ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

Über die Verteilung der Lösungen von Normformen Gleichungen, II

von

K. Győry und A. Pethő (Debrecen)

1. Einleitung. Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n \geqslant 2$ und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ Elemente aus K, die über dem Körper Q der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Ein altes, von vielen Autoren untersuchtes Problem aus der Theorie der diophantischen Gleichungen lautet folgendermaßen: Wann hat die Gleichung

$$(1) \qquad N_{K/Q}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = a \qquad (0 \neq a \in Q)$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen $(x_1, \ldots, x_k)$?

Die Gleichung (1) zu lösen bedeutet, daß die Elemente der Norm a des Moduls $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ gesucht werden müssen. Die Mächtigkeit der Lösungen hängt also von der Struktur des Moduls M ab. Der Modul M heißt *ausgeartet*([1]) (S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič [3], S. 322), wenn der durch ihn erzeugte Vektorraum L über Q einen Teilraum L' besitzt, für welchen $L' = \alpha K'$ $(\alpha \in K)$, wobei K' ein (nicht notwendig echter) Teilkörper von K ist, welcher von Q und von den imaginär-quadratischen Zahlkörpern verschieden ist. Ist M ausgeartet, dann hat (1) für ein geeignetes $a \in Q$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen ([3], S. 322).

W. M. Schmidt bewies als Ergebnis einer langen Reihe von eigenen Arbeiten in [9] folgendes: Ist M nicht ausgeartet, dann hat (1) für ein beliebiges $a \in Q$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen (hierdurch wurde eine Vermutung von S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič bestätigt, s. [3], S. 322). Später zeigte W. M. Schmidt [10] ganz allgemein, für einen beliebigen Modul M, daß bei einem festen $a \in Q$ die Lösungen von (1) lediglich zu endlich vielen sogenannten maximalen Lösungsfamilien gehören.

Falls die Zahl der Unbekannten klein oder der Modul M vollständig ist, so kennen wir zwar einen Algorithmus zum Auffinden je eines

([1]) In unserer Arbeit betrachten wir auch die vollständigen Moduln (bei denen $k = n$) der Zahlkörper vom Einheitenrang $r \geqslant 1$ als ausgeartet.

Repräsentanten der maximalen Lösungsfamilien (s. [3] und [10]), aber dieses Verfahren ist ziemlich kompliziert. Ist die Zahl der Unbekannten groß und ist der Modul M nicht vollständig, dann ist im allgemeinen kein Algorithmus bekannt. Deswegen ist es interessant, die folgende Frage zu untersuchen: Wie groß ist die Zahl $P_{M,K,a}(N)$ (kurz: $P_M(N)$) derjenigen ganzzahligen Lösungen $(x_1, \ldots, x_k)$, für welche $\max_{1\leqslant i\leqslant k}(|x_i|) \leqslant N$ bei festem $a \in Q$ gilt?

Für ein nicht ausgeartetes M gilt nach dem Satz von Schmidt $P_M(N) = O(1)$. Anders verhält es sich, wenn M ausgeartet und (1) lösbar ist. In diesem Falle sind die folgenden Ergebnisse bekannt: für $n = 2$ gab S. Lang [5], [6] eine asymptotische Formel für $P_M(N)$. Für $n = 3$, beziehungsweise $k = 3$ erzielten G. Babaev [1], [2] und A. Pethö [7] Ergebnisse bezüglich $P_M(N)$ im Falle von speziellen Zahlkörpern K und Moduln M. K. Győry und A. Pethö [4] bewiesen folgendes für ein beliebiges K (und damit für ein beliebiges n), sowie für beliebige zu K gehörende vollständige Moduln M: Ist (1) lösbar, dann gilt

$$c_1 \log^r N \leqslant P_M(N) \leqslant c_2 \log^r N$$

wobei $c_1, c_2 > 0$ explizit gegebene Konstanten sind, die von a und von M abhängen und r der Einheitenrang des Zahlkörpers K ist (d.h. der Rang der Einheitengruppe von K).

In der vorliegenden Arbeit setzen wir die Untersuchungen bezüglich $P_M(N)$ fort. Unter Benutzung des Ergebnisses von W. M. Schmidt [10] zeigen wir: Ist M ein beliebiger ausgearteter Modul in einem beliebigen Zahlkörper K und $N \to \infty$ impliziert $P_M(N) \to \infty$ für irgendein $a \in Q$, dann existiert eine nur von a, K und M abhängende Konstante $c > 0$, für welche

$$P_M(N) = c \log^r N + O(\log^{r-1} N). \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet r das Maximum der Einheitenränge derjenigen Unterkörper von K, zu denen eine unendliche Lösungsfamilie von (1) gehört. Ist insbesondere der Modul M vollständig und ist (1) lösbar, dann ergibt sich für $P_M(N)$ ebenfalls (2), wobei r jetzt der Einheitenrang des Körpers K und c in diesem Falle eine explizit angebbare Konstante ist.

Wir möchten dem Lektor unserer Arbeit für die vielen hilfreichen kritischen Bemerkungen danken.

2. Vorbereitende Begriffe und Ergebnisse. Im folgenden führen wir einige Begriffe und Ergebnisse an, die wir bei der Formulierungen und bei der Beweise unserer Sätze brauchen.

Für einen beliebigen Teilkörper L von K bezeichnen wir mit M^L die Menge derjenigen Elemente μ von M, für welche für ein beliebiges $\lambda \in L$ ein $0 \neq z \in Z$ existiert, derart daß $z\lambda\mu \in M$ gilt. (Bezüglich der Einführung und der folgenden Eigenschaften von M^L s. [10].) Es gelten:

(i) M^L ist ein Teilmodul von M, $M^Q = M$ und $M^L \subseteq M^{L'}$, falls $L \supseteq L'$.

(ii) $M^K = \begin{cases} M, & \text{falls } M \text{ ein vollständiger Modul ist,} \\ \{0\} & \text{andernfalls.} \end{cases}$

(iii) Eine Basis von M^L ist mit Hilfe je einer Basis von M, L und K konstruierbar.

