ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1 de suites $(f(n))_{n\in N}$ et $(f(p_n))_{n\in N}$

par

PHILIPPE TOFFIN (Caen)

Introduction. L'équirépartition de la suite $(n^c)_{n\in N}$ est bien connue (pour $c>0$ non entier). Celle de $(a_h n^h+\ldots+a_0)^c_{n\in N}$ lorsque $a_h>0$ et $hc>0$ non entier, se traite à partir de l'extension du théorème de Fejer donnée par Niederreiter et Kuipers dans [3].

G. Rauzy a étudié d'autre part l'équirépartition des suites $(f(n))_{n\in N}$ lorsque f est une fonction entière réelle dont les dérivées à l'origine décroissent rapidement. Nous donnons un théorème qui permet de regrouper tous ces cas. Puis nous en déduisons des conditions suffisantes plus simples pour que $(f(n))_{n\in N}$ soit équirépartie modulo 1.

L'équirépartition de la suite $(p_n a)_{n\in N}$ a été démontrée pour a irrationnel par I. Vinogradov. Puis une condition nécessaire et suffisante pour que $(a_h p_n^h+\ldots+a_0)_{n\in N}$ soit équirépartie modulo 1 a été trouvée par I. Vinogradov et par G. Rhin. Nous donnons ici des conditions suffisantes sur les dérivées de f pour que $(f(p_n))_{n\in N}$ soit équirépartie modulo 1. Nous donnons un critère simple d'équirépartition de $(a_h p_n^h+\ldots+a_0)^c_{n\in N}$ lorsque c est réel >0.

Notations. Pour x réel, $e(x)$ désigne $e^{2i\pi x}$ et $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche.

Si f et g sont deux fonctions définies pour $x\geqslant x_0$, f à valeurs dans C, $g\geqslant 0$, les notations $f=O(g)$ et $f\ll g$ signifient qu'il existe $A>0$ et $x_1\geqslant x_0$ tels que pour tout $x\geqslant x_1$, on ait

$$|f(x)|\leqslant Ag(x).$$

Nous donnons ici une amélioration du lemme fondamental démontré dans l'appendice de [2].

LEMME 0. *Il existe des réels strictement positifs A, B, C tels que:*
— *pour tout polynome réel $f(x)=a_n x^n+\ldots+a_0$ de degré $n\geqslant 2$,*
— *pour tout entier P tel que $0<2n|a_n|P\leqslant 1$ et pour tout entier N,*

— *pour tout réel λ situé dans* $]0,1]$, *on ait*:

$$\Big|\sum_{x=N+1}^{N+P} e\big(f(x)\big)\Big| \leqslant A\exp\big(Bn(\log^2 n+\log^2\lambda)\big)P^{1-\frac{\lambda}{18n^2\log\frac{n}{\lambda}}}\log P+\frac{C}{|a_n|^{\frac{1}{n-\lambda}}}.$$

Démonstration. Posons $S=\sum_{x=N+1}^{N+P} e\big(f(x)\big)$. Le lemme est trivial si $P\leqslant 2$ ou $\frac{1}{|a_n|^{1/(n-\lambda)}}>P/2$. Nous supposons donc dans ce qui suit $\frac{1}{|a_n|^{1/(n-\lambda)}}\leqslant P/2$.

Soit P_1 un entier compris entre 2 et $P/2$.

Posons $S^*(y)=\sum_{x=1}^{P_1} e\big(f(x+y)-f(y)\big)$. On a alors

$$|S|\leqslant\frac{1}{P_1}\sum_{y=N}^{N+P-P_1}|S^*(y)|+P_1.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a pour tout entier l non nul:

$$|S|^{2l}\leqslant 4^l P_1^{-2l}P^{2l-1}\sum_{y=N}^{N+P-P_1}|S^*(y)|^{2l}+4^l P_1^{2l}.$$

De plus

$$f(x+y)-f(y)=Y_1x+Y_2x^2+\ldots+Y_nx^n \quad\text{avec}\quad Y_i=\frac{f^{(i)}(y)}{i!},\quad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Soient: ϱ un réel strictement positif qui sera déterminé ultérieurement et

$$\Omega_y=\{(a_1,\ldots,a_n)\in\boldsymbol{R}^n,\ \forall i\in\{1,\ldots,n\},\ |a_i-Y_i|\leqslant\tfrac12 P_1^{-i}P^{-\varrho}\},$$

$$T(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{x=1}^{P_1}e(a_1x+\ldots+a_nx^n).$$

Pour tout $(a_1,\ldots,a_n)$ de Ω_y, on a

$$|S^*(y)-T(a_1,\ldots,a_n)|\leqslant nP_1P^{-\varrho}$$

et

$$|S^*(y)|^{2l}\leqslant 4^l|T(a_1,\ldots,a_n)|^{2l}+4^l n^{2l}P_1^{2l}P^{-2\varrho l}.$$

En intégrant sur Ω_y, on obtient:

$$|S^*(y)|^{2l}\leqslant 4^l\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_y}\int_0^1\ldots\int_0^1|T(a_1,\ldots,a_n)|^{2l}\tau_y(a_1,\ldots,a_n)\,da_1\ldots da_n+(2nP_1P^{-\varrho})^{2l}$$

où τ_y est la fonction caractéristique de Ω_y modulo $\boldsymbol{Z}^n$. D'où, en posant pour simplifier l'écriture, $a=(a_1,\ldots,a_n)$:

$$\text{(1)}\quad \sum_{y=N}^{N+P-P_1}|S^*(y)|^{2l}\leqslant 4^lP_1^{n(n+1)/2}P^{\varrho n}\int_{[0,1]^n}|T(a)|^{2l}\sum_{y=N}^{N+P-P_1}\tau_y(a)\,da+P(2nP_1P^{-\varrho})^{2l}.$$

Nous allons majorer $A(a)=\sum_{y=N}^{N+P-P_1}\tau_y(a)$.

Soit y_0 dans $[N, N+P-P_1]$. Il suffit de chercher un majorant A uniforme par rapport à y_0 du nombre d'entiers y dans $[N, N+P-P_1]$ tels que

$$\|Y_{n-1}(y)-Y_{n-1}(y_0)\|\leqslant\tfrac12 P_1^{-(n-1)}P^{-\varrho}.$$

Or

$$\|Y_{n-1}(y)-Y_{n-1}(y_0)\|=\|na_n(y-y_0)\|$$

et par hypothèse, $2n|a_n|P\leqslant 1$. On peut donc prendre

$$A=P_1^{-(n-1)}P^{-\varrho}|a_n|^{-1}.$$

(1) donne alors:

$$\sum_{y=N}^{N+P-P_1}|S^*(y)|^{2l}\leqslant\frac{4^l}{|a_n|}P_1^{n(n+1)/2-(n-1)}P^{\varrho(n-1)}\int_{[0,1]^n}|T(a)|^{2l}da+P(2nP_1P^{-\varrho})^{2l}.$$

D'après [6], si $n\geqslant 2$, r entier strictement positif,

$$l\geqslant\tfrac14 n(n+1)+rn,\qquad \delta_r=\tfrac12 n(n+1)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^r;\qquad K=(48)^{2l}(l!)^2l^nn^{\frac{1}{2}n^{-}n-}$$

on a

$$\int_{[0,1]^n}|T(a)|^{2l}da\leqslant K^r(\log^rP_1)P_1^{2l-n(n+1)/2+\delta_r}.$$

