Because of $q \leqslant N$ and (28) we have

$$q \geqslant (N-1)f^{-2}(q) > (N-1)q^{-1/2} \geqslant (N-1)f(q)/\sqrt{N} \geqslant [\sqrt{N}+1]$$

for all sufficiently large q, hence by (29) it follows that

$$|S_N(x)| > c_3\sqrt{N}f([\sqrt{N}+1]) = c_3\sqrt{N}h([\sqrt{N}+1]^2) \geqslant c_3\sqrt{N}h(N). \blacksquare$$

Remark 4. Another proof of Lemma 8 and Theorem 2 can be given by means of formula (18), Theorem 3 in the special case $p = 0$, $q = 1$, and by more extensive use of continued fractions (see Remark 3).

References

[1] H. Behnke, *Zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), pp. 261–318.

[2] — *Der Real- und Imaginarteil von $\sigma(x; \alpha)$*, ibid., 4 (1926), pp. 33–46.

[3] J. W. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions*, Acta. Math. 37 (1914), pp. 193–238.

[5] — — *A further note on the trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 21 (1923), pp. 1–5.

[6] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen von Irrationalzahlen mit Kettenbruchnennern von eingeschränktem Wachstum*, Math. Zeitschr. 36 (1933), pp. 739–779.

[7] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1 (1922), pp. 77–98.

[8] H. S. A. Potter, *On diophantine approximation and the generalized elliptic theta function*, Quart. J. Math. Oxford Ser. 9 (1938), pp. 161–175.

[9] I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Interscience Publ., London 1955. Transl. from Traveaux de l'Institut Mathématique Stekloff, vol. XXIII, 1947.

[10] A. Walfisz, *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Warszawa 1957.

[11] — *Ein metrischer Satz über diophantische Approximationen*, Fund. Math. 16 (1930), pp. 361–385.

[12] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 3*, Abh. Math. Z. 27 (1928), pp. 245–268.

[13] J. R. Wilton, *The approximate formula for the theta function*, J. London Math. Soc. 2 (1927), pp. 177–180.

[14] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Cambridge University Press, 1968.

ABTEILUNG FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ULM, GFR
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF SYRACUSE, N.Y., USA

Received on 26. 7. 1975
and in revised form on 17. 9. 1975 (745)

ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

Der Satz von Erdös und Fuchs in reell-quadratischen Zahlkörpern

WERNER SCHAAL (Marburg)

Herrn Prof. Dr. Th. Schneider zum 65. Geburtstag gewidmet

Es sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d > 0$. Es bezeichne A eine unendliche Folge von ganzen Zahlen $\alpha_i \in K$ mit $\alpha_i \succeq 0$, d.h., es sei sowohl $\alpha_i \geqslant 0$ als auch die zu α_i konjugierte Zahl $\alpha_i' \geqslant 0$; ferner sei $0 \in A$. Für ganze Zahlen $\xi \in K$ werde erklärt:

$$f(\xi) := \sum_{\substack{(i,j) \\ \alpha_i+\alpha_j=\xi,\, \alpha_i,\alpha_j \in A}} 1;$$

in $f(\xi)$ werden für $i \neq j$ demnach sowohl die Zerlegung $\alpha_i + \alpha_j$ als auch die Zerlegung $\alpha_j + \alpha_i$ gezählt. Für reelle Zahlen $x \geqslant 0$, $x' \geqslant 0$ setze man

$$F(x, x') := \sum_{\substack{0 \leqslant \xi \leqslant x \\ 0 \leqslant \xi' \leqslant x'}} f(\xi).$$

Über die Folge A werde vorausgesetzt:

(1) $$F(x, x') = a \cdot xx' + r(x, x'), \quad a > 0;$$

$r(x, x')$ hänge nur vom Produkt $x \cdot x'$ ab, und es gelte $r(x, x') = O(xx')$. Unter dieser Voraussetzung wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt:

SATZ. *Es gilt*:

$$\overline{\lim_{xx' \to \infty}} |r(x, x')|(xx')^{-1/4} \log(xx') > 0.$$

Eine Anwendung des Satzes liefert das Kreisproblem des Körpers K ([3], [4]). In dem Falle ist

$$A = \{\alpha^2;\ \alpha \in K \text{ ganz}\},$$

wobei also für $\alpha \neq 0$ α^2 und $(-\alpha)^2$ verschiedene Elemente der Folge A sind. Die Bedingung (1) ist erfüllt.