(iv) Ist M ausgeartet, dann gibt es einen von Q und von den imaginär-quadratischen Zahlkörpern verschiedenen Teilkörper $L \subseteq K$, für welchen $M^L \neq \{0\}$.

Bezeichne $\mathscr{D}_M^L$ den Multiplikatorenring von M^L, das heißt die Menge aller Elemente $\lambda \in L$, sodaß $\lambda\mu \in M^L$ für alle $\mu \in M^L$. Dann ist $\mathscr{D}_M^L$ eine Ordnung in L falls $M^L \neq \{0\}$. Bezeichne in diesem Falle $\mathscr{E}_M^L$ die Gruppe derjenigen Einheiten ε von $\mathscr{D}_M^L$, für welche $N_{K/Q}(\varepsilon) = 1$. $\mathscr{E}_M^L$ ist offenbar eine Untergruppe von endlichem Index in der Einheitengruppe von L. Im weiteren setzen wir voraus, daß L einen Einheitenrang $r \geqslant 1$ hat. Ist $\mu \in M^L$ eine Lösung von (1), dann ist auch jedes Element der Menge $\mu\mathscr{E}_M^L$ eine Lösung von (1). Die Menge $\mu\mathscr{E}_M^L$ werden wir eine Lösungsfamilie (M, L) nennen.

Sei $\mathscr{E}$ eine Untergruppe von endlichem Index in der Einheitengruppe von L. Dann ist nach dem Dirichletschen Einheitensatz und nach einem wohlbekannten Satz der Theorie der endlich erzeugbaren abelschen Gruppen jedes Element von $\mathscr{E}$ eindeutig in der Form

$$\zeta\varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_r^{a_r} \quad (a_i \in Z;\ i = 1, \ldots, r)$$

darstellbar, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ ein Grundeinheitensystem von $\mathscr{E}$ ist und ζ eine beliebige Einheitswurzel von $\mathscr{E}$. Ist $L = Q(\alpha)$ und sind die Konjugierten $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s+2t)}$ von α derart geordnet, daß $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)}$ reell sind, während $\alpha^{(s+1)}, \ldots, \alpha^{(s+t)}$ der Reihe nach die komplexen Konjugierten von $\alpha^{(s+t+1)}, \ldots, \alpha^{(s+2t)}$ sind (wobei $s+2t = [L:Q]$), so betrachten wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} e_1 \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & e_1 \log|\varepsilon_r^{(1)}| \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{s+t} \log|\varepsilon_1^{(s+t)}| & \ldots & e_{s+t} \log|\varepsilon_r^{(s+t)}| \end{bmatrix} \tag{3}$$

in welcher die Anordnung der Konjugierten der Grundeinheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ $(r = s+t-1)$ von $\mathscr{E}$ der obigen Anordnung der Konjugierten von α entspricht, $e_1 = \ldots = e_s = 1$ und für $t > 0$ $e_{s+1} = \ldots = e_{s+t} = 2$ ist. Mit $R = R(\mathscr{E})$ bezeichnen wir den gemeinsamen absoluten Betrag der Determinanten r-ter Ordnung dieser Matrix und mit $m = m(\mathscr{E})$ die Einheitswurzelanzahl von $\mathscr{E}$. Ist $\mathscr{E} = \mathscr{E}_M^L$, so seien $R_M^L = R(\mathscr{E}_M^L)$ und m_M^L

$= m(\mathcal{E}_M^L)$ (d.h. $m_M^L = 1$, wenn $[K:Q]$ ungerade ist, andernfalls die Einheitswurzelanzahl von $\mathfrak{O}_M^L$). Ist M ein vollständiger Modul in K, dann lassen wir der Einfachheit halber bei $M^L, \mathfrak{O}_M^L, \ldots$ das obere Zeichen L weg.

Bezeichne H eine höchstens r-elementige (möglicherweise leere) Teilmenge der Menge $T = \{1, \ldots, s+t\}$. Mit $i = i_H$ bezeichnen wir das größte Element in $T \setminus H$. Sei $c_H(s,t) \geqslant 0$ der Inhalt der Menge derjenigen Punkte $(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{s+t})$ im r dimensionalen reellen euklidischen Raum E_r, für welche

$$(4)\qquad \begin{cases} y_j < -e_j & (j \in H), \\ |y_j| \leqslant e_j & (j \in T \setminus \{H, i\}), \\ \Big|\sum\limits_{j \in T \setminus \{i\}} y_j\Big| \leqslant e_i. \end{cases}$$

(Ist die durch (4) bestimmte Menge leer, dann sei $c_H(s,t) = 0$.) Schließlich sei

$$c(s,t) = \sum_{H \subset T} c_H(s,t),$$

wobei sich die Summierung über alle höchstens r-elementigen Teilmengen H der Menge T erstreckt (die leere Menge inbegriffen). Es gilt $c(s,t) > 0$, da zum Beispiel für $H = \emptyset$ die Relation $c_H(s,t) > 0$ gilt. Die Konstante $c(s,t)$ ist effektiv bestimmbar.

3. Ergebnisse. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt der folgende

SATZ 1. *Sei $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ ein ausgearteter Modul eines algebraischen Zahlkörpers K vom Grade $n \geqslant 2$ mit über Q linear unabhängigen Erzeugenden $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und sei $a \neq 0$ eine rationale Zahl, für welche* (1) *unendlich viele ganzzahlige Losungen hat. Bezeichne r das Maximum der Einheitenränge*(2) *derjenigen Teilkörper L von K, für die* (1) *eine unendliche Lösungsfamilie (M, L) besitzt. Dann ist* (2) *für $P_M(N)$ erfüllt, wobei $c = c_3 > 0$ eine nur von a, K und M abhängige Konstante ist.*

Betrachten wir nun den Spezialfall, in dem M ein vollständiger Modul in K ist. Mit $\varkappa_M$ bezeichnen wir die Zahl der verschiedenen Lösungsfamilien (M, K) von (1). Dann gilt

SATZ 2. *Sei $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ein vollständiger Modul des algebraischen Zahlkörpers K vom Grade $n \geqslant 2$ und vom Einheitenrang $r \geqslant 1$ mit über Q linear unabhängigen Erzeugenden $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sei $a \neq 0$ eine rationale Zahl, für welche* (1) *in ganzen Zahlen lösbar ist. Dann gilt* (2) *für $P_M(N)$, wobei*

$$c = c_4 = \frac{c(s,t)\, m_M \varkappa_M}{R_M} > 0$$

eine effektiv berechenbare Konstante ist(3).*

Wir bemerken, daß Satz 1 impliziert Satz 2 nur in eine nicht effektive Form.

