ACTA ARITHMETICA
XXXIII (1977)

Arithmetisch ganze Differentiale der Modulfunktionenkörper 6. und 7. Stufe

von

ROLF BERNDT und KLAUS SCHRAMM (Hamburg)

Herrn Professor E. Kähler zum 70. Geburtstag gewidmet

Eine Arithmetisierung der abelschen Differentiale 1. Gattung kann für einen Unterkörper K des Körpers $\mathfrak{K}_N$ der Modulfunktionen N-ter Stufe durch die Auszeichnung der Differentiale

$$\mathrm{Diff}_A K$$

mit q-Entwicklungskoeffizienten ($q = e^{2\pi i \omega/N}$) aus einem Unterring A eines in K enthaltenen Zahlkörpers k vorgenommen werden. Von Kähler angeregt erhebt sich die Frage nach einem Vergleich dieses Moduls $\mathrm{Diff}_A K$ mit den für beliebige endlich erzeugbare Körper birational invariant definierten Differentialintegritäten

$$D(K) \quad \text{und} \quad D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) \quad \text{(s. [7], 357. und [1], 1.)}$$

für die Körper

$$K = \mathfrak{F}_N(k)$$

der Modulfunktionen N-ter Stufe mit q-Entwicklungskoeffizienten aus k. Die beiden wichtigsten Fälle sind dabei jeweils

Fall 1 : $k = \boldsymbol{Q}$,

Fall 2 : $k =$ Körper der N-ten Einheitswurzeln.

Ferner sei im Folgenden stets A die Maximalordnung von k.

In der Hoffnung das Interesse an allgemeingültigeren Aussagen anzuregen sollen hier die folgenden Ergebnisse begründet werden:

1. Für $K = \mathfrak{F}_N(k)$ gilt allgemein

$$D(K) \subset \mathrm{Diff}_A K$$

und für die beiden Fälle 1 und 2 (mit N prim im Fall 2)

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) \subset \frac{1}{\mathfrak{d}} \operatorname{Diff}_A K,$$

wobei $\mathfrak{d}$ die Differente von A bezeichnet.

2. Für die 6. Stufe kann aus Klein–Fricke [8] entnommen werden

$$K = \mathfrak{F}_6(k) = k(x, y) \quad \text{mit} \quad f(x, y) = y^2 - x^3 - 1 = 0,$$

$$\operatorname{Diff}_A K = w_1 A \quad \text{mit} \quad w_1 = \frac{dx}{f_y}.$$

Im Fall 2 sei für $N = 6$ k im Folgenden gegeben durch

$$k = \boldsymbol{Q}(a) \quad \text{mit} \quad a^2 + 3 = 0.$$

Dann gilt

$$D(K) = a \operatorname{Diff}_A K \quad \text{mit} \quad a = 6 \text{ im Fall 1 und } a = 2a \text{ im Fall 2.}$$

3. Für die 7. Stufe kann aus [8] entnommen werden

$$K = \mathfrak{F}_7(k) = k(x, y) \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^3 + xy^3 + y = 0,$$

$$\operatorname{Diff}_A K = \sum_{i=1}^{3} w_i A \quad \text{mit} \quad w_1 = \frac{dx}{f_y},\ w_2 = xw_1,\ w_3 = yw_1.$$

Im Fall 2 sei hier k gegeben durch

$$k = \boldsymbol{Q}(\sigma) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^{6} (\sigma+1)^j = \sigma^6 + 7\sigma^5 + \ldots + 7\sigma + 7 = 0.$$

Dann gilt

$$D(K) = \sum_{j=1}^{3} \overline{w}_j A \quad \text{mit} \quad \overline{w}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} w_i.$$

Dabei ist

$$(a_{ji}) = 7E \ (E = \text{Einheitsmatrix}) \quad \text{im Fall 1}$$

und

$$(a_{ji}) = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 & 0 \\ -2\sigma^2 & 0 & \sigma^2 \\ 9\sigma & \sigma & -3\sigma \end{pmatrix} \quad \text{im Fall 2.}$$

4. Für $N = 6$ und 7 gilt in beiden Fällen 1 und 2

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) = \frac{1}{N} D(K).$$

1. Ein Obermodul von $D(K)$. K sei endlich erzeugt mit dem Zahlkörper k als genauem Konstantenkörper. A sei wie verabredet die Maximalordung von k. Von Kähler [7] 357. (s. auch [1], 1.) wird für den hier vorliegenden speziellen Fall $\operatorname{trgr} K = 1$ übernommen:

Definition. Der Modul $D(K)$ der *arithmetisch ganzen Differentiale* von K ist der Durchschnitt

$$D(K) = \bigcap SdS,$$

genommen über alle Bewertungsringe S von K, die diskret, vom Rang 1 und im Wesentlichen von endlichem Typ über $\boldsymbol{Z}$ sind (1). Dabei bezeichnet SdS den von allen db mit $b \in S$ im Differentialmodul $\Omega_K^1 = KdK$ von K (über $\boldsymbol{Z}$) erzeugten S-Untermodul.

$D(K)$ ist ein A-Modul, für den etwa aus [7] oder [1] ein endlich erzeugter A-Obermodul entnommen werden kann. Ist $K = \mathfrak{F}_N(k)$, so wird auf andere Art ein Obermodul gegeben durch den folgenden

Satz 1. *Es gilt*

$$D(\mathfrak{F}_N(k)) \subset \operatorname{Diff}_A \mathfrak{F}_N(k).$$

Beweis. Aus Shimura [10] kann entnommen werden

$$\mathfrak{F}_N(k) = k\left(J(\omega), J(N\omega), f^1_{\left(\frac{1}{N},0\right)}(\omega)\right) \quad \text{(p. 140)}$$

mit

$$J(\omega) = 12^3 \frac{g_2^3(\omega)}{\Delta(\omega)},$$

$$f^1_{\left(\frac{\nu}{N},\frac{\mu}{N}\right)}(\omega) = \frac{g_2(\omega) g_3(\omega)}{\Delta(\omega)} \wp\left(\frac{\nu}{N}\omega + \frac{\mu}{N} \middle| \omega, 1\right) \quad \text{(p. 133).}$$