D'où

$$\text{(2)}\quad |S^{2l}|\leqslant 16^lK^r(\log^rP_1)|a_n|^{-1}P_1^{\delta_r-(n-1)}P^{2l-1+\varrho(n-1)}+16^ln^{2l}P^{2l(1-\varrho)}+4^lP_1^{2l}.$$

Nous prenons:

$$r=\left[\frac{\log\frac{n(n+1)}{\lambda}}{-\log\Big(1-\frac{1}{n}\Big)}+1\right],\quad l=\left[\frac14 n(n+1)+nr+\frac12\right],\quad \varrho=\frac{\lambda}{2(2l+n-1)}.$$

Majorons δ_r, $(2l+n-1)$, l, $1-\varrho$ et (K^r+n^{2l})

$$\log\delta_r = -\log 2+\log n(n+1)+r\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant -\log\frac{2}{\lambda}$$

car $r\geqslant\dfrac{\log\dfrac{n(n+1)}{\lambda}}{-\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}$. D'où:

$$\delta_r\leqslant\lambda/2. \tag{3}$$

$$l\leqslant\frac{1}{4}n(n+1)+nr+\frac{1}{2}$$

or

$$r\leqslant\frac{\log\dfrac{n(n+1)}{\lambda}}{-\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}+1 \quad \text{et} \quad -\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}.$$

D'où:

$$2l+n-1\leqslant n\left(\frac{n+1}{2}+2n\log\frac{n(n+1)}{\lambda}+3\right).$$

Montrons qu'il existe $A_0>0$ tel que pour tout $n\geqslant 2$ et tout λ situé dans $]0,1]$, on ait:

$$\frac{n+1}{2}+2n\log\frac{n(n+1)}{\lambda}+3\leqslant A_0 n\log\frac{n}{\lambda}.$$

Il suffit de réaliser

$$\frac{n+7}{2n}\leqslant(A_0-4)\log\frac{n}{\lambda}+\log\frac{n^4}{\lambda^4}\frac{\lambda^2}{n^2(n+1)^2}$$

et même:

$$\frac{n+7}{2n}+2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant(A_0-4)\log n.$$

Un calcul simple montre qu'on peut prendre $A_0=9$. D'où

$$2l+n-1\leqslant 9n^2\log\frac{n}{\lambda}, \tag{4}$$

$$l\leqslant 5n^2\log\frac{n}{\lambda} \tag{5}$$

et d'après (4):

$$1-\varrho\leqslant 1-\frac{\lambda}{18n^2\log\dfrac{n}{\lambda}}. \tag{6}$$

Soit $X=\log K$.

$$X\leqslant 2l\log 48+2l\log l+n\log l+\tfrac{1}{2}n(n-1)\log n.$$

Comme $l\geqslant n$, et d'après (5), il existe $A_1>0$ tel que

$$X\leqslant A_1 n^2(\log^2 n+\log^2\lambda).$$

Puisque $r/2l\leqslant 1/n$; il existe $B>0$ tel que

$$K^r+n^{2l}\leqslant(K^{r/2l}+n)^{2l}\leqslant\left\{\exp\left(Bn(\log^2 n+\log^2\lambda)\right)\right\}^{2l}. \tag{7}$$

Nous pouvons maintenant majorer $|S|^{2l}$ en utilisant (2). Nous posons

$$E = |a_n|^{-1}P_1^{\delta_r-(n-1)}P^{2l-1+\varrho(n-1)}.$$

Nous distinguons deux cas:

1) $2^{n-\lambda}\leqslant\dfrac{1}{|a_n|}$, soit $2\leqslant\dfrac{1}{|a_n|^{1/(n-\lambda)}}\leqslant\dfrac{P}{2}$. Soit $P_1=\left[\dfrac{1}{a_n^{1/(n-\lambda)}}\right]$.

Comme $\delta_r-(n-1)<0$ et $[x]\geqslant x/2$ pour $x\geqslant 1$:

$$E\leqslant 2^n|a_n|^{-\frac{1}{n-\lambda}(\delta_r+1-\lambda)}P^{2l-1+\varrho(n-1)}\leqslant 2^n P^{\delta_r+1-\lambda+2l-1+\varrho(n-1)}.$$

D'après (3) et le choix de ϱ, on obtient

$$E\leqslant 2^n P^{2l(1-\varrho)}$$

et

$$|S|^{2l}\leqslant(32)^{2l}(K^r+n^{2l})(\log^r P)P^{2l(1-\varrho)}+4^l P_1^{2l}.$$

D'après (6) et (7) on obtient finalement

$$|S|\leqslant\exp\left(Bn(\log^2 n+\log^2\lambda)\right)(\log P)P^{1-\frac{\lambda}{18n^2\log\frac{n}{\lambda}}}+\frac{1}{|a_n|^{1/(n-\lambda)}}.$$

2) $\dfrac{1}{|a_n|}<2^{n-\lambda}<2^n$. Nous prenons

$$P_1=[P^{1-1/ul}] \quad \text{avec} \quad u=\frac{\log 3}{l\log 2}.$$

Alors $2^{ul}\leqslant 3\leqslant P$ et $P^{1-1/ul}\leqslant P/2$. Alors $E\leqslant 2^{2n}P^{2l(1-\varrho)}$. Comme $P_1^{2l}\leqslant P^{2l(1-\varrho)}$, on obtient la même majoration que celle obtenue dans le 1). D'où le résultat.

I. Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1 de $(f(n))_{n\in N}$.

Dans tout ce paragraphe, $(P_k)_{k\in N}$ et $(Q_k)_{k\in N}$ désignent deux suites à valeurs dans $\boldsymbol{R}^+$ vérifiant les conditions:

$$(\mathrm{S})\begin{cases}\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = \lim\limits_{k\to+\infty} Q_k = +\infty;\\ (Q_k)_{k\in N} \text{ est non décroissante;}\\ \lim\limits_{k\to+\infty} (Q_{k-1}-P_k) = +\infty.\end{cases}$$

f est une application de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\boldsymbol{R}$ et pour N entier, on pose:

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N} e\big(f(n)\big).$$

LEMME 1.

$$\left.\begin{cases}\forall\varepsilon>0,\ \exists k_0(\varepsilon)\in \boldsymbol{N},\ \forall k\geqslant k_0(\varepsilon),\ \forall N\in[Q_{k-1}, Q_k],\\ (1)\qquad |S(N)-S(N-[P_k])|\leqslant \varepsilon[P_k]\end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{S(N)}{N} = 0.$$

Démonstration. On montre par récurrence sur k:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists C(\varepsilon)\forall N\in\boldsymbol{N},\ |S(N)|\leqslant\varepsilon N+C(\varepsilon).$$

L'hypothèse définit $k_0(\varepsilon)$, tel que (1) soit vrai et $Q_{k-1}>P_k$ pour $k\geqslant k_0(\varepsilon)$. On prend $C(\varepsilon) = Q_{k_0(\varepsilon)}$ alors

$$\forall N\in[0, Q_{k_0(\varepsilon)}],\ |S(N)|\leqslant \varepsilon N+C(\varepsilon).$$

Soit $k\geqslant k_0(\varepsilon)$ et supposons pour tout entier N de $[0, Q_{k-1}]$, on ait $|S(N)|\leqslant \varepsilon N+C(\varepsilon)$.