Aus Satz 1 ergibt sich die untenstehende Behauptung auf einfache Weise.

KOROLLAR. *Sei $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ ein ausgearteter Modul des algebraischen Zahlkörpers K vom Grade $n \geqslant 2$ mit über Q linear unabhängigen Erzeugenden $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und bezeichne r^* das Maximum der Einheitenränge derjenigen Teilkörper $L \subseteq K$, für welche $M^L \neq \{0\}$. Es existiert eine von K, M und von den L abhängige und effektiv berechenbare Konstante $c_5 > 0$ derart daß im Falle $a \geqslant c_5$ für die Zahl $P_M^*(N)$ der ganzzahligen Lösungen $(x_1, \ldots, x_k)$ von*

$$|N_{K/Q}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k)| \leqslant a \qquad (a \in Q)$$

mit $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(|x_i|) \leqslant N$ die asymptotische Formel

$$P_M^*(N) = c_6 \log^{r^*} N + O(\log^{r^*-1} N)$$

gilt, wobei $c_6 > 0$ eine von a, K und M abhängige Konstante ist.

Bemerkung 1. Der zitierte (und im Beweis benutzte) Satz von Schmidt [10] gibt im allgemeinen kein Verfahren zur effektiven Bestimmung der Lösungsfamilien. Deswegen sind die in Satz 1 bzw. im Korollar auftretenden Konstanten r, c_3 bzw. c_6 sowie die zu O gehörigen Konstanten im allgemeinen nicht effektiv. Ist aber M ein vollständiger Modul (s. Satz 2) oder ist $k = \operatorname{rang} M \leqslant 5$, dann ist je ein Repräsentant einer jeden maximalen unendlichen Lösungsfamilie effektiv bestimmbar (s.[10], S. 531). In diesem Falle sind die in Satz 1 bzw. im Korollar auftretenden Konstanten c_3 und r bzw. c_6 ebenfalls effektiv bestimmbar.

Bemerkung 2. Bezeichnet r bzw. r^* die in Satz 1 bzw. die im Korollar auftretenden Konstanten, dann gilt offenbar $r \leqslant r^*$. Ist $L \subseteq K$ ein beliebiger Teilkörper, dann ist bei Kenntnis je einer Basis von K, M und L auch eine Basis von M^L konstruierbar; auf diese Weise kann entschieden werden, ob $M^L = \{0\}$ gilt oder nicht (s. [10], S. 529). K hat jedoch nur endlich viele Teilkörper L und zu jedem von diesen kann eine Basis konstruiert werden; deswegen ist r^* immer effektiv berechenbar.

(2) Unter dem Einheitenrang eines algebraischen Zahlkörpers L verstehen wir auch hier den Rang der Einheitengruppe im Ring der ganzen Zahlen von L.

(3) $c(s,t)$ ist die in Abschnitt 2 bestimmte Konstante, während s bzw. $2t$ die Zahl der reellen bzw. komplexen Isomorphismen des Körpers K im Körper der komplexen Zahlen bezeichnet.

* Zusatz bei der Korrektur: Neuerdings ist $c(s,t)$ in expliziter Form bekannt.

Wir bemerken, daß infolge des Satzes von Schmidt [9] das Korollar auch für nicht ausgeartete Moduln M richtig ist (da in diesem Falle $r^* = 0$).

4. Beweis der Sätze und des Korollars. Zum Beweis benötigen wir einige Lemmas. Ist Λ ein vollständiges Gitter im r-dimensionalen reellen euklidischen Raum E_r, so bezeichne $d(\Lambda)$ den Grundmascheninhalt von Λ und $\delta(\Lambda)$ das Minimum der Durchmesser der Grundmaschen von Λ. Das folgende Lemma ist zum Beispiel in der Arbeit [8] von W. M. Schmidt zu finden (s. Lemma 4, S. 524).

Lemma 1. *Sei Λ ein vollständiges Gitter und D eine beschränkte Menge im r-dimensionalen reellen euklidischen Raum E_r. Bezeichne $D(\delta)$ die Menge derjenigen Punkte des Raumes E_r, welche höchstens den Abstand δ vom Rand von D haben, wobei $\delta = \delta(\Lambda)$. Sei das Lebesguesche Maß von D bzw. $D(\delta)$ gleich $V(D)$ bzw. $V(D(\delta))$. Dann gilt für die Zahl S derjenigen Gitterpunkte des Gitters Λ, welche in D liegen*

$$|S - V(D)/d(\Lambda)| \leqslant V(D(\delta))/d(\Lambda).$$

Sei jetzt $L = Q(\alpha)$ ein algebraischer Zahlkörper vom Einheitenrange $r \geqslant 1$ und sei ferner $\mathscr{E}$ eine torsionsfreie Gruppe der Einheiten von L derart, daß diese Gruppe vom Range r ist und die Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ besitzt. Indem wir die Bezeichnungen des zweiten Abschnittes beibehalten, bezeichnen wir mit $R = R(\mathscr{E})$ den gemeinsamen absoluten Betrag der Determinanten r-ter Ordnung der Matrix (3).