In [3] wird zwar das schärfere Resultat

$$r(x, x') \neq o\big((xx')^{1/4}\big)$$

gezeigt, jedoch sind die dort angewandten Methoden schwieriger als die zum Beweis des obigen Satzes benötigten, und sie sind sehr eng auf das spezielle additive Problem zugeschnitten. Das zentrale Hilfsmittel für den Beweis des Satzes stellt die Aussage von Lemma 1 dar, welches eine Verallgemeinerung des Lemmas von Erdös und Fuchs aus [2] ist.

Für komplexe Variable $s = \sigma+it$, $s' = \sigma'+it'$, $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$ definiere man die Funktionen

$$G(s, s') := \sum_{\mu \underline{\succ} 0} \exp\{-(\mu s+\mu' s')\},$$

$$T(s, s') := \sum_{\mu \underline{\succ} 0} N(\mu)\exp\{-(\mu s+\mu' s')\}$$

mit $\exp x := e^x$, $N(\mu) := \mu\cdot\mu'$; die Summationen laufen über alle ganzen Zahlen $\mu \in K$ mit $\mu \geqslant 0$, $\mu' \geqslant 0$. Die erzeugende Funktion unseres Problems ist

$$g(s, s') := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \exp\{-(\alpha s+\alpha' s')\} = \sum_{\mu \underline{\succ} 0} a_\mu \exp\{-(\mu s+\mu' s')\}$$

mit

$$a_\mu := \sum_{\substack{\alpha=\mu \\ \alpha \in \mathcal{A}}} 1.$$

Sie konvergiert absolut und gleichmäßig für $\sigma \geqslant \varepsilon$, $\sigma' \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, denn

$$a_\mu \leqslant f(\mu) \leqslant F(\mu, \mu') = O\big(N(\mu)\big)$$

wegen (1). Weiter gilt:

$$g^2(s, s') = \sum_{\mu \underline{\succ} 0} f(\mu)\exp\{-(\mu s+\mu' s')\}.$$

Daher erhält man aus (1):

$$G(s, s')g^2(s, s') = \sum_{\lambda \underline{\succ} 0} F(\lambda, \lambda')\exp\{-(\lambda s+\lambda' s')\} = a\cdot T(s, s')+R(s, s') \tag{2}$$

mit

$$R(s, s') := \sum_{\lambda \underline{\succ} 0} r(\lambda, \lambda')\exp\{-(\lambda s+\lambda' s')\}.$$

Als Basis der ganzen Zahlen von K wähle man

$$1, \omega := \tfrac{1}{2}(d+\sqrt{d}).$$

Für den Imaginärteil von s und s' setze man

$$t = u+w\omega, \quad t' = u+w\omega', \quad -\pi \leqslant u, w \leqslant \pi. \tag{3}$$

Seien u_0, w_0 reelle Zahlen mit $0 < u_0, w_0 \leqslant \pi$. Dann liefert (2)

$$\int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |g(s, s')|^2\,du\,dw \leqslant a\int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0}\left|\frac{T(s, s')}{G(s, s')}\right|du\,dw+\int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0}\left|\frac{R(s, s')}{G(s, s')}\right|du\,dw. \tag{4}$$

Um den Satz zu beweisen, wird unter der Annahme

$$r(x, x') = o\big((xx')^{1/4}\log(xx')^{-1}\big), \quad x > 0,\ x' > 0 \tag{5}$$

die linke Seite von (4) mittels Lemma 1 nach unten, die rechte Seite von (4) nach oben abgeschätzt. Passende Wahl der auftretenden Parameter wird einen Widerspruch zu der so resultierenden Ungleichung hervorrufen.

Lemma 1. *Sei*

$$\varphi(s, s') := \sum_{\mu \underline{\succ} 0} b_\mu \exp\{-(\mu s+\mu' s')\}, \quad b_\mu \geqslant 0 \text{ für alle } \mu \underline{\succ} 0,$$

eine für $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$ gleichmäßig konvergente Reihe. Wählt man t, t' wie in (3), u_0, w_0 wie in (4), dann gilt:

$$\int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |\varphi(s, s')|^2\,du\,dw \geqslant \frac{u_0 w_0}{9\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(s, s')|^2\,du\,dw.$$

Beweis. Seien R_0, R_1 folgende Rechtecke:

$$R_0 := \{(u, w);\ |u| \leqslant u_0,\ |w| \leqslant w_0\}, \quad R_1 := \{(u, w);\ |u|, |w| \leqslant \pi\}.$$