Hier die Entwicklungen nach $r = e^{2\pi i\omega}$ der Teilwerte der Weierstraßschen $\wp$-Funktion eingetragen sowie

$$g_2(\omega) = (2\pi)^4 \left(\frac{1}{12} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^i\right),$$

$$g_3(\omega) = (2\pi)^6 \left(\frac{1}{216} + \frac{7}{3} \sum_{i=1}^{\infty} a_i' r^i\right), \quad a_i, a_i' \in \boldsymbol{Z} \quad \text{(p. 33),}$$

$$\Delta(\omega) = (2\pi)^{12} r \prod_{i=1}^{\infty} (1 + r^i)^{24}$$

(1) Bewertungsring bedeute im Folgenden, wenn nicht anders vermerkt, stets diskreter Bewertungsring vom Rang 1, der im Wesentlichen von endlichem Typ über $\boldsymbol{Z}$ ist, d.h. Lokalisierung eines über $\boldsymbol{Z}$ endlich erzeugten Ringes.

ergibt

$$J(\omega) = r^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i r^i, \quad c_i \in \boldsymbol{Z}$$

und die Existenz eines $c \in \boldsymbol{N}$, so daß gilt

$$f^1_{\left(\frac{1}{N},0\right)}(\omega) = \sum_{i>-\infty} c'_i q^i, \quad q = r^{1/N}, \; c'_i \in \frac{1}{c} \boldsymbol{Z} \quad (\text{p. } 141).$$

k erweist sich als der genaue Konstantenkörper von $\mathfrak{F}_N(k)$.

Vermöge Identifikation der Elemente f aus $K = \mathfrak{F}_N(k)$ mit ihren q-Entwicklungen kann K als Unterkörper von $k((q))$, dem Körper der meromorphen Reihen in q mit Koeffizienten aus k, aufgefaßt werden. Die Bemerkung über die Nenner der Entwicklungskoeffizienten der K erzeugenden Elemente zeigt, daß K schon in den Quotientenkörper $\tilde{K}$ des Ringes

$$R = A[[q]]$$

der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus A eingebettet werden kann.

Sei $\tilde{S}$ ein Bewertungsring von $\tilde{K}$, der Lokalisierung von R ist (und damit ausnahmsweise nicht im Wesentlichen von endlichem Typ über $\boldsymbol{Z}$). Dann ist $\tilde{S} \cap K$ K selbst oder ein Bewertungsring S von K, der wieder unter die anfangs gemachte Verabredung fällt, also im Wesentlichen von endlichem Typ über $\boldsymbol{Z}$ ist. Für $\tilde{S}$ gilt nämlich

(a) $\tilde{S} \supset k$

oder

(b) $\tilde{S} = R_{\mathfrak{c}R}$ mit einem Primideal $\mathfrak{c} \neq (0)$ aus A.

Da aus der r- bzw. q-Entwicklung von J folgt daß $1/J \in R$ und damit $S = \tilde{S} \cap K \supset k[1/J]$ bzw. $\supset A[1/J]$ gilt, dominiert S im Fall (a) einen Bewertungsring

$$S_0 = k[1/J]_{(f(1/J))} \quad \text{von} \quad K_0 = k(J) \quad (f(1/J) \in k[1/J], \text{ irreduzibel})$$

bzw. im Fall (b) einen Bewertungsring

$$S_0 = A[1/J]_{(\mathfrak{c})},$$

denn die q-Entwicklungskoeffizienten eines $h(1/J) \in A[1/J]$ sind genau dann aus $\mathfrak{c}$, wenn die Koeffizienten von h in $\mathfrak{c}$ liegen (vergl. [10], p. 108, prop. 4.15). S_0 ist in beiden Fällen im Wesentlichen von endlichem Typ über $\boldsymbol{Z}$, also Bewertungsring im anfangs verabredeten Sinne, und damit auch S, da K über K_0 endlich und separabel ist.

Es sei

$$w = f dh \in D(K) \quad \text{mit} \quad f, h \in K, \; h = h_1/h_2, \; h_i \in R.$$

Dann ist

$$w = f dh = F(q) dq \quad \text{mit} \quad F(q) = \frac{f}{h_2^2}\left(h_2 \frac{dh_1}{dq} - h_1 \frac{dh_2}{dq}\right) \in \tilde{S}.$$

Hier bezeichnet dh_i/dq die formale Ableitung von h_i nach q. Dies zeigt, daß aus $w \in D(K)$ für die Fourierreihe $F(q)$ von w folgt

$F(q) \in \bigcap \tilde{S}$ für alle Bewertungsringe $\tilde{S}$, die Lokalisierungen von R sind,

und damit

$F(q) \in R$.

Denn nach [3], Ch. 3, § 2, Cor. 6 zu Th. 2 ist R noethersch und nach [3], Ch. 5, § 1, Prop. 14 ganz-abgeschlossen und folglich gleich dem Durchschnitt der $\tilde{S}$.

2. Ein Obermodul für $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$. In [1] wurde der Begriff der arithmetisch ganzen Differentiale gemäß [7], 412. in folgender Weise modifiziert:

Definition. Der Modul der *relativ zum Differentendivisor ganzen Differentiale* ist der Durchschnitt

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) = \bigcap \frac{1}{\mathfrak{d}_1(S)} S dS,$$

genommen über alle Bewertungsringe S von K, die wie in 1. verabredet diskret, vom Rang 1 und im Wesentlichen von endlichem Typ über $\boldsymbol{Z}$ sind, also endlich erzeugten Differentialmodul Ω_S^1 haben.