Lemma 2. *Sei H eine höchstens r-elementige (möglicherweise leere) Teilmenge der Menge $T = \{1, \ldots, s+t\}$ und seien b_j $(j \in H)$, b'_j, b''_j $(j \in T \setminus H)$ beliebige Konstanten. Die Bezeichnungen des Abschnittes 2 beibehaltend betrachten wir das Ungleichungssystem*

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| < -e_j \log N + b_j \\ \hfill \text{für alle } j \in H, \\ -e_j \log N + b'_j \leqslant a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| \leqslant e_j \log N + b''_j \\ \hfill \text{für alle } j \in T \setminus H. \end{cases}$$

Für die Zahl $S(N)$ der ganzzahligen Lösungen $(a_1, \ldots, a_r)$ dieses Ungleichungssystem gilt

$$(6)\qquad S(N) = \frac{c_H(s,t)}{R} \log^r N + O(\log^{r-1} N).$$

Beweis. Den Beweis der Behauptung geben wir nur für den Fall, in dem H die leere Menge ist; in allen anderen Fällen verläuft der Beweis ganz ähnlich.

Betrachten wir also speziell das Ungleichungssystem

$$(5')\qquad -e_j \log N + b'_j \leqslant a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| \leqslant e_j \log N + b''_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant s+t)$$

und bezeichnen mit $S(N)$ die Zahl der ganzzahligen Lösungen $(a_1, \ldots, a_r)$ von (5′). Mit P bezeichnen wir die Menge derjenigen Punkte $(a_1, \ldots, a_r)$ des r-dimensionalen reellen euklidischen Raumes E_r, für welche das Ungleichungssystem (5′) erfüllt ist. P ist eine beschränkte (und speziell für $H = \emptyset$ eine abgeschlossene) Menge, ein r-dimensionaler Polyeder. Ist Λ_0 das Gitter der Punkte von E_r, die ganze Koordinaten haben, so ist $S(N)$ die Zahl der zu P gehörigen Gitterpunkte von Λ_0. Nun wenden wir Lemma 1 auf P und auf Λ_0 an. Wegen $d(\Lambda_0) = 1$ reicht es zum Beweis von (6) aus, $V(P)$ zu bestimmen und $V(P(\delta))$ von oben abzuschätzen (δ bezeichnet auch hier das Minimum der Durchmesser der Grundmaschen von Λ_0, während $P(\delta)$ die Mengen derjenigen Punkte bezeichnet, die vom Rand von P höchstens den Abstand δ haben).

$V(P)$ kann in der Form

$$V(P) = \int_P \!\!\ldots \int da_1 \ldots da_r$$

geschrieben werden. Wegen

$$e_1 \log|\varepsilon_l^{(1)}| + \ldots + e_{s+t} \log|\varepsilon_l^{(s+t)}| = 0 \qquad (l = 1, \ldots, r),$$

ergibt sich nach der Substitution

$$a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| = y_j \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

die Beziehung

$$V(P) = \frac{1}{R} \int_{P_y} \!\!\ldots \int dy_1 \ldots dy_r$$

wobei jetzt P_y die Menge derjenigen Punkte $(y_1, \ldots, y_r)$ von E_r ist, für welche

$$-e_j \log N + b'_j \leqslant y_j \leqslant e_j \log N + b''_j \qquad (j = 1, \ldots, r),$$
$$-e_{s+t} \log N - b''_{s+t} \leqslant y_1 + \ldots + y_r \leqslant e_{s+t} \log N - b'_{s+t}$$

gilt. Bezeichnet P'_y die Menge P_y bei der speziellen Wahl $b'_1 = \ldots = b'_{s+t} = 0$ und $b''_1 = \ldots = b''_{s+t} = 0$, dann ist leicht einzusehen, daß

$$V(P_y) = V(P'_y) + O(\log^{r-1} N)$$

gilt. Dagegen ist der Inhalt von P'_y das $\log^r N$-fache des Inhaltes der durch (4) bei $H = \emptyset$ bestimmten Menge, also ist schließlich

$$V(P) = \frac{c_H(s,t)}{R} \log^r N + O(\log^{r-1} N),$$

wobei $c_H(s,t) > 0$ die Abschnitt 2 definierte und sich für $H = \emptyset$ ergebende Konstante ist.

Der Inhalt der Menge derjenigen Punkte, die von einer beliebigen Seitenfläche von P höchstens den Abstand δ haben, beträgt $O(\log^{r-1} N)$. Deswegen ist auch der Inhalt der Menge $P(\delta)$ derjenigen Punkte, welche vom Rand von P einen Abstand $\leqslant \delta$ haben, gleich $O(\log^{r-1} N)$. Hieraus, aus dem oben Gesagten und aus Lemma 1 folgt (6).

Der Beweis bleibt auch dann gültig, wenn für ein $H \subset T$ die Relation $c_H(s, t) = 0$ gilt. In diesem Fall haben wir $S(N) = O(\log^{r-1} N)$.

Lemma 3. *Sei M ein Modul in dem algebraischen Zahlkörper K und seien A und B Teilkörper von K mit $A \subseteq B$. Dann gilt $\mathscr{D}_M^A \subseteq \mathscr{D}_M^B$ und $\mathscr{E}_M^A \subseteq \mathscr{E}_M^B$.*

Beweis. S. W. M. Schmidt [10], S. 533.

Unter Benutzung der früheren Bezeichnungen setzen wir voraus, daß $\mu_1 \mathscr{E}_M^{L_1}$ und $\mu_2 \mathscr{E}_M^{L_2}$ Lösungsfamilien (M, L_1) und (M, L_2) der Gleichung (1) sind, derart, daß diese Lösungsfamilien ein gemeinsames Element, etwa μ, besitzen. Dann können diese auch in der Form $\mu \mathscr{E}_M^{L_1}$ und $\mu \mathscr{E}_M^{L_2}$ geschrieben werden. Für $L_1 = L_2 = L$ ergibt sich hieraus, daß zwei beliebige Lösungsfamilien (M, L) (falls solche überhaupt existieren) entweder disjunkt sind oder zusammenfallen.

