ACTA ARITHMETICA
XXXIII (1977)

Über die diophantische Gleichung $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$

von

HANS PETER SCHLICKEWEI (Freiburg i. Br.)

1. Einleitung. Seien M_1, M_2, M_3 disjunkte, nicht leere, endliche Mengen von Primzahlen. 1933 bewies Mahler [1], daß die diophantische Gleichung $x_1+x_2+x_3=0$ nur endlich viele Lösungen $(x_1, x_2, x_3)\in \boldsymbol{Z}^3$ besitzt mit

$$(1.1)\qquad |x_i| = \prod_{p\in M_i} p^{\nu(p)},\quad \nu(p)\in \boldsymbol{Z},\ \nu(p)\geqslant 0\quad (1\leqslant i\leqslant 3).$$

In der vorliegenden Note wird dieses Ergebnis mit Hilfe von Theorem 1.2 [3] auf beliebige Dimension $n\geqslant 3$ verallgemeinert und damit eine Vermutung von Mahler [2] verifiziert. Genauer beweisen wir:

SATZ 1.1. *Seien n eine natürliche Zahl und $M_1, \ldots, M_n$ endliche, nichtleere und disjunkte Mengen von Primzahlen. Weiter seien $c>0$ und $d<1$ reelle Konstanten. Dann besitzt die diophantische Gleichung*

$$(1.2)\qquad x_1+\ldots+x_n = 0$$

höchstens endlich viele Lösungen $(x_1, \ldots, x_n)\in \boldsymbol{Z}^n$ mit den folgenden Eigenschaften: Die Komponenten x_i lassen sich als Produkte ganzer Zahlen

$$(1.3)\qquad 0\neq x_i = x_{i1}\cdot x_{i2}\quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

darstellen, wobei x_{i1} nur durch Primzahlen aus M_i geteilt werde, für das Produkt der Zahlen x_{i2} die Ungleichung

$$(1.4)\qquad \prod_{i=1}^{n} |x_{i2}| \leqslant cH^d$$

mit $H=\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ erfüllt ist und für alle i, j $(1\leqslant i, j\leqslant n)$, $i\neq j$

$$(1.5)\qquad (x_i, p) = 1\quad \text{für alle } p\in M_j \text{ gilt.}$$

Für $n=1, 2$ ist Satz 1.1 trivial.

Der Fall $n=3$ wurde von Th. Schneider [4] bewiesen.

2. Beweis von Satz 1.1. Eine leicht einzusehende Variante von Theorem 1.2 [3] lautet folgendermaßen:

Satz 1.2. *Sei m eine natürliche Zahl, die Mengen $M_1, \ldots, M_{m+2}$ seien wie oben. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ seien reelle algebraische Zahlen, und für $p \in M_{m+2}$ seien $\alpha_{1p}, \ldots, \alpha_{mp}$ algebraische Zahlen aus $\mathbf{Q}_p$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbf{Z}^{m+1}$ mit*

$$(2.1)\qquad 0 < \min\left\{1, \left|\frac{x_1}{x_{m+1}}\alpha_1 + \ldots + \frac{x_m}{x_{m+1}}\alpha_m + 1\right|\right\} \times$$

$$\times \prod_{p \in M_{m+2}} \min\left\{1, \left|\frac{x_1}{x_{m+1}}\alpha_{1p} + \ldots + \frac{x_m}{x_{m+1}}\alpha_{mp} + 1\right|_p\right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{m+1} \prod_{p \in M_i} |x_i|_p \cdot \prod_{j=1}^{m+1} |x_j| \leqslant \|\mathfrak{x}\|^{-\varepsilon},$$

wobei $\|\mathfrak{x}\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{m+1}|\}$ sei.