Soit $N\in\,]Q_{k-1}, Q_k]$. Il existe ϱ entier tel que

$$N-(\varrho+1)[P_k] < Q_{k-1}\leqslant N-\varrho[P_k].$$

Alors

$$|S(N)-S(N-[P_k])|\leqslant\varepsilon[P_k]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\big|S(N-\varrho[P_k])-S\big(N-(\varrho+1)[P_k]\big)\big|\leqslant\varepsilon[P_k]$$

et

$$|S(N)-(\varrho+1)[P_k]|\leqslant\varepsilon[P_k]+C(\varepsilon).$$

D'où

$$|S(N)|\leqslant \varepsilon N+C(\varepsilon)$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 1. *On suppose qu'il existe des suites*

$$k\to t_k\in \boldsymbol{N}-\{0,1\},$$
$$k\to\lambda_k\in\,]0,1],$$
$$k\to P_k,$$
$$k\to Q_k$$

vérifiant (S).

On suppose que pour tout k, f est de classe C^{1+t_k} sur l'intervalle $[Q_{k-1}-P_k, Q_k]$ et que les quatre conditions suivantes soient vérifiées:

$$(\alpha)\qquad \lim_{k\to+\infty}\sup_{Q_{k-1}-P_k\leqslant x\leqslant Q_k} P_k^{1+t_k}\left|\frac{f^{(1+t_k)}(x)}{(1+t_k)!}\right| = 0,$$

$$(\beta)\qquad \lim_{k\to+\infty}\sup_{Q_{k-1}\leqslant x\leqslant Q_k} t_kP_k\left|\frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!}\right| = 0,$$

$$(\gamma)\qquad \lim_{k\to+\infty}\inf_{Q_{k-1}\leqslant x\leqslant Q_k} P_k\left|\frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!}\right|^{\frac{1}{t_k-\lambda_k}} = +\infty,$$

$$(\delta)\qquad \lim_{k\to+\infty}\exp\big(Bt_k(\log^2 t_k+\log^2\lambda_k)\big)P_k^{-\frac{\lambda_k}{18t_k^2\log\frac{t_k}{\lambda_k}}}\log P_k = 0.$$

Alors la suite $(f(n))_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.

Démonstration. Il est clair que si f vérifie les hypothèses précédentes, mf, pour m entier non nul, les vérifie aussi. Il suffit donc de vérifier que les hypothèses du théorème impliquent celles du lemme 1 pour avoir le résultat en vertu du critère de Weyl. Nous allons supposer que P_k est entier. On s'y ramène facilement car $P_k/2\leqslant[P_k]\leqslant P_k$.

Soit N un entier appartenant à $[Q_{k-1}, Q_k]$.

$$S(N)-S(N-P_k) = \sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(f(x)\big).$$

Posons

$$g_{t_k}(x) = f(N)+\frac{x-N}{1!}f'(N)+\ldots+\frac{(x-N)^{t_k}}{t_k!}f^{(t_k)}(N).$$

$$\Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(f(x)\big)\Big|\leqslant\sum_{x=N-P_k+1}^{N}\big|e\big(f(x)\big)-e\big(g_{t_k}(x)\big)\big|+\Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(g_{t_k}(x)\big)\Big|.$$

Pour k assez grand:

$$|f(x)-g_{t_k}(x)|\leqslant P_k^{1+t_k}\sup_{Q_{k-1}-P_k\leqslant x\leqslant Q_k}\left|\frac{f^{(1+t_k)}(x)}{(1+t_k)!}\right|\leqslant\varepsilon$$

d'après (α).

D'où
$$\sum_{x=N-P_k+1}^{N} \left|e\big(f(x)\big)-e\big(g_{t_k}(x)\big)\right| \leqslant \varepsilon P_k.$$

Pour majorer $\Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(g_{t_k}(x)\big)\Big|$, nous allons employer le lemme 0.

Il est clair d'après (γ) que g_{t_k} est exactement de degré t_k.
$$2t_kP_k\left|\frac{f^{(t_k)}(N)}{t_k!}\right| \leqslant 2\sup_{Q_{k-1}\leqslant x\leqslant Q_k} t_kP_k\left|\frac{f^{(t_k)}(x)}{t_k!}\right| \leqslant 1$$
pour k assez grand d'après (β). Dès lors pour un tel k:
$$\Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(g_{t_k}(x)\big)\Big|$$
$$\leqslant A\exp\big(Bt_k(\log^2 t_k+\log^2\lambda_k)\big)P_k^{1-\frac{\lambda_k}{18t_k^2\log\frac{t_k}{\lambda_k}}}\log P_k + P_k\frac{C}{P_k\left|\dfrac{f^{(t_k)}(N)}{t_k!}\right|^{\frac{1}{t_k-\lambda_k}}}.$$

D'après (γ) et (δ), il est clair que chacun des deux termes de cette somme est inférieur ou égal à εP_k dès que k est assez grand, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. *Soient f: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$ et φ: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$ telles que:*

(1) φ *est non décroissante,*

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} x-\varphi(x) = +\infty.$$

(3) *Il existe $x_0\geqslant 0$ et $M>0$ tels que pour tout $x\geqslant x_0$, on ait*
$$\frac{\varphi(x)}{\varphi\big(x-\varphi(x)\big)}\leqslant M.$$

On suppose qu'il existe λ dans $]0,1]$, t entier $\geqslant 2$ et $x_1\geqslant 0$ tels qu'en tout $x\geqslant x_1$, f admette une dérivée continue à l'ordre $1+t$ et que:

(A) $$\lim_{x\to+\infty}\varphi^{1+t}(x)f^{(1+t)}(x) = 0,$$

(B) $$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)f^{(t)}(x) = 0,$$

(C) $$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\,|f^{(t)}(x)|^{1/(t-\lambda)} = +\infty.$$

Alors la suite $\big(f(n)\big)_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.

Démonstration. On définit par récurrence $(P_k)_{k\in N}$ et $(Q_k)_{k\in N}$: Q_0 est tel que $\varphi(Q_0)\geqslant 1$, $P_0=\varphi(Q_0)$.

Pour $k\geqslant 1$:
$$P_k = \varphi(Q_{k-1})\quad\text{ et }\quad Q_k = Q_{k-1}+\varphi(Q_{k-1}).$$

Les conditions (S) sont alors vérifiées. Soient $\lambda_k=\lambda$ et $t_k=t$ pour tout k. Montrons que les hypothèses (α), (β), (γ), (δ) du théorème 1 sont vérifiées.

(α) $$\sup_{Q_{k-1}-P_k\leqslant x\leqslant Q_k}|f^{(1+t)}(x)| = |f^{(1+t)}(a)|\quad\text{ avec }\quad Q_{k-1}\leqslant a\leqslant Q_k.$$
$$P_k^{1+t}|f^{(1+t)}(a)| = \left(\frac{\varphi(Q_{k-1})}{\varphi\big(Q_{k-1}-\varphi(Q_{k-1})\big)}\right)^{1+t}\varphi^{1+t}\big(Q_{k-1}-\varphi(Q_{k-1})\big)\,|f^{(1+t)}(a)|.$$

φ étant non décroissante:
$$P_k^{1+t}|f^{(1+t)}(a)|\leqslant M^{1+t}\varphi^{1+t}(a)\,|f^{(1+t)}(a)|.$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty}(Q_{k-1}-P_k) = +\infty$, d'après (A), ($\alpha$) est alors réalisé.