Lemma 4. *Sind $L_1, \ldots, L_s$ verschiedene Teilkörper von K und sind $\mu \mathscr{E}_M^{L_1}, \ldots, \mu \mathscr{E}_M^{L_s}$ Lösungsfamilien der Gleichung (1), dann gilt*

$$\bigcap_{i=1}^{s} (\mu \mathscr{E}_M^{L_i}) = \mu \Big(\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}\Big)$$

und außerdem ist $\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}$ eine Untergruppe der Gruppe der Einheiten ε des Körpers $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ mit $N_{K/Q}(\varepsilon) = 1$ derart daß der Rang dieser Untergruppe mit dem Einheitenrang von $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ übereinstimmt.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß

$$\bigcap_{i=1}^{s} (\mu \mathscr{E}_M^{L_i}) = \mu \Big(\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}\Big).$$

Gilt $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{s} (\mu \mathscr{E}_M^{L_i})$, so ist $\alpha = \mu\varepsilon$, wobei $\varepsilon \in \mathscr{E}_M^{L_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Dann gilt aber $\alpha \in \mu \Big(\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}\Big)$.

Ist $\alpha \in \mu \Big(\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}\Big)$, so gilt $\alpha = \mu\varepsilon$, wobei $\varepsilon \in \mathscr{E}_M^{L_i}$ für alle i. Dann gilt aber $\alpha \in \mu \mathscr{E}_M^{L_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ woraus der erste Teil der Behauptung folgt.

Da $\mathscr{E}_M^{L_i}$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von L_i ist, ist auch $\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$. Ferner gilt $\bigcap_{i=1}^{s} L_i \subseteq L_i$ für alle i und deswegen folgt auf Grund von Lemma 3 die Inklusion $\mathscr{E}_M^{\bigcap_{i=1}^{s} L_i} \subseteq \mathscr{E}_M^{L_i}$ für alle i und so gilt $\mathscr{E}_M^{\bigcap_{i=1}^{s} L_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}$. Aber $\mathscr{E}_M^{\bigcap_{i=1}^{s} L_i}$ ist in einer Ordnung des Körpers $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ die Gruppe der Einheiten ε mit der Eigenschaft $N_{K/Q}(\varepsilon) = 1$, und deshalb stimmt im Sinne des Dirichletschen Satzes ihr Rang mit dem Einheitenrang des Körpers $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ überein, der Rang von $\bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{E}_M^{L_i}$ stimmt also mit dem Einheitenrang von $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ überein. Hiermit ist der zweite Teil der Behauptung bewiesen.

Wir gehen nun zum Beweis von Satz 1 über.

Beweis von Satz 1. Nach Voraussetzung hat (1) unendlich viele ganzzahlige Lösungen und diese gehören nach dem Satz von Schmidt [10] bei geeigneten Teilkörpern $L \subseteq K$ zu endlich vielen Lösungsfamilien (M, L).

Sei $\mu \in M$ eine Lösung der Gleichung (1) und wir setzen voraus, daß auch jedes Element von $\mu\mathscr{E}$ eine Lösung der Gleichung (1) sei, wobei $\mathscr{E}$ eine Gruppe von Einheiten, mit der Norm $+1$ über K, eines Teilkörpers $L \subseteq K$ ist, derart daß der Rang $r \geqslant 1$ dieser Gruppe mit dem Einheitenrang von L übereinstimmt. Wir nennen $\mu\mathscr{E}$ eine verallgemeinerte Lösungsfamilie. Mit $P_{\mathscr{E}}(N)$ bezeichnen wir die Zahl der Lösungen mit einer Höhe $\leqslant N$ dieser verallgemeinerten Lösungsfamilie. Zunächst werden wir für $P_{\mathscr{E}}(N)$ eine asymptotische Formel geben.

$\mathscr{E}$ ist eine Untergruppe von endlichem Index in der Einheitengruppe von L, also (s. Abschnitt 2) ein beliebiges Element von $\mathscr{E}$ kann eindeutig in der Form $\zeta\varepsilon_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_r^{a_r}$ dargestellt werden (ζ sind zu $\mathscr{E}$ gehörige Einheitswurzeln, $a_1, \ldots, a_r$ ganze Zahlen, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ ein Grundeinheitensystem von $\mathscr{E}$. Es bezeichne $R = R(\mathscr{E})$ und $m = m(\mathscr{E})$ die im Abschnitt 2 definierten Konstanten.

Sei jetzt $\mu' = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ ein beliebiges Element von $\mu\mathscr{E}$ derart daß $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (|x_i|) \leqslant N$. Dann gilt

$$\mu' = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \mu\zeta\varepsilon_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_r^{a_r}. \tag{7}$$

Wir betrachten jetzt alle Konjugierten des Körpers K und damit gleichzeitig sämtliche Konjugierten des Körpers L im Körper der komplexen Zahlen. Bei $K = Q(\alpha)$ seien die Konjugierten $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ von α derart geordnet, daß von den entsprechenden Teilkörpern $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ der konjugierten Körper $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ die $L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}$ sämtliche verschiedenen reellen Konjugierten von L sind, während $L^{(s+1)}, \ldots, L^{(s+t)}$ der Reihe nach die komplexen Konjugierten von $L^{(s+t+1)}, \ldots, L^{(s+2t)}$ sind (wobei $s + 2t = [L : Q]$ ein Teiler von n ist).

Wir bilden jetzt auf der linken und auf der rechten Seite von (7) die ersten $s+t$ Konjugierten

$$\begin{aligned}(8)\qquad \mu'^{(i)} &= a_1^{(i)}x_1+\ldots+a_k^{(i)}x_k\\ &= \mu^{(i)}\zeta^{(i)}\varepsilon_1^{(i)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(i)a_r}\qquad (i=1,\ldots,s+t).\end{aligned}$$

Hieraus folgt $|\mu'^{(i)}|\leqslant c_7N$ $(i=1,\ldots,s+t)$ mit einer nur von M abhängenden Konstante $c_7>0$.