Hier bezeichnet $\mathfrak{d}_1(S)$ die erste Kählersche Differente von S, also das erste Fittingsche Determinantenideal von Ω_S^1. Nach [5], p. 73 oder [6], p. 138 gilt

$$(*) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{d}_1(S) &= S && \text{falls } S \supset k, \\ &= \mathfrak{P}^{e-1} && \text{falls } pS = \mathfrak{P}^e \text{ mit } p \nmid e, \\ &\subset \mathfrak{P}^e && \text{falls } pS = \mathfrak{P}^e \text{ mit } p \mid e. \end{aligned}$$

$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ ist wieder ein A-Modul, für den in [1] ein Obermodul bestimmt ist. Für $K = \mathfrak{F}_N(k)$ mit N prim wird auf andere Weise ein Obermodul gegeben durch den

Satz 2. *Es gilt*

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) \subset \mathrm{Diff}_A K \qquad \textit{im Fall } 1,$$

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) \subset \frac{1}{\sigma^{N-2}} \mathrm{Diff}_A K \qquad \textit{im Fall } 2 \textit{ mit } \sigma = e^{2\pi i/N} - 1.$$

Beweis. Nach Definition folgt aus

$$w \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right),$$

$$\mathfrak{d}_1(S)w \subset SdS$$

für alle Bewertungsringe S von K und somit insbesondere für die, die in der Weise

$$S = K \cap \tilde{S}$$

aus Bewertungsringen $\tilde{S}$ von $\tilde{K}$ gewonnen werden können, die Lokalisierungen von R sind (s. 1.). Für diese $\tilde{S}$ gilt dann

$$\tilde{S} \supset k$$

oder

$$\tilde{S} = R_{\mathfrak{c}R} \quad \text{mit einem Primideal } \mathfrak{c} \neq (0) \text{ von } A.$$

Wenn $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal des Bewertungsringes $s = A_{\mathfrak{c}}$ von k und $\mathfrak{P}$ das maximale Ideal von $\tilde{S}$ bezeichnet, gilt deswegen

$$\tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}\tilde{S} \quad \text{sowie} \quad \mathfrak{P} = K \cap \tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}S.$$

Also ist mit der Verzweigungszahl e von $\mathfrak{p}$

$$pS = \mathfrak{p}^e S = \mathfrak{P}^e.$$

Im Fall 1 ist stets $e = 1$ und im Fall 2 nur für $p = N$ $e \neq 1$ und zwar

$$N \cdot S = \sigma^{N-1} S.$$

In jedem Fall kann (*) verwandt werden, um zu folgern

$$\mathfrak{d}_1(S) = \mathfrak{P}^{e-1}, \quad \text{also} = S \text{ bzw. } = \sigma^{N-2} S.$$

Sei wieder

$$w \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) \quad \text{mit der } q\text{-Entwicklung } w = F(q)\,dq.$$

Wie in 1. kann dann hier geschlossen werden, daß gilt

$$F(q) \subset \bigcap \tilde{S} = R \quad \text{im Fall } 1,$$
$$\sigma^{N-2} F(q) \subset \bigcap \tilde{S} = R \quad \text{im Fall } 2.$$

3. K und $\mathrm{Diff}_A K$ für $N = 6$. Nach Klein–Fricke [8], Bd. I, p. 682ff, ist

$$C(x, y) \quad \text{mit} \quad f(x, y) = y^2 - x^3 - 1 = 0$$

der Körper $\mathfrak{F}_6(C)$, also der Körper der Modulfunktionen 6. Stufe. [8], Bd. II, p. 391, kann entnommen werden, daß x und y rationale Fourierkoeffizienten haben. Daraus kann geschlossen werden, daß

$$k(x, y) = \mathfrak{F}_6(k)$$

gilt. Nach [8], Bd. I, p. 690, ist

$$\frac{dx}{2y} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{d\sqrt[3]{J}}{\sqrt{J-1}}$$

mit

$$\sqrt{J-1} = \frac{3\sqrt{3}g_3}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{J} = \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}.$$

Einsetzen der in 1. wiedergegebenen Entwicklungen von g_2, g_3 und Δ zeigt

$$\frac{dx}{2y} = -\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i q^i\right) dq, \quad b_i \in \mathbf{Z}, \; q = r^{1/6},$$

also

$$\mathrm{Diff}_A \mathfrak{F}_6(k) = \frac{dx}{f_y} A.$$

4. $D(K)$ und $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ für $N = 6$

Satz 3. *Für*

$$K = k(x, y) \; \textit{mit} \; f(x, y) = y^2 - x^3 - 1 = 0,$$

$$k = \begin{cases} \mathbf{Q}, \quad A = \mathbf{Z} & (\textit{Fall } 1), \\ \mathbf{Q}(\alpha) \; \textit{mit} \; \alpha^2 + 3 = 0, \; A = \mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z}, \; \beta = (\alpha - 1)/2 & (\textit{Fall } 2) \end{cases}$$

ist

$$D(K) = a\frac{dx}{2y} A \quad \textit{mit} \quad a = 6 \quad \textit{im Fall } 1,$$
$$a = 2\alpha \; \textit{im Fall } 2$$

und

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) = a\frac{dx}{2y} A \quad \textit{mit} \quad a = 1 \quad \textit{im Fall } 1,$$
$$a = \alpha^{-1} \; \textit{im Fall } 2.$$

Beweis. $D(K)$ ist für den schwierigeren Fall 2 schon in [2] berechnet. Dies Ergebnis und das für den Fall 1 kann mit Hilfe des im Folgenden angegebenen vollständigen Modells von K sofort wieder hergeleitet werden, das hier der Bestimmung von $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ dient. Und zwar wird für jede Primzahl $p \in \boldsymbol{Z}$ ein reguläres über $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ vollständiges Modell angegeben, das durch Aufblasen der Singularitäten von $f(x, y) = 0$ als Kurve über $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ entsteht. Gleichzeitig wird der entsprechende Ausdruck für das Differential

$$w = \frac{dx}{2y}$$

in den jeweiligen Variablen vermerkt.