(β) $$\sup_{Q_{k-1}\leqslant x\leqslant Q_k}P_k|f^{(t)}(x)| = P_k|f^{(t)}(a)|\quad\text{ où }\quad Q_{k-1}\leqslant a\leqslant Q_k.$$
$$P_k|f^{(t)}(a)|\leqslant\varphi(a)\,|f^{(t)}(a)|.$$

D'après (B), (β) est donc réalisé.

(γ) $$\inf_{Q_{k-1}\leqslant x\leqslant Q_k}|f^{(t)}(x)|^{1/(t-\lambda)} = |f^{(t)}(a)|^{1/(t-\lambda)}\quad\text{ où }\quad Q_{k-1}\leqslant a\leqslant Q_k.$$
$$P_k|f^{(t)}(a)|^{1/(t-\lambda)} = \frac{\varphi(Q_{k-1})}{\varphi\big(Q_{k-1}+\varphi(Q_{k-1})\big)}\varphi(Q_k)\,|f^{(t)}(a)|^{1/(t-\lambda)}.$$

D'après (1) et (3), on montre facilement que $\varphi(Q_{k-1})/\varphi\big(Q_{k-1}+\varphi(Q_{k-1})\big)$ est minoré par un nombre $m>0$. D'après (C), (γ) se trouve alors vérifié.

(δ): Cette condition est trivialement vérifiée puisque $\lambda>0$. D'où le résultat.

Théorème 3. *Soient f: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$ et φ: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$. φ vérifie les hypothèses.* (1), (2), (3) *du théorème 2. Il existe $x_0\geqslant 0$ tel qu'en tout $x\geqslant x_0$, f admette une dérivée seconde continue vérifiant:*

(A_1) $$\lim_{x\to+\infty}\varphi^2(x)f''(x) = 0,$$

(B_1) $$\lim_{x\to+\infty}f'(x) = 0,$$

(C_1) $$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\,|f'(x)| = +\infty.$$

Alors la suite $\big(f(n)\big)_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.

Ce théorème, bien que comportant l'hypothèse (A_1), généralise en un certain sens le théorème de Fejér (en prenant $\varphi(x) = x/a$, $a>1$).

Démonstration. On construit $(P_k)_{k\in N}$ et $(Q_k)_{k\in N}$ comme dans le théorème 2. On vérifie les hypothèses du lemme 1.

Soit $N\in[Q_{k-1}, Q_k]$ et soit $g(x) = f(N)+(x-N)f'(N)$.

$$|S(N)-S(N-P_k)| \leqslant \sum_{x=N-P_k+1}^{N} \left|e\big(f(x)\big)-e\big(g(x)\big)\right| + \Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(g(x)\big)\Big|.$$

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}P_k^2|f''(a)| \quad \text{où} \quad a\in[Q_{k-1}-P_k, Q_k].$$

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}M^2\varphi^2(a)|f''(a)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

D'où

$$\sum_{x=N-P_k+1}^{N} \left|e\big(f(x)\big)-e\big(g(x)\big)\right| \leqslant \varepsilon P_k \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

D'après (B_1), $|f'(N)|\leqslant 1$ pour k assez grand. Donc:

$$\Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(g(x)\big)\Big| \leqslant \frac{1}{2\,\|f'(N)\|} = \frac{P_k}{2\,|f'(N)|P_k}.$$

$_k|f'(N)| \geqslant m\varphi(N)|f'(N)|$ où m est un minorant >0 de $\varphi(Q_{k-1})/\varphi\big(Q_{k-1}+ +\varphi(Q_{k-1})\big)$.

D'après (C_1), dès que k est assez grand on a

$$\Big|\sum_{x=N-P_k+1}^{N} e\big(g(x)\big)\Big| \leqslant \varepsilon P_k.$$

Exemple 1. *Soient k un entier $\geqslant 2$, a et β deux réels >0, g une fonction holomorphe au voisinage de l'infini telle que $g(\infty)\neq 0$ g réelle sur $]x_0, +\infty[$ où x_0 est réel, h une application de $]x_0, +\infty[$ a valeurs réelles $\geqslant 1$, telle que:*

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty; \qquad h(x) \leqslant x^\beta,$$

h est continument dérivable et il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\left|\frac{h'(x)}{h(x)}\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/k}+\varepsilon}.$$

Soit f telle que

$$f^{(k)}(x) = \frac{g(x)}{x\log^a h(x)}.$$

Alors $\big(f(n)\big)_{n\in N}$ est équiréparti modulo 1.

Démonstration. Nous prenons $\varphi(x) = x^u$ où $0<u<1$ et $t=k$. Les conditions (1), (2), (3) (B) du théorème 2 sont triviales. La condition (C) est vérifiée dès que $(k-\lambda)u-1>0$ car

$$\varphi^{k-\lambda}(x)\,|f^{(k)}(x)| \geqslant \frac{x^{(k-\lambda)u-1}}{\log^a x} \quad \text{puisque} \quad \log h(x) \leqslant \log x \text{ et } g(\infty)\neq 0.$$

Pour réaliser (A), écrivons $g(x) = h(1/x)$ où h est holomorphe au voisinage de 0. D'où:

$$f^{(k+1)}(x) = -\frac{h'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3\log^a h(x)} - \frac{g(x)}{x^2\log^a h(x)} - \frac{a\,g(x)\frac{h'}{h}(x)}{x\log^{a+1}h(x)}.$$

Pour avoir (A) il suffit de réaliser $u(k+1)-1-1/k-\varepsilon<0$. Il suffit finalement de réaliser

$$\frac{1}{k-\lambda} < \frac{1+1/k+\varepsilon}{k+1}$$

et de choisir u dans $\left]\frac{1}{k-\lambda}, \frac{1+1/k+\varepsilon}{k+1}\right[\subset\ ]0,1[$. Il suffit de prendre

$$\lambda = \min\left(1, \frac{\varepsilon k}{1+1/k+\varepsilon}\right).$$

D'où le résultat.

Exemple 2. *Soit $f(x) = \log x + \sum_{n\geqslant 0} e^{-n^6}x^n$. Alors $\big(f(n)\big)_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.*

G. Rauzy [4] a démontré que si f est une fonction entière qui n'est pas un polynome, telle que

$$\lim_{r\to+\infty}\sup \frac{\log\log M(r)}{\log\log r} < \frac{5}{4}$$

(où $M(r) = \sup_{|z|=r}|f(z)|$), alors $\big(f(n)\big)_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.

On peut voir que ces fonctions entières vérifient les hypothèses du théorème 1. L'exemple 2 donné ici est celui d'une fonction analytique non entière vérifiant les hypothèses du théorème 1. Nous ne donnerons que quelques indications sur la définition de P_k et Q_k.

Pour $k\geqslant 2$, on pose $t_k = k$ et $\lambda_k = 1/k$. Soient

$$L_k = \log\frac{1}{e^{-k^6}} = k^6, \qquad m_k = I_{k+1}-I_k, \qquad M_k = e^{m_k},$$

$$p_k = \frac{kI_k}{k^2-2}, \qquad P_k = e^{p_k} \quad \text{et} \quad Q_k = \frac{M_k}{4^{k+1}}.$$

II. Conditions suffisantes d'équirépartition modulo 1 de $\big(f(p_n)\big)_{n\in N}$. Nous nous contenterons d'exposer ici deux lemmes dont les conclusions permettent, d'après [5], de démontrer que la suite $\big(f(p_n)\big)_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.