Sei

$$h(u, w) := \begin{cases} \left(1-\frac{|u|}{u_0}\right)\left(1-\frac{|w|}{w_0}\right), & (u, w) \in R_0, \\ 0, & (u, w) \in R_1-R_0, \end{cases}$$

$$h(u+2\pi, w) = h(u, w+2\pi) = h(u, w).$$

Die Funktion $h(u, w)$ läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickeln:

$$h(u, w) = \sum_{\mu} d_\mu \exp\big\{i\big(\mu(u+w\omega)+\mu'(u+w\omega')\big)\big\}$$

mit

$$d_\mu = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(u, w)\exp\big\{-i\big(\mu(u+w\omega)+\mu'(u+w\omega')\big)\big\}\,du\,dw;$$

die Summationsangabe „μ" bedeutet, daß über alle ganzen Zahlen $\mu \in K$ zu summieren ist (vergl. [1], Seite 74).

Mit der Bezeichnung $S(a) := a + a'$ für Zahlen $a \in K$ ergibt sich:

$$\pi^2 d_\mu = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\big(u_0 S(\mu)\big)}{u_0\cdot S(\mu)^2}\cdot\dfrac{1-\cos\big(w_0 S(\mu\omega)\big)}{w_0\cdot S(\mu\omega)^2}, & \text{falls} \quad S(\mu)\neq 0,\ S(\mu\omega)\neq 0;\\ \dfrac{1-\cos\big(u_0 S(\mu)\big)}{u_0\cdot S(\mu)^2}\cdot\dfrac{w_0}{2}, & \text{falls} \quad S(\mu)\neq 0,\ S(\mu\omega) = 0;\\ \dfrac{u_0}{2}\cdot\dfrac{1-\cos\big(w_0 S(\mu\omega)\big)}{w_0\cdot S(\mu\omega)^2}, & \text{falls} \quad S(\mu) = 0,\ S(\mu\omega)\neq 0;\\ \dfrac{u_0 w_0}{4}, & \text{falls} \quad \mu = 0. \end{cases}$$

Es gilt für alle μ: $d_\mu \geqslant 0$. Für das Integral

$$I := \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(u,w)\cdot\varphi(s,s')|^2\,du\,dw$$

erhält man einerseits:

$$I \leqslant \int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |\varphi(s,s')|^2\,du\,dw.$$

Andererseits ergibt sich mit

$$t_\lambda := \sum_{\substack{\mu-\nu=\lambda\\ \nu\underline{\epsilon}\,0}} d_\mu b_\nu \exp\{-(\nu\sigma+\nu'\sigma')\}$$

$$I = 4\pi^2\sum_\lambda t_\lambda^2 \geqslant 4\pi^2\sum_\lambda\sum_{\substack{\mu-\nu=\lambda\\ \nu\underline{\epsilon}\,0}} d_\mu^2 b_\nu^2\exp\{-2(\nu\sigma+\nu'\sigma')\}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(u,w)|^2\,du\,dw\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(s,s')|^2\,du\,dw$$

$$= \frac{u_0 w_0}{9\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(s,s')|^2\,du\,d\omega.$$

Die beiden Ungleichungen für I ergeben die Behauptung des Lemmas.

Es sei δ mit $0<\delta<1$ eine feste Zahl, die später geeignet gewählt wird. Man wähle ε, so daß gilt: $0<\varepsilon\leqslant\delta$. Für die im Folgenden benötigten endlich vielen Zahlen $\varepsilon_k(\delta)$ soll stets gelten:

$$\varepsilon_1(\delta)\leqslant\delta, \qquad \varepsilon_{k+1}(\delta)\leqslant\varepsilon_k(\delta).$$

Definition. Unter den genannten Bedingungen für δ, ε sei:

$$(6)\qquad \beta := \sqrt{\varepsilon}\,|\log\varepsilon|^2+\delta, \qquad u_0 := \frac{\sqrt{\varepsilon}\,|\log\varepsilon|}{\beta^{1/6}}, \qquad w_0 := \frac{u_0}{\omega}.$$

Es gilt:

$$(7)\qquad \begin{gathered} \varepsilon < u_0, \quad u_0\leqslant\pi \quad \text{für} \quad \varepsilon\leqslant\varepsilon_1(\delta),\\ u_0\to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon\to 0,\\ \omega' w_0 < u_0. \end{gathered}$$

Die Variablen s, s' sollen jetzt folgendermaßen festgelegt werden:

$$(8)\qquad \begin{aligned} s &= \varepsilon + i(u+w\omega)\\ s' &= \varepsilon + i(u+w\omega') \end{aligned} \qquad |u|\leqslant u_0,\ |w|\leqslant w_0,\ \varepsilon\leqslant\varepsilon_1(\delta),$$

wobei u_0, w_0 die in (6) erklärten Zahlen sind.