Für $p \neq 2, 3$ ist ein über $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ vollständiges reguläres Modell von K die projektive Kurve f, nämlich die Gesamtheit der Lokalisierungen s (mit p im maximalen Ideal $\mathfrak{p}$) der Ringe

$$A[x, y] \quad \text{mit} \quad y^2 = x^3+1, \quad w = \frac{dx}{2y},$$

$$A\left[\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right] = A[u, v] \quad \text{mit} \quad uv^2 = 1+u^3, \quad w = \frac{du}{2uv},$$

$$A\left[\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right] = A[u', v'] \quad \text{mit} \quad u' = v'^3+u'^3 \quad w = \frac{du'}{3v'^2}.$$

Für $p = 2$ ist über $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ vollständig die Gesamtheit V_2 der Lokalisierungen s (mit $2 \in \mathfrak{p}$) von

$$A\left[\frac{x}{2}, \frac{y-1}{2}\right] = A[u, v] \quad \text{mit} \quad v^2+v = 2u^3, \quad w = \frac{du}{1+2v},$$

$$A\left[\frac{2}{x}, \frac{y-1}{x}\right] = A[u', v'] \quad \text{mit} \quad u'v'^2+u'^2v' = 2, \quad w = \frac{du'}{2u'v'+u'^2},$$

$$A\left[\frac{2}{y-1}, \frac{x}{y-1}\right] = A[u'', v''] \quad \text{mit} \quad u''+u''^2 = 2v''^3, \quad w = \frac{du''}{6v''^2},$$

$$A\left[\frac{1}{x}, \frac{y-1}{x}\right] = A[u_1, v_1] \quad \text{mit} \quad u_1v_1^2+2u_1^2v_1 = 1, \quad w = \frac{du_1}{2(u_1v_1+u_1^2)},$$

$$A\left[\frac{1}{y-1}, \frac{x}{y-1}\right] = A[u_2, v_2] \quad \text{mit} \quad u_2+2u_2^2 = v_2^3, \quad w = \frac{du_2}{3v_2^2}.$$

Etwa Mehners Regularitätskriterium (s. [7] 303. oder [1] 10.) oder einfaches Abzählen der Minimalzahl der Erzeugenden der maximalen Ideale der $s \in V_2$ zeigt, daß V_2 regulär ist.

Für $p = 3$ sind die Modelle in beiden Fällen verschieden zusammengesetzt. Im Fall 1 sei V_3 die Gesamtheit der Lokalisierungen s (mit $3 \in \mathfrak{p}$) von

$$\boldsymbol{Z}\left[\frac{x-1}{3}, \frac{y}{3}\right] = \boldsymbol{Z}[u, v] \quad \text{mit} \quad v^2 = 3u^3-3u^2+u, \quad w = \frac{du}{2v},$$

$$\boldsymbol{Z}\left[\frac{3}{x-1}, \frac{y}{x-1}\right] = \boldsymbol{Z}[u', v'] \quad \text{mit} \quad uv^2 = 3-3u'+u'^2, \quad w = \frac{du'}{2u'v'},$$

$$\boldsymbol{Z}\left[\frac{1}{x-1}, \frac{y}{x-1}\right] = \boldsymbol{Z}[u_1, v_1] \quad \text{mit} \quad u_1v_1^2 = 1-3u_1+3u_1^2, \quad w = \frac{du_1}{2u_1v_1},$$

$$\boldsymbol{Z}\left[\frac{3}{y}, \frac{x-1}{y}\right] = \boldsymbol{Z}[u'', v''] \quad \text{mit} \quad u'' = 3v''^3-3u''v''^2+u''^2v'',$$

$$w = \frac{du''}{9v''^2-6u''v''+u''^2},$$

$$\boldsymbol{Z}\left[\frac{1}{y}, \frac{x-1}{y}\right] = \boldsymbol{Z}[u_2, v_2] \quad \text{mit} \quad u_2 = v_2^3-3u_2v_2^2+3u_2^2v_2,$$

$$w = \frac{du_2}{3v_2^2-6u_2v_2+3u_2^2v_2}.$$

Im Fall 2 sei V_3' die Gesamtheit der Lokalisierungen s (mit $3 \in \mathfrak{p}$) von

$$A\left[\frac{x-1}{\alpha}, \frac{y}{\alpha^2}\right] = A[u, z] \quad \text{mit} \quad \alpha z^2 = u^3+\alpha u^2-u, \quad w = \frac{du}{2\alpha z},$$

$$A\left[\frac{x-1}{\alpha}, \frac{\alpha^2}{y}\right] = A[u, z'] \quad \text{mit} \quad \alpha = z'^2(u^3+\alpha u^2-u), \quad w = \frac{du}{2\alpha} z',$$

$$A\left[\frac{\alpha}{x-1}, \frac{y}{x-1}\right] = A[u', v'] \quad \text{mit} \quad u'v'^2 = \alpha(1+\alpha u'-u'^2), \quad w = \frac{du'}{2u'v'},$$

$$A\left[\frac{\alpha}{y}, \frac{x-1}{y}\right] = A[u'', v''] \quad \text{mit} \quad u''^2 = \alpha(v''^3+\alpha u''v''^2-u''^2v''),$$

$$w = \frac{du''}{3v''^2+2\alpha u''v''-u''^2},$$

$$A\left[\frac{1}{x-1}, \frac{y}{x-1}\right] = A[u_1, v_1] \quad \text{mit} \quad u_1v_1^2 = 1+\alpha^2u_1-\alpha^2u_1^2, \quad w = \frac{du_1}{2u_1v_1},$$

$$A\left[\frac{1}{y}, \frac{x-1}{y}\right] = A[u_2, v_2] \quad \text{mit} \quad u_2 = v_2^3+\alpha^2u_2v_2^2-\alpha^2u_2^2v_2,$$

$$w = \frac{du_2}{3v_2^2+2\alpha^2u_2v_2-\alpha^2u_2^2}.$$

Beide Modelle werden wie V_2 als regulär erkannt.

Die eben angegebenen Modelle sind Minimalmodelle im Sinne von Néron [9]. Und zwar entspricht

$$\begin{array}{l} V_2 \text{ Nérons Fall } c_3, \\ V_3 \text{ Nérons Fall } c_2, \\ V_3' \text{ Nérons Fall } c_4. \end{array}$$

Nach [1], 2. ist ein Differential $\overline{w}\in\Omega_K^1$ aus $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ genau dann, wenn für ein reguläres vollständiges Modell V von K gilt

$$\mathfrak{d}(\overline{w}|s)\in s \quad \text{für alle lokalen Ringe aus } V.$$

Sei $C = A[u, v]$ mit $g(u, v) = 0$ einer der eben genannten Ringe, aus deren Lokalisierungen s V zusammengesetzt ist, und es sei

$$\overline{w} = b\,du, \qquad b\in K.$$

Aus [1], 1. kann entnommen werden, daß

$$\mathfrak{d}(w|s)\subset s$$

hier gleichbedeutend ist mit

$$\begin{array}{ll} bg_v\in s & \text{im Fall 1,} \\ abg_v\in s & \text{im Fall 2.} \end{array}$$

Überprüfung dieses Kriteriums für die angegebenen Modelle liefert das behauptete Ergebnis.