Lemme 1. *Soient*

— *A et B deux réels >0; t un entier $\geqslant 1$; N un entier $\geqslant 2$, $r=\log N$;*

— *$\mathscr{H}$ et $\mathscr{G}$ deux parties de $\boldsymbol{N}$ dépendant de t et N;*

— *ψ une application de $\boldsymbol{N}^*$ dans $\boldsymbol{C}$ telle que si $Y^{0.6} \leqslant Y' < Y \leqslant N$ on ait:*

$$(0)\qquad \sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)| \ll Y'r \quad \text{et} \quad \sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)|^2 \ll Y'r^3;$$

— *f une application de $[1, +\infty[$ dans $\boldsymbol{R}$ et*

$$S = \sum_{y\in\mathscr{G}} \psi(y) \sum_{x\in\mathscr{H}} e\big(f(t^2xy)\big)$$

où la sommation est étendue aux (x, y) tels que $t^2xy \leqslant N$ et $AN^{0.24}t^{-1} \leqslant y \leqslant NB^{0.5}t^{-1}$.

On suppose de plus que f est continûment dérivable à l'ordre $k+1$ $(k \geqslant 2)$ et qu'il existe une application φ de $[1, +\infty[$ dans $\boldsymbol{R}^+$ et ε, $0 < \varepsilon < 1$ tels que

$$(1)\qquad \varphi \text{ est non décroissante},$$

$$(2)\qquad \varphi(x) \ll \varphi(x/2),$$

$$(3)\qquad x^{1/2+\varepsilon} \ll \varphi(x) \ll x^{1-\varepsilon},$$

$$(4)\qquad \varphi(x)\,|f^{(k)}(x)|^{1/(k-\varepsilon)} \gg 1,$$

$$(5)\qquad \varphi^{k+1}(x)\,|f^{(k+1)}(x)| \ll x^{-\varepsilon},$$

$$(6)\qquad |f^{(k)}(x)| \ll x^{-k/2},$$

$$(7)\qquad |f^{(k)}(x)| \ll |kf^{(k)}(x) + xf^{(k+1)}(x)| \ll |f^{(k)}(x)|.$$

Alors il existe ϱ dans $]0, 1[$ tel que

$$S \ll r^3 t^{-1.1} N^{1-\varrho}.$$

(Remarquons que si les hypothèses sont vérifiées pour $\varepsilon > 0$, elles le sont pour ε', $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$.)

Démonstration. On partage $[AN^{0.24}t^{-1}, BN^{0.5}t^{-1}]$ en au plus $\ll r$ intervalles $]bM, M[$ avec $\frac{1}{4} \leqslant b \leqslant \frac{1}{2}$. Nous posons $\Delta = N^{1.2\varrho}$ où $0 < \varrho < 1$ et distinguons deux cas:

1) $t \geqslant \Delta$. On majore trivialement S:

$$S \ll \sum_M \sum_{bM<y\leqslant M} |\psi(y)| \sum_{x\leqslant Nt^{-2}M^{-1}b^{-1}} 1.$$

D'après (0):

$$S \ll r^2 t^{-1.1} N^{1-\varrho}.$$

2) $t < \Delta$. Nous partageons $]bM, M]$ en intervalles $]Y-Y_0, Y]$, de longueur $Y_0 = (1-b)M\Delta^{-1}$. Il y a $O(\Delta)$ tels intervalles et il reste un intervalle de longueur inférieure ou égale à Y_0. Il est immédiat de vérifier que pour N assez grand, $Y/2 \leqslant Y - Y_0 \leqslant Y$ et que pour $\varrho < 1/10$, on a $Y_0 \geqslant Y^{0.6}$.

Posons:

$$Z = Nt^{-2}Y^{-1} \quad \text{et} \quad S(Y) = \sum_{\substack{Y-Y_0<y\leqslant Y\\ y\in\mathscr{G}}} \psi(y) \sum_{\substack{Z\Delta^{-1}<x\leqslant Z\\ x\in\mathscr{H}}} e\big(f(t^2xy)\big).$$

Comme $Nt^{-2}y^{-1} - Nt^{-2}Y^{-1} \ll Nt^{-2}Y_0Y^{-2} \ll Z\Delta^{-1}$, il est immédiat de voir qu'il suffit de montrer que

$$S(Y) \ll r^2 Z Y_0 \Delta^{-1}.$$

Partageons enfin $]Z\Delta^{-1}, Z]$ en intervalles $]U-V, U]$ de longueur $V = O(Z\Delta^{-1})$ et un intervalle de longueur inférieure ou égale à V. (V sera choisi ultérieurement.)

Soient:

$$S(Y, U) = \sum_{\substack{Y-Y_0<y\leqslant Y\\ y\in\mathscr{G}}} \psi(y) \sum_{\substack{U-V<x\leqslant U\\ x\in\mathscr{H}}} e\big(f(t^2xy)\big)$$

et

$$S_y(U) = \sum_{\substack{U-V<x\leqslant U\\ x\in\mathscr{H}}} e\big(f(t^2xy)\big).$$

Il suffit de montrer, pour obtenir le résultat final, que

$$S(Y, U) \ll r^2 Y_0 V \Delta^{-1}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy et (0), puis d'après l'inégalité de Hölder, on a, pour tout entier $l \geqslant 2$:

$$|S(Y, U)|^{2l} \ll r^{3l} Y_0^{2l-1} \sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} |S_y(U)|^{2l}.$$

Majoration de $\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} |S_y(U)|^{2l}$. Pour $0 \leqslant j \leqslant k$, soit

$$\beta_j' = \frac{(t^2y)^j f^{(j)}(t^2YU)}{j!}.$$

Alors:

$$f(t^2xy) = \beta_0' + (x-U)\beta_1' + \ldots + (x-U)^k\beta_k' + R$$

avec

$$R = \frac{(x-U)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t^2y\sigma) \quad \text{où} \quad U - V < \sigma < U.$$

Prenons $V = \varphi(t^2YU)/t^2Y$. Comme $V/U \ll (N\Delta^{-1})^{-\varepsilon}$ d'après (3), on a, pour N assez grand:

$$t^2YU \geqslant t^2y\sigma \geqslant \tfrac{1}{4}t^2YU.$$

D'après (1), (2) et (5) on a:

$$R \ll \varphi^{k+1}(t^2 y\sigma)|f^{(k+1)}(t^2 y\sigma)| \ll (t^2 YU)^{-\varepsilon} \ll (N^{-1}\Delta)^{\varepsilon}.$$

Par suite, dès que $1.2\varrho \leqslant \varepsilon/(1+\varepsilon)$, on a $R \ll \Delta^{-1}$. On a alors:

$$|S_y(U)| = \Big|\sum_{\substack{U-V<x\leqslant U\\ x\in\mathscr{H}}} e\big(\beta_1'(x-U)+\ldots+\beta_k'(x-U)^k\big)\Big| + O(V\Delta^{-1}).$$