Als nächstes sollen Abschätzungen der Funktionen $G(s,s')$ und $T(s,s')$ für die in (8) angegebenen Werte von s, s' hergeleitet werden. Man kann (vergl. [3], Seite 279 ff.) diese Funktionen darstellen als

$$G(s,s') = 1 + H_0\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s'\Big),$$

$$T(s,s') = H_1\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s'\Big).$$

Verwendet man weiter die in [3] benutzten Bezeichnungen, so ergibt sich daraus:

$$G(s,s') = 1 + \Phi\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s', v_0\Big) + \Phi\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s', v_1\Big),$$

$$T(s,s') = \Psi\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s', v_0\Big) + \Psi\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s', v_1\Big).$$

Dabei gilt:

$$\Phi\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s', v_0\Big) = \frac{d^{-1/2}}{s\cdot s'} - \frac{1}{4} +$$

$$+\frac{e_1\sqrt{d}}{16\log\eta_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac12-i\infty}^{-\frac12+i\infty}\frac{\Big(\frac{4\pi^2}{d}\Big)^z\zeta(1-z,\overline{\lambda^n})\,dz}{s^{z+inc}s'^{z-inc}\sin\frac{\pi}{2}(z+1+inc)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z+1-inc)},$$

$$\Phi\Big(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s, \frac{\sqrt{d}}{\pi}s', v_1\Big) = -\frac{e_1\sqrt{d}}{4\pi^2\log\eta_1}\Big[\zeta(1,v_1)\Big(\log(ss')+\log\frac{d}{4\pi^2}\Big)+\zeta'(1,v_1)\Big]+$$

$$+\frac{e_1\sqrt{d}}{8\pi\log\eta_1}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\zeta(1-inc,\overline{\lambda^n}v_1)\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}s\right)^{-2inc}-\zeta(1+inc,\overline{\lambda^n}v_1)\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}s'\right)^{2inc}}{\sin\pi inc}+$$

$$+\frac{e_1\sqrt{d}}{16\log\eta_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\left(\frac{4\pi^2}{d}\right)^z\zeta(1-z,\overline{\lambda^n}v_1)\,dz}{s^{z+inc}s'^{z-inc}\sin\frac{\pi}{2}(z+inc)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z-inc)};$$

$$\Psi\left(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s,\frac{\sqrt{d}}{\pi}s',v_0\right)=\frac{d^{-1/2}}{(s\cdot s')^2}-\frac{e_1d^{3/2}}{16\pi^4\log\eta_1}\times$$

$$\times\left[\zeta(2,1)\left(\log(ss')+\log\frac{e^2d}{4\pi^2}\right)+\zeta'(2,1)\right]+$$

$$+\frac{e_1d^{3/2}}{32\pi^3\log\eta_1}\times$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{(1-2inc)\zeta(2-inc,\overline{\lambda^n})\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}s\right)^{-2inc}-(1+2inc)\zeta(2+inc,\overline{\lambda^n})\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}s'\right)^{2inc}}{\sin\pi inc}$$

$$+\frac{e_1\sqrt{d}}{ss'\cdot 16\log\eta_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{-3/2-i\infty}^{-3/2+i\infty}\frac{\left(\frac{4\pi^2}{d}\right)^z(z^2+n^2c^2)\zeta(1-z,\overline{\lambda^n})\,dz}{s^{z+inc}s'^{z-inc}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z+1+inc)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z+1-inc)},$$

$$\Psi\left(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s,\frac{\sqrt{d}}{\pi}s',v_1\right)$$

$$=\frac{e_1\sqrt{d}}{ss'\cdot 16\log\eta_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{-3/2-i\infty}^{-3/2+i\infty}\frac{\left(\frac{4\pi^2}{d}\right)^z(z^2+n^2c^2)\zeta(1-z,\overline{\lambda^n}v_1)\,dz}{s^{z+inc}s'^{z-inc}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z+inc)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z-inc)}.$$

