahl r, so daß für die Konstante $d(M)$ gilt:*

$$d(M) = e^{2\pi i r}. \tag{38}$$

Beweis. Wegen Lemma 3 gilt für $M, N \in \Psi$

$$d(MNM^{-1}N^{-1}) = d(M)d(N)d(M^{-1})d(N^{-1}). \tag{39}$$

Also erhält man für $L \in \Psi_k$

$$d(L) = 1. \tag{40}$$

Nach Lemma 1 ist (15) erfüllt. Sei etwa $[\Psi: \Psi_k] = p$. Dann gilt für $M \in \Psi$

$$M^p \in \Psi_k. \tag{41}$$

Es folgt nach (40), (35)

$$1 = d(M^p) = \big(d(M)\big)^p. \tag{42}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

KOROLLAR 1 (siehe dazu [2], S. 285 f). *Für die Funktionen $Q(M, \tilde{Z}) \in \mathfrak{M}(\Psi, s)$ gilt*

$$|Q(M, \tilde{Z})| = |(\det M\{\tilde{Z}\})^s|.$$

Dies folgt aus Definition 1 und (38).

KOROLLAR 2 (siehe dazu [5], S. 403). *Es gibt eine Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}^*) \subset \Psi$ mit*

$$d(M) = 1 \quad \textit{für} \quad M \in \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}^*). \tag{44}$$

Nach Lemma 1 gibt es eine Hauptkongruenzgruppe, die in Ψ_k enthalten ist. Für die Elemente dieser Gruppe gilt (44).

Bemerkung. Nach Korollar 2 kann man die Stufe $\mathfrak{g}$ von Ψ gleich so wählen, daß (44) gilt für alle $M \in \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$.

KOROLLAR 3 (siehe dazu [2], S. 281 f). *Sei Ψ eine Kongruenzgruppe. Die Stufe $\mathfrak{g}$ sei so gewählt, daß*

$$\Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}) \subset \Psi_k \tag{45}$$

gilt. Für $M \in \Gamma(n, \mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ mit

$$M = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{46}$$

und $Q(M, \tilde{Z}) \in \mathfrak{M}(\Psi, s)$ gilt dann

$$Q(M, \tilde{Z}) = 1. \tag{47}$$

Zum Beweise beachte man Bemerkung 3 zu Definition 1 und (44).

Zusatz bei der Korrektur: Zu Lemma 1 beachte man die Arbeit von F. Kirchheimer: *Zur Bestimmung der linearen Charaktere symplektischer Hauptkongruenzgruppen*, Math. Zeitschr. 150 (1976), S. 135–148.

Literaturverzeichnis

[1] H. Bass, J. Milnor, J. P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_n ($n \geq 2$)*, Publ. Math. I.H.E.S. 33 (1967), S. 59–137.

[2] U. Christian, *Hilbert–Siegelsche Modulformen und Poincarésche Reihen*, Math. Ann. 148 (1962), S. 257–307.

[3] — *Zur Theorie der Hilbert–Siegelschen Modulfunktionen*, ibid. 152 (1963), S. 275–341.

[4] — *Siegelsche Modulfunktionen*, Vorlesungsausarbeitung 1974/75, Math. Institut der Universität Göttingen.

[5] M. Koecher, *Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades I*, Math. Zeitschr. 59 (1954), S. 399–416.

[6] H. Maass, *Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen*, Math. Ann. 117 (1940), S. 538–578.

[7] J. Mennicke, *Zur Theorie der Siegelschen Modulgruppe*, ibid. 159 (1965), S. 115–129.

[8] J. P. Serre, *Le problème de groupes de congruence pour SL_2*, Ann. of Math. 92 (1970), S. 489–527.

[9] C. L. Siegel, *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades*, Math. Ann. 116 (1939), S. 617–657.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
Göttingen

Eingegangen am 23. 1. 1976 (809)