5. K **und** $\mathrm{Diff}_A K$ **für** $N = 7$. Die im Folgenden zusammengestellten Aussagen werden in Klein–Fricke [8] im Wesentlichen im Bd. II, Abschnitt V, Kap. 1, 2, begründet. Seitenangaben beziehen sich hier, wenn nicht anders vermerkt, auf diesen Band. Auf p. 277 wird definiert

$$X_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha \frac{e^{N\eta_2 u^2/2\omega_2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2N\pi}\sqrt[8]{\Delta^N}}}\, z^{-\alpha} r^{\alpha^2/2N}\,\vartheta_1\!\left(\frac{Nu-\alpha\omega_1}{\omega_2}\pi,\, r^N\right)$$

mit

$$u, \omega_1, \omega_2\in C, \quad \omega = \omega_1/\omega_2, \quad \operatorname{Im}\omega > 0,$$

$$\alpha\in\mathbf{Z}, \quad r = e^{2\pi i\omega}, \quad z = e^{2\pi i u/\omega_2},$$

η_2 eine Funktion von ω_1, ω_2 (s. Bd. I, p. 153),

ϑ_1 die Jacobische Funktion (s. Bd. I, p. 159ff),

Δ wie in 1. schon angegeben,

$X_\alpha(u|\omega_1, \omega_2)$ ist als Funktion von u in der ganzen Ebene holomorph. Die Entwicklungskoeffizienten

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2),\ y_\alpha(\omega_1, \omega_2), \ldots \quad \text{(p. 280)}$$

aus der Entwicklung

$$X_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = z_\alpha(\omega_1, \omega_2) + u y_\alpha(\omega_1, \omega_2) + \ldots$$

sind für ungerade N Modulformen N-ter Stufe und die Quotienten

$$\frac{z_\alpha(\omega_1, \omega_2)}{z_{\alpha'}(\omega_1, \omega_2)} = \frac{z_\alpha}{z_{\alpha'}}(\omega)$$

dann Modulfunktionen N-ter Stufe. Aus

$$\begin{aligned} z_\alpha(\omega_1, \omega_2) &= \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2N\pi}\sqrt[8]{\Delta^N}}}\, r^{\alpha^2/2N}\,\vartheta_1(\alpha\omega\pi, r^N) \\ &= \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2N\pi}\sqrt[8]{\Delta^N}}}\, i\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{\frac{((2m+1)N-2\alpha)^2}{8N}} \qquad \text{(p. 281)} \end{aligned}$$

kann mit etwas Rechnung abgelesen werden, daß die Fourierkoeffizienten der $\frac{z_\alpha}{z_{\alpha'}}(\omega)$ ganzrationale Zahlen sind.

Aus der Relation

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w)\vartheta_1(t+u)\vartheta_1(t-u) \\ &+\vartheta_1(w+u)\vartheta_1(w-u)\vartheta_1(t+v)\vartheta_1(t-v) \\ &+\vartheta_1(u+v)\vartheta_1(u-v)\vartheta_1(t+w)\vartheta_1(t-w) = 0 \end{aligned}$$

(s. p. 268 und Bd. I, p. 161) folgt unter Berücksichtigung von

$$z_{\alpha+N} = z_\alpha, \qquad z_\alpha = -z_{-\alpha};$$

für $N = 7$ die Gleichung

$$(*) \qquad z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1 = 0 \quad \text{(p. 314).}$$

Also sind

$$x = \frac{z_2}{z_3}(\omega), \qquad y = \frac{z_1}{z_3}(\omega)$$

Modulfunktionen 7. Stufe mit

$$(**) \qquad x^3 + xy^3 + y = 0$$

und den q-Entwicklungen ($q = r^{1/7}$)

$$x = \frac{q - q^{15} + \ldots}{1 - q^{21} + \ldots} = q - q^{15} + \ldots,$$

$$y = \frac{q^3 - q^{10} + \ldots}{1 - q^{21} + \ldots} = q^3 - q^{10} + \ldots$$

(Punkte kürzen jeweils höhere q-Potenzen mit ganzzahligen Koeffizienten ab).

Für die Differentiale

$$w_1 = \frac{dx}{1+3xy^2}, \quad w_2 = xw_1, \quad w_3 = yw_1$$

ergeben sich dann die Entwicklungen

$$\begin{aligned} w_1 &= (-1+3q^7+\ldots)dq, \\ w_2 &= (q-3q^8+\ldots)dq, \\ w_3 &= (-q^3+4q^{10}+\ldots)dq, \end{aligned}$$

die ganzzahlige Koeffizienten haben und mit denen aus p. 583 übereinstimmen. Auf Grund der in 6.I noch weiter ausgeführten Symmetrie und Nichtsingularität von $(*)$ bzw. $(**)$ zeigt sich, daß die w_i Differentiale 1. Gattung von $\mathfrak{K}_7 = \mathfrak{F}_7(C)$ sind. Da das Geschlecht von $\mathfrak{K}_7$ drei ist, erzeugen die Quotienten der w_i den Körper $\mathfrak{K}_7$ (s. etwa [4], p. 74). Es gilt also für $k = C$ sowie für Zahlkörper k mit Maximalordnung A

$$K = \mathfrak{F}_7(k) = k(x, y) \quad \text{mit} \quad x^3+xy^3+y = 0,$$

$$\mathrm{Diff}_A K = \sum_{i=1}^{3} w_i A.$$

6. $D(K)$ und $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ für $N = 7$

Satz 4. *Für*

$$K = k(x, y) \quad \textit{mit} \quad f(x, y) = x^3+xy^3+y = 0$$

$$\begin{aligned} &k = \boldsymbol{Q}, && A = \boldsymbol{Z} && && (\textit{Fall } 1), \\ &k = \boldsymbol{Q}(\sigma), && A = \boldsymbol{Z}[\sigma] && \textit{mit} \quad \sigma^6+7\sigma^5+\ldots+7\sigma+7 = 0 && (\textit{Fall } 2) \end{aligned}$$

gilt mit

$$w_1 = dx/f_y, \quad w_2 = xw_1, \quad w_3 = yw_1,$$

$$D(K) = \sum_{j=1}^{3} \overline{w}_j A.$$

Dabei ist

$$\overline{w}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} w_i$$

mit

$$(a_{ji}) = 7E \quad (E = \text{Einheitsmatrix}) \quad \textit{im Fall } 1$$

und

$$(a_{ji}) = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 & 0 \\ -2\sigma^2 & 0 & \sigma^2 \\ 9\sigma & \sigma & -3\sigma \end{pmatrix} \quad \textit{im Fall } 2.$$