Vérifions que $V = O(Z\Delta^{-1})$ et $V \gg N^{\varepsilon}\Delta^{-3}$ dès que $\varrho \leqslant \varepsilon/4$

$$\frac{\varphi(t^2 UY)}{t^2 Y} Z^{-1}\Delta \leqslant \frac{\varphi(N)}{N}\Delta \ll 1$$

dès que $1.2\varrho \leqslant \varepsilon$ d'après (3).

$$\frac{\varphi(t^2 UY)}{t^2 Y} \geqslant \frac{U\varphi(t^2 Z\Delta^{-1} Y)}{t^2 UY} \geqslant \frac{U\varphi(N\Delta^{-1})}{N} \geqslant \frac{Z\Delta^{-1}\varphi(N\Delta^{-1})}{N\Delta^{-1}}.$$

D'après (3), $Y \leqslant BN^{0.5}t^{-1}$ et $t^{-1} \geqslant \Delta^{-1}$, on obtient

$$V \gg V^{\varepsilon}\Delta^{-5/3-\varepsilon} \gg V^{\varepsilon}\Delta^{-3}.$$

Soient

$$\Omega_y = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)\in \boldsymbol{R}^k,\ \forall j\in\{1, \ldots, k\}\ |\beta_j-\beta_j'| \leqslant \tfrac{1}{2}V^{-j}\Delta^{-1}\},$$

$$T_0(\beta) = \sum_{\substack{U-V\leqslant x<U\\ x\in\mathscr{H}}} e\big(\beta_1(x-U)+\ldots+\beta_k(x-U)^k\big),$$

η_y la fonction caractéristique de Ω_y modulo $\boldsymbol{Z}^k$.

On a:

$$|S_y(U)|^{2l} = 4^l|T_0(\beta)|^{2l} + O(4^l V^{2l}\Delta^{-2l}).$$

Intégrons sur Ω_y et sommons sur y:

(8) $$\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} |S_y(U)|^{2l}$$

$$\ll \frac{4^l}{\operatorname{mes}\Omega_y}\int_0^1\ldots\int_0^1 |T_0(\beta)|^l \Big(\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}\eta_y(\beta)\Big)\,d\beta_1\ldots d\beta_k + 4^l Y_0 V^{2l}\Delta^{-2l}.$$

Nous allons montrer qu'on peut trouver un majorant uniforme A de $\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}\eta_y(\beta)$ tel que $A \ll Y_0 N^{-2\eta}$ où $\eta > 0$.

Soit $y_0\in]Y-Y_0, Y]$. Il suffit de chercher un majorant du nombre d'entiers $y\in]Y-Y_0, Y]$ tels que

$$\|\beta_k'(y)-\beta_k'(y_0)\| \leqslant \tfrac{1}{2}V^{-k}\Delta^{-1}.$$

Soient

$$\Phi(y) = \beta_k'(y)-\beta_k'(y_0) \quad\text{et}\quad \theta(y) = y^k f^{(k)}(t^2Uy),$$
$$\theta'(y) = y^{k-1}\big(kf^{(k)}(t^2Uy)+t^2Uyf^{(k+1)}(t^2Uy)\big).$$

D'après (7), on en déduit qu'il existe $\tau\in]y, y+1[$ tel que

$$\frac{t^{2k}}{k!}\tau^{k-1}|f^{(k)}(t^2U\tau)| \ll \Phi(y+1)-\Phi(y) \ll \frac{t^{2k}}{k!}\tau^{k-1}|f^{(k)}(t^2U\tau)|.$$

D'après le lemme 9 chapitre 1 de [7], en posant conformément aux notations de ce lemme:

$$\frac{W}{A} = V^{-k}\Delta^{-1};\qquad \frac{1}{A} = t^{2k}\tau^{k-1}|f^{(k)}(t^2U\tau)|$$

on a:

$$A \ll Y_0(WA^{-1}+WY_0^{-1}+A^{-1}+Y_0^{-1}).$$

(L'hypothèse $A \geqslant 2$ est inutile.) Nous majorons chacun des quatre termes de cette somme:

Terme WA^{-1}.

$$WA^{-1} = V^{-k}\Delta^{-1}.$$

Comme $V \gg N^{\varepsilon}\Delta^{-3}$, on a en prenant $1.2\varrho < \varepsilon/3$:

$$WA^{-1} \ll N^{-\varepsilon/3} \ll N^{-2\eta} \quad\text{dès que}\quad \eta \leqslant \varepsilon/3.$$

Terme WY_0^{-1}.

$$WY_0^{-1} = V^{-k}\Delta^{-1}\frac{Y_0^{-1}}{t^{2k}\tau^{k-1}|f^{(k)}(t^2U\tau)|}.$$

Comme $Y_0^{-1} \ll Y^{-1}\Delta$, et d'après (1) et (2):

$$WY_0^{-1} \ll \frac{Y^{k-1}}{\varphi^k(t^2YU)\tau^{k-1}|f^{(k)}(t^2U\tau)|} \ll \frac{1}{\varphi^k(t^2Y\tau)|f^{(k)}(t^2U\tau)|},$$

$\varphi^k(t^2Y\tau)|f^{(k)}(t^2U\tau)| \gg \varphi^{\varepsilon}(t^2U\tau)$ d'après (4). En utilisant (1), (2) et (3)

$$WY_0^{-1} \ll \frac{1}{\varphi^{\varepsilon}(N\Delta^{-1})} \ll (N\Delta^{-1})^{-\varepsilon/2}.$$

Il suffit que $\varrho \leqslant 1/5$ et $\eta \leqslant \varepsilon/8$ pour que $WY_0^{-1} \ll N^{-2\eta}$.

Terme A^{-1}.

$$A^{-1} \ll t^{2k}\tau^{k-1}|f^{(k)}(t^2U\tau)|.$$

Comme $t^2U\tau \ll N\Delta^{-1}$ et $\tau \leqslant Y \ll N^{0.5}t^{-1}$ d'après (6):

$$A^{-1} \ll t^{2k}N^{(k-1)/2}t^{-k+1}(N\Delta^{-1})^{-k/2}.$$

Comme $t \leqslant \Delta$:

$$A^{-1} \ll \Delta^{2k}N^{-1/2}.$$

Pour avoir $A^{-1} \ll N^{-2\eta}$, il suffit de réaliser $\eta \leqslant 1/8$ et $\varrho \leqslant 1/10k$.