Sei $c_8>0$ eine absolute Konstante. Ist N hinreichend groß, dann kann das Ungleichungssystem

$$|\mu'^{(i)}|<\frac{c_8}{N}\qquad (i=1,\ldots,s+t)$$

nicht bestehen, da sonst

$$\left|\frac{\mu'^{(i)}}{\mu^{(i)}}\right| = |\varepsilon_1^{(i)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(i)a_r}|<\frac{c_9}{N}\qquad (i=1,\ldots,s+t)$$

wäre, das heißt

$$|N_{L/Q}(\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r})|<1$$

würde folgen, was aber nicht möglich ist. Bezeichne H eine höchstens r-elementige (möglicherweise leere) Teilmenge der Menge $T=\{1,\ldots,s+t\}$ und bezeichne $P_{\mathscr{E},H}(N)$ die Anzahl derjenigen Lösungen $\mu'\in\mu\mathscr{E}$ der Form (7), für welche neben $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(|x_i|)\leqslant N$ auch

$$(9)\qquad |\mu'^{(j)}|<\frac{c_8}{N}\qquad (j\in H)$$

und

$$(10)\qquad |\mu'^{(j)}|\geqslant\frac{c_8}{N}\qquad (j\in T\setminus H)$$

gleichzeitig erfüllt sind. Sei zunächst H eine Teilmenge von T derart daß $N\to\infty$ die Beziehung $P_{\mathscr{E},H}(N)/\log^{r-1}N\to\infty$ impliziert (später werden wir sehen, daß ein solches H existiert, z.B. hat $H=\emptyset$ diese Eigenschaft). Aus (9) folgt für jedes solche μ'

$$(11)\qquad \log|\mu'^{(j)}|<-\log N+c_{10}\qquad (j\in H),$$

das heißt, unter Benutzung von (8)

$$(12)\qquad \log|\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r}| = \log\left|\frac{\mu'^{(j)}}{\mu^{(j)}}\right|<-\log N+c_{11}\qquad (j\in H)$$

und so

$$(13)\qquad e_ja_1\log|\varepsilon_1^{(j)}|+\ldots+e_ja_r\log|\varepsilon_r^{(j)}|<-e_j\log N+c_{12}\qquad (j\in H).$$

Hiernach ergibt sich aus (10) unter Benutzung von $|\mu'^{(j)}|\leqslant c_7N$ $(j=1,\ldots,s+t)$

$$(14)\qquad \frac{c_{13}}{N}\leqslant\left|\frac{\mu'^{(j)}}{\mu^{(j)}}\right| = |\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r}|\leqslant c_{14}N\qquad (j\in T\setminus H)$$

woraus

$$\begin{aligned}(15)\qquad -e_j\log N+c_{15} &\leqslant e_ja_1\log|\varepsilon_1^{(j)}|+\ldots+e_ja_r\log|\varepsilon_r^{(j)}|\\ &\leqslant e_j\log N+c_{16}\qquad (j\in T\setminus H)\end{aligned}$$

folgt, wobei $c_{10}, c_{11},\ldots$ von N unabhängige Konstanten sind. Also ist die Anzahl der μ' mit der gewünschten Eigenschaft welche gleichzeitig (9) und (10) befriedigen, höchstens soviel wie das m-fache der Zahl der gemeinsamen ganzzahligen Lösungen $(a_1,\ldots,a_r)$ des Ungleichungssystems (13), (15). So gilt infolge von Lemma 2

$$(16)\qquad P_{\mathscr{E},H}(N)\leqslant\frac{m\cdot c_H(s,t)}{R}\log^rN+O(\log^{r-1}N)$$

wobei $c_H(s,t)>0$ ist wegen der Voraussetzungen über H und $P_{\mathscr{E},H}(N)$.

Sei jetzt umgekehrt H eine echte Teilmenge von $T=\{1,\ldots,s+t\}$ für welche die in Abschnitt 2 definierte Konstante $c_H(s,t)$ positiv ist (die leere Menge ist zum Beispiel eine solche Teilmenge). Betrachten wir neben diesem H eine beliebige gemeinsame ganzzahlige Lösung $(a_1,\ldots,a_r)$ des Ungleichungssystems (13), (15), wobei jetzt c_{12}, c_{15} und c_{16} mit den vorherigen Werten nicht notwendig übereinstimmende, später bestimmte Konstanten sind. Sei $\zeta\in\mathscr{E}$ eine beliebige, aber feste Einheitswurzel und betrachten wir

$$(17)\qquad \mu' = a_1x_1+\ldots+a_kx_k = \mu\zeta\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r}\qquad (x_1,\ldots,x_k\in Z)$$

was also eine Lösung von (1) ist. Bei Umkehrung des obigen Verfahrens für μ' können wir aus (13) die Relation (12) und danach (11) und (9) mit geeigneten Konstanten ableiten, wird sogar c_{12} entsprechend gewählt, dann ist (9) auch bei der ursprünglichen Konstante c_8 erfüllt. Aus (15) ergibt sich auf ähnliche Weise (14) und hieraus folgt bei einer geeigneten Wahl der Konstante c_{15} bzw. c_{13} die Relation (10) für alle $j\in T\setminus H$. Ferner folgt aus (14) und (9) daß für jedes $1\leqslant j\leqslant s+t$ und für jedes hinreichend große N

$$\left|\frac{\mu'^{(j)}}{\mu^{(j)}}\right| = |\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r}|\leqslant c_{14}N$$

gilt. Hiermit sind aber sämtliche, in bezug auf den absoluten Betrag verschiedene Konjugierten von $\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r}$ erschöpft; nimmt man also in (17) sämtliche Konjugierte von μ', dann folgt

$$\left|\frac{\mu'^{(j)}}{\mu^{(j)}}\right|\leqslant c_{14}N\qquad (j=1,\ldots,n),$$

das heißt

$$(18)\qquad |\mu'^{(j)}| \leqslant c_{17} N \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Aus (17) ergibt sich

$$\mu'^{(j)} = a_1^{(j)} x_1 + \ldots + a_k^{(j)} x_k \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Die Elemente $a_1, \ldots, a_k$ können zu einer Basis von K ergänzt werden. Deswegen gibt es Indizes $j_1, \ldots, j_k$ für welche die Matrix $(a_v^{(j_u)})$ $(1 \leqslant u, v \leqslant k)$ nicht-singulär ist. Die x_i sind dann linear durch $\mu'^{(j_1)}, \ldots, \mu'^{(j_k)}$ ausdrückbar und wir erhalten $|x_i| \leqslant c_{18} N$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Ist $c_{16} < 0$ und $|c_{16}|$ hinreichend groß, dann gilt hier $c_{18} \leqslant 1$, das heißt $|x_i| \leqslant N$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$. Wir erhalten also bei geeigneter Wahl der Konstanten c_{12}, c_{15} und c_{16} aus jeder einzelnen gemeinsamen ganzzahligen Lösung von (13) und (15) eine Lösung $\mu' \in \mu\mathscr{E}$ von (1), (9), (10) derart daß in der Darstellung (17) die Bedingung $\max_{1\leqslant i\leqslant k} (|x_i|) \leqslant N$ erfüllt ist. So gilt also wieder nach Benutzung von Lemma 2

$$(19)\qquad P_{\mathscr{E},H}(N) \geqslant \frac{mc_H(s,t)}{R} \log^r N + O(\log^{r-1} N).$$