Ferner gilt

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) = \frac{1}{7} D(K) \quad \textit{in beiden Fällen.}$$

Beweis. I. Zuerst wird gezeigt, daß die im Satz angegebenen Moduln $D(K)$ bzw. $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ enthalten. Dies geschieht, indem die in den Sätzen 1 und 2 gemachten Abschätzungen verschärft werden. Dazu wird ein spezieller Bewertungsring S von K untersucht:

Mit

$$f_y = 1+3xy^2 = u$$

gilt

(1) $$9(u+2)y^7+(u-1)^3 = 0$$

und mit

$$y-2 = y_1$$

(2) $$9(u+2)(y_1^7+7y_1G)+u^3-3u^2+165\cdot 7u+47\cdot 7^2 = 0$$
$$(G = 2y_1^5+\ldots+3\cdot 2^5 y_1+2^6).$$

Mit

$$\frac{\sigma}{y_1} = z, \quad \frac{u}{\sigma^3} = v, \quad \frac{7}{\sigma^6} = \varepsilon$$

äßt sich (2) schreiben

(3) $$9(\sigma^3v+2)\sigma+9(2+\sigma^3v)z^6\varepsilon\sigma G+v^2z^7(-3+v\sigma^3)+165\varepsilon\sigma^3vz^7+ +47\cdot 7\varepsilon z^7 = 0.$$

Es sei nun

$$S = \boldsymbol{Z}[\sigma, v, z]_{(\sigma, z)}.$$

Des ist ein Stellenring mit maximalem Ideal $\mathfrak{P} = zS$, also sogar ein Bwertungsring. In S gilt

(4) $$\sigma \sim z^7, \quad y_1 \sim x_1 = (x+3) \sim z^6, \quad (x_1-3y_1) \sim y_1^2, \quad u \sim \sigma^3.$$

Wie auch im Folgenden bedeute hier das Zeichen $\sim$ Gleichheit bis auf Einheiten in dem betreffenden Stellenring. Die Relation (3) läßt sich abkürzen zu

(3a) $$\sigma\varepsilon_1+v^2z^7\varepsilon_2 = 0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S\setminus\mathfrak{P}.$$

Diese Relation und

$$\varphi(\sigma) = \sigma^6+7\sigma^5+\ldots+7\sigma+7 = 0$$

definieren $\boldsymbol{Z}[\sigma, v, z]$. Deshalb ist

$$\Omega_S^1 = Sd\sigma+Sdv+Sdz$$

mit den Relationen

$$\varphi'(\sigma)d\sigma = 0,$$

$$Ad\sigma + z^7 E dv + z^8 B dz = 0, \quad A, B, E \in S, \ E \notin \mathfrak{P}.$$

Daraus folgt mit $\varphi'(\sigma)S = \sigma^5 S$

(5) $$SdS = Sdz \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}_1(S) = z^7\sigma^5 S = \sigma^6 S = 7S.$$

Vorübergehend wird K im Fall 1 mit K_0 und dementsprechend $S \cap K_0$ mit S_0 bezeichnet. Für den Fall 2 folgt zunächst aus (4) und (5)

(6) $$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma}\overline{w}_1 &= \sigma^2 w_1 \sim \frac{dz}{z^2} \notin SdS, \\ \frac{1}{\sigma}\overline{w}_2 &= \sigma y_1 w_1 \sim \frac{dz}{z^3} \notin SdS, \\ \frac{1}{\sigma}\overline{w}_3 &= (x_1 - 3y_1)w_1 \sim y_1^2 w_1 \sim \frac{dz}{z^4} \notin SdS \end{aligned}$$

und auch

(6a) $$\mathfrak{d}_1(S)\frac{\overline{w}_i}{\sigma^7} = S\frac{\overline{w}_i}{\sigma} \notin SdS \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

Für den ***Fall*** 1 ergibt sich dann aus $S_0 dS_0 \subset SdS$

(7) $$w_i \notin S_0 dS_0$$

sowie

(7a) $$\mathfrak{d}_1(S_0)\frac{w_i}{7} \notin S_0 dS_0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

Nach 5. läßt sich ein beliebiges Element w aus $\mathrm{Diff}_{\boldsymbol{Z}} K_0$ schreiben als

$$w = \big(\alpha + \beta y_1 + \gamma(x_1 - 3y_1)\big)w_1 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{Z}).$$

Aus der Forderung $w \in S_0 dS_0$ folgt mit (4) und (7) nacheinander $7 \mid \alpha$, $7 \mid \beta$, $7 \mid \gamma$, also

$$D(K_0) \subset 7\,\mathrm{Diff}_{\boldsymbol{Z}} K_0.$$

Für den ***Fall*** 2 hat jedes Element von $\mathrm{Diff}_{\Delta} K$ die Gestalt

$$w = \big(\alpha + \beta y_1 + \gamma(x_1 - 3y_1)\big)w_1 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Delta = \boldsymbol{Z}[\sigma]).$$

Aus der Forderung $w \in SdS$ folgt unter Berücksichtigung von (4) und (6) nacheinander $\sigma \mid \alpha$, $\sigma \mid \beta$, $\sigma^2 \mid \alpha$, $\sigma \mid \gamma$, $\sigma^2 \mid \beta$, $\sigma^3 \mid \alpha$. Damit ist gezeigt

$$D(K) \subset \sum_{j=1}^{3} \overline{w}_j \Delta.$$

Unter Berücksichtigung von (6a) und (7a) ergibt sich analog der angegebene Obermodul für $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$.