Terme Y_0^{-1}.

$$Y_0^{-1} \ll Y^{-1}\Delta \ll N^{-0.24}t\Delta \leqslant N^{-0.24}\Delta^2.$$

Il suffit de prendre $\eta \leqslant 0.12-\varepsilon/3$ et $1.2\varrho \leqslant \varepsilon/3$. Par suite il existe bien $\eta>0$ tel que $\Delta \ll Y_0 N^{-2\eta}$. Posons

$$T(\beta) = \sum_{U-V<x\leqslant U} e\big(\beta_1(x-U)+\ldots+\beta_k(x-U)^k\big).$$

Comme

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 |T_0(\beta)|^{2l}d\beta_1\ldots d\beta_k \leqslant \int_0^1\ldots\int_0^1|T(\beta)|^{2l}d\beta_1\ldots d\beta_k,$$

l'inégalité (8) donne:

$$\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y(U)|^{2l} \ll 4^l V^{\frac12 k(k+1)}\Delta^k Y_0 N^{-2\eta}\int_0^1\ldots\int_0^1|T(\beta)|^{2l}d\beta_1\ldots\beta_k + 4^l Y_0 V^{2l}\Delta^{-2l}.$$

D'après [6], en choisissant un entier $h>0$, $l\geqslant \frac14 k(k+1)+kh$, on a

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 |T(\beta)|^{2l}d\beta_1\ldots d\beta_k \ll K^h(\log^h V)\,V^{2l-\frac12 k(k+1)+\delta_h}$$

avec

$$\delta_h = \frac12 k(k+1)\left(1-\frac1k\right)^h \quad\text{et}\quad K=(48)^{2l}(l!)^2 l^k k^{\frac12 k(k-1)}.$$

Soit $a>1$ qui sera choisi ultérieurement. Prenons

$$h = \left[\frac{3\log k+\log a}{-\log\left(1-\frac1k\right)}+1\right] \quad\text{et}\quad l=\left[\frac14 k(k+1)+kh+\frac12\right]$$

$$\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y(U)|^{2l} \ll 4^l K^h Y_0(\log^h V)\,V^{2l+\delta_h}\Delta^k N^{-2\eta}+4^l Y_0 V^{2l}\Delta^{-2l}.$$

On va réaliser

$$\Delta^k N^{-\eta}\ll \Delta^{-2l} \quad\text{et}\quad (\log^h V)\,V^{\delta_h}N^{-\eta}\ll 1.$$

La première condition est réalisée en prenant $\varrho \leqslant \eta/1.2(k+2l)$.

Pour la seconde, utilisons $V\leqslant N$. On a $\delta_h\leqslant 1/ak$. Il suffit de réaliser $-\eta+1.2\varrho k+1/ak<0$.

En prenant finalement:

$$0<\varepsilon\leqslant 0.2;\quad a=\frac{16}{\varepsilon k};\quad \eta=\varepsilon/8;\quad \varrho=\frac{\varepsilon}{25k^2\log\frac{16k^2}{\varepsilon}}$$

on obtient:

$$\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y(U)|^{2l}\ll Y_0V^{2l}\Delta^{-2l}.$$

D'où le résultat.

LEMME 2. *Soient N un entier $\geqslant 2$, $r=\log N$, $\mathscr{D}\subset[1,N]$ où $\mathscr{D}$ dépend de N, M et M' tels que $N^{0.75}\ll M\leqslant N$ et $M/4<M'\leqslant M/2$. On pose*

$$S_d = \sum_{\substack{M'<x\leqslant M\\ dx\leqslant N}} e\big(f(dx)\big) \quad \textit{où}\quad f:\ ]1,+\infty[\to\mathbf{R};$$

$$S=\sum_{d\in\mathscr{D}}S_d.$$

On suppose que f est continûment dérivable à l'ordre $k+1$ $(k\geqslant 2)$ et qu'il existe φ: $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ et $\varepsilon>0$ tels que:

(1) φ *est non décroissante,*

(2) $\varphi(x)\ll\varphi(x/2)$,

(3) $x^{1/2+\varepsilon}\ll\varphi(x)\ll x^{1-\varepsilon}$,

(4 bis) $\varphi(x)|f^{(k)}(x)|^{1/(k-\varepsilon)}\gg x^\varepsilon$,

(5) $\varphi^{k+1}(x)\,|f^{(k+1)}(x)|\ll x^{-\varepsilon}$,

(6bis) $|f^{(k)}(x)|\ll x^{-5k/8-\varepsilon}$.

Alors il existe ϱ dans $]0,1[$ tel que

$$S\ll N^{1-\varrho}.$$

Démonstration. Dans ce qui suit, il est sous-entendu que d est élément de $\mathscr{D}$. Soit $\Delta = N^\varrho$ où $\varrho>0$ sera fixé par la suite. Posons:

$S_1=0$ si tout élément d de $\mathscr{D}$ est strictement supérieur à $NM^{-1}\Delta^{-1}$ et $S_1=\sum_{d\leqslant NM^{-1}\Delta^{-1}}S_d$ sinon.

$$S_2=\sum_{d>NM^{-1}\Delta^{-1}}S_d.$$

On a

$$S=S_1+S_2.$$

On a

$$S_1\ll NM^{-1}\Delta^{-1}M=N\Delta\ .$$

Nous allons montrer que pour $d>NM^{-1}\Delta^{-1}$, on a $S_d\ll M\Delta^{-1}$. Puisque: $d\ll NM^{-1}$, on aura $S_2\ll N\Delta^{-1}$.

$$S_d=\sum_{M'<x\leqslant\inf(M,N/d)} e\big(f(dx)\big).$$

Partageons $]M', M]$ en intervalles $]X-X_0, X]$ où $X_0 = \varphi(dX)/d$. Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que $X_0 = o(M\Delta^{-1})$ et que

$$\sum_{X-X_0<x\leqslant X} e\big(f(dx)\big) \ll X_0\Delta^{-1},$$

$$\frac{X_0}{M\Delta^{-1}} \ll \frac{\varphi(dX)\Delta}{dX} \ll \frac{\Delta}{(dX)^{\varepsilon}} \ll \frac{\Delta}{(NM^{-1}\Delta^{-1}X)^{\varepsilon}} \ll \frac{\Delta^{1+\varepsilon}}{N^{\varepsilon}} = o(1)$$

dès que

$$\varrho \leqslant \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Vérifions que X_0 tend vers l'infini avec N, uniformément par rapport à X:

$$\frac{\varphi(dX)}{d} = \frac{\varphi(dX)}{dX}X \gg \left(\frac{X}{d}\right)^{1/2} \gg N^{1/4}.$$

Soit x situé dans $]X-X_0, X]$:

$$f(dx) = f(dX)+(x-X)df'(dX)+\ldots+(x-X)^k d^k\frac{f^{(k)}(dX)}{k!}+R$$

où

$$R = (x-X)^{k+1}d^{k+1}\frac{f^{(k+1)}(d\alpha)}{(k+1)!}, \quad X-x<\alpha<X,$$

$$R \ll \left(\frac{\varphi(dX)}{\varphi(dX-dX_0)}\right)^{k+1}\varphi^{k+1}(dX-dX_0)\,|f^{(k+1)}(d\alpha)|.$$

Comme $X_0/X = o(1)$, on a pour N assez grand $dX-dX_0 \geqslant dX/2$ et d'après (1) et (2):

$$\frac{\varphi(dX)}{\varphi(dX-dX_0)} \ll 1.$$

Enfin d'après (5):

$$R \ll N^{-\varepsilon}\Delta^{\varepsilon} \ll \Delta^{-1} \quad \text{si} \quad \varrho \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)}.$$

Posons

$$g(x) = f(dX)+(x-X)d\frac{f'(dX)}{1!}+\ldots+(x-X)^k d^k\frac{f^{(k)}(dX)}{k!}$$

et

$$S'_d = \sum_{X-X_0<x\leqslant X} e\big(g(x)\big).$$

Comme

$$\sum_{X-X_0<x\leqslant X}\Big(e\big(f(dx)\big)-e\big(g(dx)\big)\Big) \ll X_0\Delta^{-1},$$

il suffit finalement de montrer que $S'_d \ll X_0\Delta^{-1}$.