Zum Beweis von Satz 1.1 wenden wir Satz 1.2 an: Wir können o.B.d.A annehmen $n \geqslant 3$. Es sei $m = n-2$. Wir setzen speziell $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 1$ und ebenso für alle $p \in M_{m+2}$ $\alpha_{1p} = \ldots = \alpha_{mp} = 1$. Für den zwischen den Ungleichheitszeichen in (2.1) stehenden Term schreiben wir zur Abkürzung bei unserer speziellen Wahl der Zahlen α

$$F(\mathfrak{x}) = F(x_1, \ldots, x_{m+1}).$$

Wir nehmen an Satz 1.1 sei falsch und leiten einen Widerspruch zu Satz 1.2 her. Sei $\{(x_1^{(k)}, \ldots, x_{m+1}^{(k)}, x_{m+2}^{(k)})\}_{k \in \mathbf{N}}$ eine unendliche Folge von Lösungen der Gleichung (1.2), die (1.3)–(1.5) erfülle. Nach eventueller Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, m+2$ erhalten wir damit eine unendliche Teilfolge

$$\{(x_1^{(k')}, \ldots, x_{m+1}^{(k')}, x_{m+2}^{(k')})\}_{k' \in \mathbf{N}}$$

für die

$$(2.2)\qquad |x_{m+1}^{(k')}| \geqslant |x_m^{(k')}| \geqslant \ldots \geqslant |x_1^{(k')}| \geqslant |x_{m+2}^{(k')}|$$

erfüllt ist. Indem wir anstatt k' wieder einfacher k schreiben, gilt für diese Lösungsfolge

$$(2.3)\qquad \|\mathfrak{x}^{(k)}\| = \max\{|x_1^{(k)}|, \ldots, |x_{m+1}^{(k)}|\} = H^{(k)} = \max\{\|\mathfrak{x}^{(k)}\|, |x_{m+2}^{(k)}|\}.$$

Wir schätzen nun den Term $F(\mathfrak{x}^{(k)})$ nach oben ab.

Wegen (1.2) und (2.2) gilt

$$(2.4)\qquad \min\left\{1, \left|\frac{x_1^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}} + \ldots + \frac{x_m^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}} + 1\right|\right\} = \left|\frac{x_{m+2}^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}}\right|.$$

Weiter erhalten wir mit (1.5)

$$(2.5)\qquad \min\left\{1, \left|\frac{x_1^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}} + \ldots + \frac{x_m^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}} + 1\right|_p\right\} = \min\left\{1, \left|\frac{x_{m+2}^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}}\right|_p\right\} = |x_{m+2}^{(k)}|_p$$

für alle $p \in M_{m+2}$.

Aus (1.3) folgern wir

$$(2.6)\qquad \prod_{p \in M_i} |x_i^{(k)}|_p = \prod_{p \in M_i} |x_{i1}^{(k)}|_p \cdot |x_{i2}^{(k)}|_p \leqslant |x_{i1}^{(k)}|^{-1} = \left|\frac{x_{i2}^{(k)}}{x_i^{(k)}}\right|$$

für alle i mit $1 \leqslant i \leqslant m+2$.

Kombination von (2.4)–(2.6) liefert für $F(\mathfrak{x}^{(k)})$ die Abschätzung

$$(2.7)\qquad 0 < F(\mathfrak{x}^{(k)}) \leqslant \left|\frac{x_{m+2}^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}}\right| \cdot \left|\frac{x_{m+2,2}^{(k)}}{x_{m+2}^{(k)}} \cdot \frac{x_{12}^{(k)}}{x_1^{(k)}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{m+1,2}^{(k)}}{x_{m+1}^{(k)}}\right| \cdot \prod_{i=1}^{m+1} |x_i^{(k)}|$$

Berücksichtigen wir (1.4) und (2.3), so folgt aus (2.7)

$$(2.8)\qquad 0 < F(\mathfrak{x}^{(k)}) \leqslant c \cdot \|\mathfrak{x}^{(k)}\|^{d-1}.$$

Wegen $d < 1$ steht (2.8) im Widerspruch zu Satz 1.2.

Literaturverzeichnis

[1] K. Mahler, *Zur Approximation algebraischer Zahlen (I). Über den größten Primteiler binärer Formen*, Math. Ann. 107 (1933), S. 691–730.

[2] — Math. Rev. 42 (1971), 3028.

[3] H. P. Schlickewei, *On products of special linear forms with algebraic coefficients*, Acta Arith. 31 (1977), S. 389–398.

[4] Th. Schneider, *Anwendung eines abgeänderten Roth–Ridoutschen Satzes auf diophantische Gleichungen*, Math. Ann. 169 (1967), S. 177–182.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
Freiburg i. Br.

Eingegangen am 28. 11. 1975 (796)