Aus $c_H(s,t) > 0$ (was z. B. im Falle $H = \emptyset$ erfüllt ist) folgt, daß für solche H mit $N \to \infty$ auch $P_{\mathscr{E},H}(N)/\log^{r-1} N \to \infty$ gilt. Schließlich ergibt sich aus (16) und (19)

$$P_{\mathscr{E},H}(N) = \frac{mc_H(s,t)}{R} \log^r N + O(\log^{r-1} N).$$

Wir setzen nun voraus, daß H eine Teilmenge von T ist für welche $P_{\mathscr{E},H}(N) = O(\log^{r-1} N)$ gilt. Dann ist $c_H(s,t) = 0$, da $c_H(s,t) > 0$ (wie wir oben gesehen haben) dahin führt, daß für $N \to \infty$ auch $P_{\mathscr{E},H}(N)/\log^{r-1} N \to \infty$ gilt. Es ist sogar umgekehrt für $c_H(s,t) = 0$ auch $P_{\mathscr{E},H}(N) = O(\log^{r-1} N)$ da wir im gegenteiligen Fall auf die obige Weise ebenfalls einen Widerspruch erhalten.

Für verschiedene Teilmengen $H \subset T$ erhalten wir im Vorangehenden auch verschiedene Elemente μ' und jedes μ' gehört zu einem H. Also gehören zu den verschiedenen Teilmengen H die paarweise disjunkten Lösungsmengen der μ'. Demzufolge gilt (mit den Bezeichnungen von Abschnitt 2)

$$(20)\qquad P_{\mathscr{E}}(N) = \sum_{H; H\subset T} P_{\mathscr{E},H}(N) = \frac{mc(s,t)}{R} \log^r N + O(\log^{r-1} N).$$

Betrachten wir schließlich sämtliche ganzzahlige Lösungen der Gleichung (1) mit der Eigenschaft $\max_{1\leqslant i\leqslant k} (|x_i|) \leqslant N$. Mit Hilfe des Obengesagten beweisen wir die asymptotische Formel (2) für $P_M(N)$ mit dem Restglied $O(\log^{r-1} N)$.

Nach dem schon mehrfach zitierten Satz von Schmidt ([10], Theorem 1) hat die Gleichung (1) nur endlich viele maximale Lösungsfamilien. Wir bezeichnen die unendlichen maximalen Lösungsfamilien mit $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_g$ (fallen mehrere zu verschiedenen Teilkörpern gehörige Lösungsfamilien zusammen, so nehmen wir nur eine von diesen) während wir mit $P_{i_1\ldots i_h}(N)$ die Zahl der zum Durchschnitt der Lösungsfamilien $\mathscr{F}_{i_1}, \ldots, \mathscr{F}_{i_h}$ $(1 \leqslant h \leqslant g)$ gehörigen Lösungen mit einer Höhe $\leqslant N$ bezeichnen (hier sei $P_{i_1\ldots i_h}(N) = 0$, falls der vorangehende Durchschnitt leer ist). Sind $\mathscr{F}_{i_1}, \ldots, \mathscr{F}_{i_h}$ respektive $(M, L_{i_1}), \ldots, (M, L_{i_h})$ Lösungsfamilien (wobei unter den Teilkörpern $L_{i_1}, \ldots, L_{i_h}$ auch gleiche vorkommen können) so ist nach Lemma 4 der Durchschnitt der $\mathscr{F}_{i_1}, \ldots, \mathscr{F}_{i_h}$ entweder leer (z. B. wenn unter den L_i gleiche vorkommen) oder aber eine solche verallgemeinerte Lösungsfamilie, in welcher der Rang der entsprechenden Einheitengruppe mit dem Einheitenrang des Körpers $\bigcap_{j=1}^{h} L_{i_j}$ übereinstimmt. Die Zahl der endlichen maximalen Lösungsfamilien ist $O(1)$ und deswegen gilt

$$(21)\qquad P(N) = \sum_{i=1}^{g} P_i(N) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant g} P_{i_1 i_2}(N) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{h-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_h\leqslant g} P_{i_1\ldots i_h}(N) + \ldots + (-1)^{g-1} P_{1\ldots g}(N) + O(1).$$

Sei r das Maximum der Einheitenränge derjenigen Teilkörper L, zu denen eine unendliche Lösungsfamilie (M, L) gehört. Ist $\bigcap_{j=1}^{h} \mathscr{F}_{i_j}$ $(1 \leqslant h \leqslant g)$ nicht leer und ist r' der Einheitenrang des Durchschnittes der entsprechenden Teilkörper $L_{i_1}, \ldots, L_{i_h}$, so gilt, wie wir oben zeigten, die Beziehung

$$P_{i_1\ldots i_h}(N) = O(\log^{r'} N).$$

Demzufolge reicht es bei der Bestimmung des Hauptgliedes von $P_M(N)$ aus, sich auf solche Indexsysteme $(i_1, \ldots, i_h)$ zu beschränken $(1 \leqslant i_1 < \ldots \ldots < i_h \leqslant g)$, für welche das auf obige Weise zugeordnete r' mit r übereinstimmt und der Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^{h} \mathscr{F}_{i_j}$ nicht leer ist, das heißt $P_{i_1\ldots i_h}(N) > 0$. Für $h = 1, \ldots, g$ bezeichnen wir in (21) mit $\sum'_{1\leqslant i_1<\ldots<i_h\leqslant g}$ diejenige Summe, die von der Summe $\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_h\leqslant g}$ übrigbleibt, falls wir nur jene $(i_1, \ldots, i_h)$ Indexsysteme betrachten zu den gehörigen r' mit r übereinstimmt und $\bigcap_{j=1}^{h} \mathscr{F}_{i_j}$ nicht leer ist (falls $r' < r$ für alle $(i_1, \ldots, i_h)$ dann lassen wir die Summe weg). Dann gilt

$$(22)\quad P_M(N) = \sum_{i=1}^{g}{}' P_i(N) - \ldots + (-1)^{h-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant g}{}' P_{i_1 \ldots i_h}(N) + \\ + \ldots + O(\log^{r-1} N).$$