II. Die in I. ermittelten Bedingungen sind hinreichend: Mit

$$x' = \frac{y}{x}, \ y' = \frac{1}{x}; \quad x'' = \frac{1}{y}, \ y'' = \frac{x}{y}$$

gilt

$$x^3 + xy^3 + y = x'^3 + x'y'^3 + y' = x''^3 + x''y''^3 + y'' = 0$$

und

$$w_1 = \frac{dx}{1 + 3xy^2} = \frac{y'\,dx'}{1 + 3x'y'^2} = \frac{x''\,dx''}{1 + 3x''y''^2}.$$

Bei naheliegender Ausdehnung der verabredeten Bezeichnungen bedeutet dies

$$w_1 = w_3' = w_2'', \quad w_2 = w_1' = w_3'', \quad w_3 = w_2' = w_1''.$$

Diese Symmetrie und die Tatsache, daß jeder Bewertungsring von K eines der Paare (x, y), (x', y') oder (x'', y'') enthält, zeigen, daß

$$w \in D(K) \quad \text{bzw.} \ \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$$

bereits durch

$$w \in SdS \quad \text{bzw.} \ \in \frac{1}{\mathfrak{d}_1(S)} SdS \quad \text{für alle } S \supset A[x, y]$$

erwiesen wird. Es werden deshalb im Folgenden nur solche S betrachtet.

Aus (2) folgt, daß in Bewertungsringen $S \supset A[x, y]$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$

$$w_1 = \frac{dx}{u} = \frac{-dy}{y^3 + 3x^2} = \frac{-9y^4\,dy}{9y^7 + 3(u-1)^3} = \frac{-9y^4(u+2)\,dy}{(2u+7)(u-1)^2} \in SdS$$

gilt, sofern nicht $u, 7, y_1 \in \mathfrak{P}$ ist. Aus $u = 1 + 3xy^2$ folgt dann überdies, daß $x_1 = x + 3 \in \mathfrak{P}$ gilt. Aus (1) ergibt sich dann

(8) $$w_1 = \frac{dx}{u} = \frac{du}{7}\,\frac{1}{y^2(u+2)} \sim \frac{du}{7}.$$

Falls nicht noch $7/u \in \mathfrak{P}$ ist, gilt also $w_1 \in SdS$. Da die Differentialmoduln der S mit $w_1 \in SdS$ die im Satz angegebenen Größen enthalten, werden nur noch solche S betrachtet, für die gilt

(9) $$x_1, y_1, u, 7/u \in \mathfrak{P}.$$

Bestimmung von $D(K)$:

Im Fall 1 kann aus (8) wegen der erwähnten Symmetrie sofort abgelesen werden

$$7w_1 \in D(K)$$

und folglich auch

$$7w_i \in D(K) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Im Fall 2 ist $\frac{7}{\sigma^6} = \varepsilon \in S \setminus \mathfrak{P}$ für alle S und deshalb mit (8)

$$\text{(10)} \qquad \overline{w}_1 = \sigma^3 w_1 \sim \frac{\sigma^3}{u}\, dx \sim \frac{du}{\sigma^3}, \quad \text{also} \quad \overline{w}_1 \in SdS,$$

da entweder $\frac{u}{\sigma^3}$ oder $\frac{\sigma^3}{u} \in S$ ist. Die umgeschriebene Ausgangsgleichung

$$35(x_1 - y_1) - 9x_1^2 + 12x_1y_1 - 18y_1^2 + x_1^3 + 6x_1y_1^2 - 3y_1^3 + x_1y_1^3 - 49 = 0$$

zeigt, daß für S mit (9) $x_1 \sim y_1$ gilt. Aus

$$\text{(11)} \qquad u = 35 - 12(x_1 - 3y_1) + 3y_1(3y_1 - 4x_1) - 3x_1y_1^3$$

und (10) kann abgelesen werden, daß

$$\overline{w}_3 \in SdS \text{ und sogar } \frac{1}{\sigma}\,\overline{w}_3 = (x_1 - 3y_1)w_1 \text{ sowie } y_1^2 w_1 \in SdS$$

jedenfalls wahr ist, solange nicht $(x_1 - 3y_1) \sim y_1^2$ gilt. Dann ist aber

$$\overline{w}_3 \sim y_1^2 \sigma \frac{dy_1}{u}.$$

Wegen $\overline{w}_2 = \frac{1}{z}\overline{w}_1$ und (10) kann daraus entnommen werden, daß nur noch die S mit $z = \sigma/y_1$ und $v_1 = u/y_1^2\sigma$ aus $\mathfrak{P}$ untersucht werden müssen. In diesen S gilt

$$\sigma\varepsilon_1 + v_1^2 z^3 \varepsilon_2 = 0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S \setminus \mathfrak{P} \quad \text{(s. (3) und (3a))},$$

woraus mit

$$dz = d\left(\frac{\sigma}{y_1}\right) = -\frac{\sigma}{y_1^2}\, dy_1$$

folgt

$$\overline{w}_3 \sim \frac{\sigma y_1^2}{u}\, dy_1 = \frac{y_1^2}{\sigma v_1}\, dz \sim v_1 z dz \in SdS \text{ sowie } \overline{w}_2 \sim z\overline{w}_3 \in SdS.$$

Bestimmung von $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$:

Hier wird die folgende allgemeine Bemerkung verwandt: *p sei eine Primzahl und S ein Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{P} = \pi S$ und*

$$pS = \mathfrak{P}^e \quad \textit{mit} \quad p \nmid e.$$

Dann gilt

(i) $\frac{df}{f} \in SdS$ *für alle* $f \in K \setminus 0$,

(ii) $\mathfrak{d}_1(S) \subset \frac{p}{q} S$ *für alle* $q \in \mathfrak{P} \setminus 0$.

