ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

Eine asymptotische Formel für Summen über die reziproken Werte additiver Funktionen

von

EVELYN BRINITZER (München)

1. Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen f mit der Eigenschaft

$$\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^{\beta}}\right)^{\gamma} \leqslant f(n)n^{-\alpha} \leqslant \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^{\beta}}\right)^{-\gamma} \tag{1.1}$$

für alle natürlichen Zahlen n; α, β, γ reell, $\alpha > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$ und $\gamma > \alpha$ (1). Für f aus $\mathfrak{F}$ sei $n_f = \min\{n;\ f(m) > 1 \text{ für alle } m \geqslant n\}$.

De Koninck und Galambos [2] leiteten eine asymptotische Entwicklung für $\sum\limits_{2\leqslant n\leqslant x}\dfrac{1}{\log\sigma_1(n)}$ her. Ziel dieser Note ist eine asymptotische Formel für $\sum\limits_{n_f\leqslant n\leqslant x}\dfrac{1}{\log f(n)}$, wobei f aus $\mathfrak{F}$ ist.

SATZ. *Ist f aus $\mathfrak{F}$, so gilt mit der Funktion*

$$F(t) = \frac{1}{\alpha t+1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^m}\left(\frac{f(p^m)}{p^{\alpha m}}\right)^{t}\right) \qquad (-1/\gamma \leqslant t \leqslant 0) \tag{1.2}$$

für jede natürliche Zahl r und für $x\to\infty$

$$\sum_{n_f\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log f(n)} = x\sum_{m=1}^{r}\frac{(-1)^{m-1}F^{(m-1)}(0)}{(\alpha\log x)^m} + O_r\left(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\right). \tag{1.3}$$

Genauer ist für $\varepsilon > \max(0, \beta+\alpha/\gamma-1)$

$$\sum_{n_f\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log f(n)} = x\int\limits_{-1/\gamma}^{0}F(t)x^{\alpha t}\,dt + O\left(\frac{x}{\log x}(x^{-\beta+\varepsilon}+x^{-\alpha/\gamma})\right). \tag{1.4}$$

---

(1) Die Eulersche φ-Funktion sowie die Teilerfunktionen $\sigma_\lambda(n) = \sum_{d|n} d^{\lambda}$, $\lambda > 0$, sind z.B. zahlentheoretische Funktionen aus $\mathfrak{F}$.

2. Bezeichnet $\gamma(n) = \prod_{p|n} p$ den größten quadratfreien Teiler von n, so gilt das folgende

Lemma 1 ([1], Theorem 1). *Für $x\to\infty$ ist*

$$\log \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\gamma(n)} = \left(2\sqrt{2}+o(1)\right)\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Aus (2.1) folgt für $x \geqslant 1$ und beliebiges $\delta > 0$

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\gamma(n)} = O_\delta(x^\delta). \tag{2.2}$$

Lemma 2. *Ist f aus $\mathfrak{F}$ und*

$$h_t(n) = \sum_{d|n}\left(\frac{f(d)}{d^a}\right)^t \mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad \text{für} \quad -1/\gamma \leqslant t \leqslant 0; \tag{2.3}$$

dann erhält man für $x\geqslant 1$ und $\varepsilon > 0$ die folgenden Abschätzungen

$$\sum_{n\leqslant x} |h_t(n)| = O(x^{1-\beta+\varepsilon}), \tag{2.4}$$

$$\sum_{n> x} \frac{h_t(n)}{n} = O(x^{-\beta+\varepsilon}). \tag{2.5}$$

Beweis. Sind $c_1 = c_1(\varepsilon)$ und $c_2 = c_2(\varepsilon, \beta)$ geeignete positive Konstanten, dann ist

$$\frac{1}{p^\beta} + \frac{1}{p^\beta - 1} \leqslant \frac{c_2}{p^{\beta-\varepsilon/2}} \quad \text{für} \quad p \leqslant c_1 \tag{2.6}$$

und

$$\frac{1}{p^\beta} + \frac{1}{p^\beta - 1} \leqslant \frac{1}{p^{\beta-\varepsilon/2}} \quad \text{für} \quad p > c_1. \tag{2.7}$$

Somit ergibt sich aus (2.3), (1.1), (2.6) und (2.7) für $m\geqslant 1$ und $-1/\gamma \leqslant t \leqslant 0$

$$h_t(p^m) = \frac{1}{\left(\dfrac{f(p^m)}{p^{am}}\right)^{|t|}} - \frac{1}{\left(\dfrac{f(p^{m-1})}{p^{a(m-1)}}\right)^{|t|}} \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_2}{p^{\beta-\varepsilon/2}} & \text{für} \quad p\leqslant c_1, \\[2ex] \dfrac{1}{p^{\beta-\varepsilon/2}} & \text{für} \quad p > c_1. \end{cases}$$

Die entsprechende Abschätzung nach unten erhält man analog. Wegen der Multiplikativität der Funktion h_t ist mit einer geeigneten Konstanten $c_3 = c_3(\varepsilon, \beta)$

$$|h_t(n)| \leqslant c_3 \prod_{p|n} \frac{1}{p^{\beta-\varepsilon/2}} = c_3 \gamma(n)^{-\beta+\varepsilon/2} \tag{2.8}$$

und damit

$$\sum_{n\leqslant x} |h_t(n)| \leqslant c_3 \sum_{n\leqslant x} \gamma(n)^{-\beta+\varepsilon/2} \leqslant c_3 x^{1-\beta+\varepsilon/2} \sum_{n\leqslant x} \gamma(n)^{-1}.$$

Wählt man nun in Lemma 1 $\delta = \varepsilon/2$, so folgt (2.4).

Aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_t(n)/n$ und der Abschätzung

$$\sum_{n>x} \frac{|h_t(n)|}{n} = \sum_{m > \frac{\log x}{\log 2}} \; \sum_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} \frac{|h_t(n)|}{n} \leqslant \sum_{m > \frac{\log x}{\log 2}} \frac{1}{2^m} \sum_{n \leqslant 2^{m+1}} |h_t(n)|$$

ergibt sich mit (2.4) Behauptung (2.5).

Lemma 3. *Ist f aus $\mathfrak{F}$ und $-1/\gamma \leqslant t \leqslant 0$, dann gilt für $x\geqslant 1$ und $\varepsilon > \max(0, \beta + a/\gamma - 1)$ gleichmäßig in t*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)^t = F(t) x^{1+at} + O(x^{1+at-\beta+\varepsilon}). \tag{2.9}$$

Beweis. Aus der Beziehung

$$\left(\frac{f(n)}{n^a}\right)^t = \sum_{d|n} h_t(d) \tag{2.10}$$

folgt unter Benutzung von Lemma 2

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant x}\left(\frac{f(n)}{n^a}\right)^t &= \sum_{dm\leqslant x} h_t(d) = x \sum_{d\leqslant x} \frac{h_t(d)}{d} + O\Big(\sum_{d\leqslant x} |h_t(d)|\Big) \\ &= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h_t(d)}{d} + O(x^{1-\beta+\varepsilon}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Partielle Summation liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant x} f(n)^t &= x^{at} \sum_{n\leqslant x}\left(\frac{f(n)}{n^a}\right)^t - \int_1^x \Big(\sum_{n\leqslant u}\left(\frac{f(n)}{n^a}\right)^t\Big) at u^{at-1} du \\ &= \frac{1}{at+1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h_t(d)}{d} x^{1+at} + O(x^{1+at-\beta+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Beachtet man noch die Multiplikativität der Funktion h_t und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_t(n)/n$, dann erhält man (2.9).

3. Beweis des Satzes. Es gilt

$$(3.1)\qquad \int_{-1/\gamma}^{0}\Big(\sum_{n_f\leqslant n\leqslant x} f(n)^t\Big)dt = \sum_{n_f\leqslant n\leqslant x}\int_{-1/\gamma}^{0} f(n)^t\,dt = \sum_{n_f\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log f(n)} - \sum_{n_f\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{f(n)^{1/\gamma}\log f(n)}.$$

Ist c_4 eine genügend große positive Konstante, so gilt $f(n)\geqslant n^{\alpha/2}$ für alle $n\geqslant c_4$. Daraus folgt nun mit partieller Summation und Lemma 3

$$(3.2)\qquad \sum_{n_f\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{f(n)^{1/\gamma}\log f(n)} = \Big(\sum_{n_f\leqslant n< c_4} + \sum_{c_4\leqslant n\leqslant x}\Big)\frac{1}{f(n)^{1/\gamma}\log f(n)} = O(1) + O\Big(\sum_{c_4\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{f(n)^{1/\gamma}\log n}\Big) = O\Big(\frac{x^{1-\alpha/\gamma}}{\log x}\Big).$$

Weiter ist unter Anwendung von Lemma 3

$$(3.3)\qquad \int_{-1/\gamma}^{0}\Big(\sum_{n_f\leqslant n\leqslant x} f(n)^t\Big)dt = \int_{-1/\gamma}^{0}\big(F(t)x^{1+\alpha t} + O(x^{1+\alpha t-\beta+\varepsilon})\big)dt = x\int_{-1/\gamma}^{0}F(t)x^{\alpha t}\,dt + O\Big(\frac{x^{1-\beta+\varepsilon}}{\log x}\Big).$$

Somit ergibt (3.1) zusammen mit (3.2) und (3.3) die Behauptung (1.4).

Da die Funktion F im abgeschlossenen Intervall $[-1/\gamma, 0]$ beliebig oft differenzierbar ist, folgt (1.3) durch partielee Integration aus (1.4).

4. Eine Anwendung des Satzes ist das folgende

KOROLLAR (²). *Für jede natürliche Zahl r und für $x\to\infty$ gilt*

$$(4.1)\qquad \sum_{2\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log\sigma_1(n)} = x\sum_{m=1}^{r}\frac{(-1)^{m-1}F^{(m-1)}(0)}{(\log x)^m} + O_r\Big(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\Big).$$

Genauer ist für beliebiges δ, $0<\delta<1/2$,

$$(4.2)\qquad \sum_{2\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log\sigma_1(n)} = x\int_{-(1-2\delta)/2}^{0}F(t)x^t\,dt + O\Big(\frac{x^{1/2+\delta}}{\log x}\Big)$$

mit der Funktion

$$F(t) = \frac{1}{t+1}\prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^m}\Big(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^m}\Big)^t\Big)$$

für $-(1-2\delta)/2\leqslant t\leqslant 0$.

(²) vgl. de Koninck und Galambos [2], S. 161.

Beweis. Mit $\alpha=1$, $\beta=1$ und $\gamma=2/(1-2\delta)$, $0<\delta<1/2$, erfüllt die Funktion $\sigma_1(n)$ die Bedingung (1.1). Damit folgt (4.1) aus (1.3) und (4.2) aus (1.4), wählt man $\varepsilon = 1/\gamma+2\delta$.

Literaturverzeichnis

[1] N. G. de Bruijn, *On the number of integers $\leqslant x$, whose prime factors divide n*, Illinois J. Math. 6 (1962), S. 137–141.

[2] J. M. de Koninck, and J. Galambos, *Sums of reciprocals of additive functions*, Acta Arith. 25 (1974), S. 159–164.

[3] J. M. de Koninck, *On a class of arithmetical functions*, Duke Math. J. 39 (1972), S. 807–818.

Eingegangen am 8. 9. 1975 (759)