Appliquons le lemme 0; soit $a_k = \dfrac{d^k f^{(k)}(dX)}{k!}$.

$$X_0 a_k \ll (dX)^{1-\varepsilon}d^{k-1}(dX)^{-5k/8-\varepsilon}$$

d'après (6 bis) et (3). Comme $d \leqslant N^{1/4}$ et $X \gg N^{3/4}$:

$$X_0 a_k \ll N^{\frac{1}{4}\left(-8\varepsilon-\frac{12k}{8}+3\right)}.$$

Comme $k \geqslant 2$, on peut appliquer le lemme 0 dès que N est assez grand. Soit:

$$A(k,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{18k^2\log\dfrac{k}{\varepsilon}}$$

on a:

$$S'_d \ll X_0^{1-A(k,\varepsilon)}+X_0\frac{1}{X_0|a_k|^{1/(k-\varepsilon)}}.$$

Comme $X_0 \gg N^{1/4}$, en prenant $\varrho \leqslant A(k,\varepsilon)/4$, on a

$$X_0^{1-A(k,\varepsilon)} \ll X_0\Delta^{-1},$$

$$X_0^{-1}|a_k|^{-1/(k-\varepsilon)} \ll (N\Delta^{-1})^{-\varepsilon}$$

d'après (4 bis).

Il suffit finalement de prendre $\varrho = \varepsilon/72k^2\log(k/\varepsilon)$ pour obtenir

$$S'_d \ll X_0\Delta^{-1}.$$

D'où le résultat.

THÉORÈME 4. *Soit f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ continument dérivable à l'ordre $k+1$ ($k\geqslant 2$), telle qu'il existe φ: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ et ε, $0<\varepsilon<1$ tels que:*

(1) φ *est non décroissante,*

(2) $\varphi(x) \ll \varphi(x/2)$,

(3) $x^{1/2+\varepsilon} \ll \varphi(x) \ll x^{1-\varepsilon}$,

(4 bis) $\varphi(x)\,|f^{(k)}(x)|^{1/(k-\varepsilon)} \gg x^{\varepsilon}$,

(5) $\varphi^{k+1}(x)\,|f^{k+1}(x)| \ll x^{-\varepsilon}$,

(6 bis) $|f^{(k)}(x)| \ll x^{-5k/8-\varepsilon}$,

(7) $|f^{(k)}(x)| \ll |kf^{(k)}(x)+xf^{(k+1)}(x)| \ll |f^{(k)}(x)|$.

Alors la suite $\big(f(p_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

La démonstration se fait comme celle du théorème 5.1 faite par G. Rhin dans [5] page 241 (en prenant le cas $V=1$).

On arrive ainsi à l'existence de $\varrho > 0$ tel que $\sum_{p \leqslant N} e\big(f(p)\big) \ll N^{1-\varrho}$. Comme les hypothèses (1), (2), ..., (7) sont encore vérifiées pour mf, m entier non nul, on peut conclure d'après le critère de Weyl.

THÉORÈME 5. *Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $h \geqslant 1$, de coefficient de plus haut degré > 0 et c un réel > 0. Alors:*

— Si $hc \notin \mathbf{N}$, la suite $P^c(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

— Si $hc \in \mathbf{N}$, il existe un polynome Q réel de degré hc et une fonction holomorphe ψ au voisinage de 0 telle que $\psi(0) = 0$ et

$$P^c(x) = Q(x) + \psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si $Q(x) - Q(0)$ a au moins un coefficient irrationnel, $\big(P^c(p_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

Si $Q(x) - Q(0)$ a tous ses coefficients rationnels, $\big(P^c(p_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

Démonstration. Supposons $hc \notin \mathbf{N}$. Vérifions que les hypothèses (1), (2), (3), (4 bis), (5), (6 bis), (7) du théorème 4 sont vérifiées. On pose $c' = hc$.

Nous prenons $\varphi(x) = x^u$ avec $\frac{1}{2} < u < 1$. (1), (2) et (3) sont triviales.

Il est immédiat de voir par récurrence qu'en posant $P(x) = a_h x^h + \ldots \ldots + a_0$, et $f(x) = P^c(x)$, on a:

$$f^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{\simeq} c'(c'-1)\ldots(c'-k+1)a_h^c x^{c'-k} \qquad \text{car} \qquad c' \notin \mathbf{N}.$$

Vérifions (4 bis) et (5):

$$\varphi^{(k-\varepsilon)}(x)\,|f^{(k)}(x)| \simeq |c'(c'-1)\ldots(c'-k+1)a_h^c|\,x^{u(k-\varepsilon)+c'-k},$$
$$\varphi^{k+1}(x)\,|f^{(k+1)}(x)| \simeq |c'(c'-1)\ldots(c'-k)a_h^c|\,x^{u(k+1)+c'-k-1}.$$

Il suffit alors de réaliser

$$u(k-\varepsilon)+c'-k > \varepsilon(k-\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad u(k+1)+c'-k-1 < -\varepsilon.$$

On réalise:

$$1+\varepsilon-\frac{c'-\varepsilon}{k-\varepsilon} < 1-\frac{c'+\varepsilon}{k+1} \qquad \text{et} \qquad 1-\frac{c'+\varepsilon}{k+1} > \frac{1}{2}.$$

Il suffit de prendre $k \geqslant 2c'$ et $\varepsilon \leqslant c'/(k^2+3k+1)$.

(6 bis) est vérifié dès que $c'-k \leqslant -5k/8-\varepsilon$. Il suffit, puisque $\varepsilon < 1/2$, que $k \geqslant 3c'+1$.

Pour vérifier (7), posons $A = kf^{(k)}(x) + xf^{(k+1)}(x)$.

$$A \simeq c'^2(c'-1)\ldots(c'-k+1)a_h^c x^{c'-k}$$

par suite (7) est bien vérifié. Il suffit finalement de prendre:

$$k = \max(3c'+1, 2) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \min\left(0.2;\ \frac{c'}{k^2+k+1}\right).$$

Alors d'après le théorème 4, $\big(P^c(p_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

Supposons $hc = c' \in \mathbf{N}$.

$$f(x) = a_h^c x^c \left(1+\frac{a_{h-1}}{a_h x}+\ldots+\frac{a_0}{a_h x^h}\right)^c.$$

On développe au voisinage de l'infini la fonction

$$z \to \left(1+\frac{a_{h-1}}{a_h z}+\ldots+\frac{a_0}{a_h z^h}\right)^c.$$

D'où l'existence d'un polynome Q et d'une fonction holomorphe ψ au voisinage de 0 telle que

$$\psi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^c(x) = Q(x) + \psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

On conclut alors en utilisant le théorème 1 de [5].

Bibliographie

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers* Oxford 1968.

[2] L. K. Hua, *Additive Theory of Prime Numbers*, translation of Mathematical Monographs 13, 1965.

[3] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, New York 1974.

[4] G. Rauzy, *Fonctions entières et répartition modulo* 1, Bull. Soc. Math. France 1973, p. 185–192.

[5] G. Rhin, *Sur la répartition modulo* 1 *des suites* $f(p)$, Acta Arith. 23 (1973), p. 217–248.

[6] E. C. Titchmarsch, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford 1951.

[7] I. M. Vinogradov, *The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers* (translated from Russian), London 1954.

U.E.R. DE SCIENCES
UNIVERSITÉ
Caen, France

Reçu le 11. 7. 1975
et dans la forme modifiée le 12. 10. 1975 (743)