Ist nämlich

$$f = \varepsilon\pi^n \quad \text{und} \quad p = \varepsilon'\pi^e \quad \text{mit} \quad \varepsilon, \varepsilon' \in S \setminus \mathfrak{P},\ n \in \mathbf{Z},$$

dann gilt

$$df = d\varepsilon \cdot \pi^n + n\varepsilon\pi^{n-1} d\pi \quad \text{und} \quad 0 = d\varepsilon' \cdot \pi^e + e\varepsilon'\pi^{e-1} d\pi.$$

Das hat zur Folge

$$0 = \frac{d\pi}{\pi} + \frac{d\varepsilon'}{e\varepsilon'} \quad \text{also} \quad \frac{d\pi}{\pi} \in SdS$$

und damit

$$\frac{df}{f} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{n\,d\pi}{\pi} \in SdS, \quad \text{also (i)}.$$

Nach (*) in 2. ist $\mathfrak{d}_1(S) = \mathfrak{P}^{e-1}S$, woraus (ii) sofort abgelesen werden kann.

Bei der Bestimmung von $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right)$ genügt es wieder, nur mehr die Bewertungsringe S zu betrachten, für die (9) gilt:

Fall 1: Für $\mathfrak{P}^e = 7S$ mit $7 \mid e$ ist nach (*) in 2.

$$\mathfrak{d}_1(S) w_1 \subset 7w_1 S \subset SdS,$$

und für $7 \nmid e$ ist nach (i) und (ii)

$$\mathfrak{d}_1(S) w_1 \subset \frac{7}{y_1}\frac{dy_1}{u} S = \frac{7}{u}\frac{dy_1}{y_1} S \subset SdS.$$

Mit der schon erwähnten Symmetrieüberlegung ergibt sich daraus

$$w_i \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{d}}\right) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

Fall 2: Für $\mathfrak{P}^e = 7S$ mit $7|e$ ist wegen $\overline{w}_i \in D(K)$ und $(*)$ in 2.

$$\mathfrak{d}_1(S)\,\frac{\overline{w}_i}{7} \subset SdS \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

Für $7 \nmid e$ wird ähnlich wie beim Nachweis von $\overline{w}_i \in D(K)$ argumentiert: Da $\frac{u}{\sigma^3}$ oder $\frac{\sigma^3}{u}$ in S liegt, gilt wegen (i) und (ii)

$$\mathfrak{d}_1(S)\,\frac{\overline{w}_1}{7} = \mathfrak{d}_1(S)\,\frac{w_1}{\sigma^3} = \mathfrak{d}_1(S)\,\frac{y_1}{7}\cdot\frac{\sigma^3}{u}\cdot\frac{dy_1}{y_1} = \mathfrak{d}_1(S)\,\frac{u}{\sigma^3}\cdot\frac{du}{u} \subset SdS.$$

Wie bei der Berechnung von $D(K)$ sind jetzt nur noch die S mit $z, v_1 \in \mathfrak{P}, (x_1 - 3y_1) \sim y_1^2$ interessant. Und es genügt auch hier zu zeigen, daß für diese S

$$\mathfrak{d}_1(S)\,\frac{\overline{w}_3}{7} \subset SdS$$

gilt. Das aber ist wegen

$$\mathfrak{d}_1(S)\,\frac{\overline{w}_3}{7} = \frac{\mathfrak{d}_1(S)}{7}\,v_1 z dz$$

nach (ii) der Fall.

Literaturverzeichnis

[1] R. Berndt, *Differentialintegritäten endlich erzeugbarer Körper*, Math. Ann. 212 (1975), S. 246–270.
[2] — *Beiträge zur Arithmetik der elliptischen Körper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37 (1972), S. 246–253.
[3] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris 1964.
[4] C. Chevalley, *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable*, Amer. Math. Soc. Surveys n° IV, New York 1951.
[5] E. Kähler, *Über rein algebraische Körper*, Math. Nachr. 5 (1951), S. 69–92.
[6] — *Algebra und Differentialrechnung*, Bericht über die Mathematiker Tagung in Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953.
[7] — *Geometria aritmetica*, Ann. Mat. Pura Appl. 45 (1958).
[8] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Bd. I und II, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1890/92.
[9] A. Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. n° 21, 1964.
[10] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press, 1971.

Eingegangen am 4. 11. 1975
und in revidierter Form am 16. 2. 1976 (786)

ACTA ARITHMETICA
XXXIII (1977)

On the density of the zeros of the Dedekind Zeta-function

by

D. R. HEATH-BROWN (Cambridge)

1. Introduction. The Dedekind Zeta-function is defined by

$$\zeta_K(s) = \sum 1/(N\mathfrak{a})^s$$

where K is an algebraic number field, the summation is over all integral ideals $\mathfrak{a}$ of K, $N\mathfrak{a}$ denotes the norm of $\mathfrak{a}$ and s is an arbitrary complex variable. The series converges absolutely for $\sigma > 1$, where $s = \sigma + it$ in the usual notation; moreover the function has an analytic continuation to the whole complex plane, from which one sees in particular, that it is regular except for a simple pole at $s = 1$. The Dedekind Zeta-function is a generalization of the Riemann Zeta-function, $\zeta(s)$, which is $\zeta_K(s)$ with $K = \boldsymbol{Q}$, the rational field; as is well known the Riemann Zeta-function gives information about the distribution of the rational primes, and the Dedekind Zeta-function can be used similarly to furnish results on the distribution of the prime ideals in K. For the basic properties of $\zeta_K(s)$ we refer to Landau's tract [11].

Our main object is to establish an estimate for the density of zeros of the Dedekind Zeta-function in the range $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, which is better than any given hitherto. Let $N_K(\sigma, T)$ be the number of zeros $\varrho = \beta + i\gamma$ of $\zeta_K(s)$ with $|\gamma| \leqslant T$, $\beta \geqslant \sigma$, the zeros being counted according to multiplicity. It is well known, see [11], that

$$N_K(0, T) \sim \frac{k}{\pi}\, T\log T \quad \text{as} \quad T \to \infty, \tag{1}$$

where k is the degree of K, and so in particular

$$N_K(\tfrac{1}{2}, T) \ll T\log T, \tag{2}$$

where, as later, constants implied by $\ll$ (or $\gg$) depend only on K. We shall prove