Da aber für ein solches Indexsystem $(i_1, \ldots, i_h)$

$$P_{i_1 \ldots i_h}(N) = c_{i_1 \ldots i_h} \log^r N + O(\log^{r-1} N)$$

mit einer Konstante $c_{i_1 \ldots i_h} > 0$ gilt (welche auf die oben beschriebene Weise ausgerechnet werden kann), ergibt sich aus (22) die Beziehung

$$P_M(N) = c \log^r N + O(\log^{r-1} N)$$

wo

$$(23)\quad c = \sum_{i=1}^{g}{}' c_i - \ldots + (-1)^{h-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant g}{}' c_{i_1 \ldots i_h} + \ldots$$

Für alle $1 \leqslant i \leqslant g$ erhalten wir $P_M(N) \geqslant P_i(N)$, das heißt, $c \geqslant c_i$ für alle in (23) vorkommene c_i. Aber $\sum_{i=1}^{g}{}' c_i > 0$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 2. Wenn (1) eine ganzzahlige Lösung besitzt, hat es auch unendlich viele ganzzahlige Lösungen. Ist nämlich $\mu \in M$ eine Lösung, so ist auch jedes Element von $\mu \mathscr{E}_M$ eine Lösung; dies ist eine unendliche maximale Lösungsfamilie von (1). Jede der endlich vielen Lösungsfamilien (M, K) ist eine maximale unendliche Lösungsfamilie und diese erschöpfen die sämtliche maximalen Lösungsfamilien von (1), deren Zahl $\varkappa_M$ ist bestimmbar (da je ein Repräsentant einer jeden Lösungsfamilie (M, K) effektiv bestimmbar ist; s. [3], S. 140). Nach dem Beweis von Satz 1 gilt (20) für die zu je einer Lösungsfamilie gehörigen $P_i(N)$, wobei jetzt $m = m_M$, $R = R_M$ und r der Einheitenrang des Körpers K ist. Da diese Lösungsfamilien paarweise disjunkt sind, ist in (22) mit Ausnahme der ersten $\sum'$ jedes weitere Glied Null.

Also gilt

$$P_M(N) = \sum_{i=1}^{\varkappa_M} P_i(N)$$

und so ist

$$P_M(N) = \frac{\varkappa_M m_M c(s, t)}{R_M} \log^r N + O(\log^{r-1} N).$$

Wir bemerken schließlich, daß die Konstante $c = c_4$ in Satz 2 von a, K und M abhängt und effektiv bestimmbar ist. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Beweis des Korollars. M ist ein ausgearteter Modul von K und deswegen gibt es einen von Q und von den imaginär-quadratischen Zahlkörpern verschiedenen, nicht notwendig echten Teilkörper L von K, für welchen $M^L \neq \{0\}$. Sei L ein Teilkörper dieser Eigenschaft mit dem maximalen Einheitenrang r^*. Wir wählen ein von 0 verschiedenes Element $\mu \in M^L$ und setzen $N_{K/Q}(\mu) = a'$. Dann ist $\mu \mathscr{E}_M^L$ eine unendliche Lösungsfamilie (M, L) der Gleichung (1) bei $a = a'$ und Satz 1 ist auf diese Gleichung anwendbar, wenn $r = r^*$. Ist jetzt $a \geqslant |a'|$ konstant, so gibt es nur endlich viele Werte $N_{K/Q}(\mu)$ $(\mu \in M)$ für welche $|N_{K/Q}(\mu)| \leqslant a$. Nimmt $N_{K/Q}(\mu)$ einen solchen Wert für unendlich viele $\mu \in M$ an, und sind diese μ in der Form $\mu = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$ dargestellt, so ist nach Satz 1 für die Zahl der Lösungen der Höhe $\leqslant N$ die Beziehung (2) mit einem geeigneten $r \leqslant r^*$ erfüllt. Die gewünschte asymptotische Formel für $P_M^*(N)$ ergibt sich schließlich, falls die erhaltenen asymptotischen Formeln addiert werden.

Literaturverzeichnis

[1] Г. Бабаев, *Распределение целых точек на некоторых норменных поверхностях*, Докл. Акад. Наук СССР, 175 (1960), S. 13–15.

[2] — *Распределение целых точек на алгебраических поверхностях*, Дюшанбе, 1966.

[3] S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1966.

[4] K. Győry et A. Pethő, *Sur la distribution des solutions des équations du type "norme-forme"*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 26 (1975), S. 135–142.

[5] S. Lang, *Asymptotic Approximations to Quadratic Irrationalities*, I, II, Amer. J. Math. 87 (1965), S. 481–496.

[6] — *Introduction to Diophantine Approximations*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1966.

[7] A. Pethő, *Über die Darstellung der rationalen Zahlen durch Normformen*, Publ. Math. Debrecen 21 (1974), S. 31–38.

[8] W. M. Schmidt, *Simultaneous Approximation to a Basis of a Real Numberfield*, Amer. J. Math. 88 (1966), S. 517–527.

[9] — *Linearformen mit algebraischen Koeffizienten, II*, Math. Ann. 191 (1971), S. 1–20.

[10] — *Norm form equations*, Ann. of Math. 96 (1972), S. 526–551.

MATHEMATISCHES INSTITUT
LAJOS KOSSUTH UNIVERSITÄT
Debrecen, Ungarn

Eingegangen am 21. 5. 1975
und in revidierter Form am 2. 12. 1975 (717)