Für die nunmehr auftretenden Konstanten c_k, $k=1,2,\ldots$, gilt, daß sie nur von K abhängen und stets >1 sind. Es soll lediglich die Abschätzung der in $\Phi\left(\frac{\sqrt{d}}{\pi}s,\frac{\sqrt{d}}{\pi}s',v_0\right)$ auftretenden unendlichen Reihe vorgerechnet werden, da die Abschätzung der übrigen unendlichen Reihen analog geleistet werden kann.

$$(9)\qquad |\zeta(1-z,\lambda^n)|=|\zeta(\tfrac{3}{2}-it,\lambda^n)|\leqslant c_1.$$

$$(10)\qquad |s^{-z-inc}s'^{-z+inc}|=|ss'|^{1/2}\exp\{(t+nc)\arg s+(t-nc)\arg s'\},$$
$$-\pi<\arg s,\ \arg s'\leqslant\pi.$$

Wegen (8), (6), (7) und $\operatorname{arctg}x\geqslant x-x^3/3$ für $x\geqslant 0$ gilt:

$$|\arg s|,\ |\arg s'|\leqslant\operatorname{arctg}\frac{2u_0}{\varepsilon}\leqslant\operatorname{arctg}\frac{2|\log\varepsilon|}{\delta^{1/6}\sqrt{\varepsilon}}$$
$$\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\delta^{1/6}\sqrt{\varepsilon}}{4|\log\varepsilon|}\qquad\text{für}\quad \varepsilon\leqslant\varepsilon_2(\delta).$$

Damit folgt aus (10):

$$(11)\qquad |s^{-z-inc}s'^{-z+inc}|\leqslant\begin{cases}|ss'|^{1/2}\exp\left\{\left(\pi-\frac{\delta^{1/6}\sqrt{\varepsilon}}{2|\log\varepsilon|}\right)t\right\} & \text{für } t\geqslant|n|c,\\ |ss'|^{1/2}\exp\left\{\left(\pi-\frac{\delta^{1/6}\sqrt{\varepsilon}}{2|\log\varepsilon|}\right)|n|c\right\} & \\ \qquad\text{für } 0\leqslant t\leqslant|n|c, & \varepsilon\leqslant\varepsilon_2(\delta).\end{cases}$$

Ferner erhält man:

$$(12)\qquad \left|\sin\frac{\pi}{2}(z+1+inc)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(z+1-inc)\right|$$
$$\geqslant\begin{cases}\frac{1}{4}\exp\{\pi t\} & \text{für}\quad t\geqslant|n|c,\\ \frac{1}{4}\exp\{\pi|n|c\} & \text{für}\quad 0\leqslant t\leqslant|n|c.\end{cases}$$

Berücksichtigt man noch

$$(13)\qquad |ss'|\leqslant c_2\cdot\frac{\varepsilon|\log\varepsilon|^2}{\delta^{1/3}}\qquad\text{für}\quad\varepsilon\leqslant\varepsilon_3(\delta),$$

so folgt aus (9), (11), (12) und (13), daß der Betrag der in Frage stehenden unendlichen Reihe

$$\leqslant c_3\cdot\frac{|\log\varepsilon|^3}{\delta^{1/2}\sqrt{\varepsilon}}\qquad\text{für}\quad\varepsilon\leqslant\varepsilon_4(\delta)$$

ist. Insgesamt kann man auf die Weise die folgende Abschätzung herleiten.

LEMMA 2. *Mit den in* (8) *erklärten komplexen Variablen* s, s' *gilt*:

$$|G(s,s')| \geqslant \frac{d^{-1/2}}{|ss'|}\left(1 - c_4\frac{\varepsilon^{1/4}|\log\varepsilon|^9}{\delta^2}\right),$$
$$|T(s,s')| \leqslant \frac{d^{-1/2}}{|ss'|^2}\left(1 + c_4\frac{\varepsilon^{1/4}|\log\varepsilon|^9}{\delta^2}\right),$$

$\varepsilon \leqslant \varepsilon_5(\delta)$.

Ähnlich wie den Hilfssatz 5 in [3] beweist man

LEMMA 3. *Es gibt Konstanten* $r_0 = r_0(K)$ *und* c_5, *so daß für* $0 \leqslant b \leqslant 1$ *und* $0 < r_0 \leqslant r < 1$ *gilt*:

$$\frac{c_5^{-1}}{(1-r)^{2(1+b)}} \leqslant \sum_{\mu \underline{\in} 0} N(\mu)^b r^{S(\mu)} \leqslant \frac{c_5}{(1-r)^{2(1+b)}}.$$

Mit Hilfe von Lemma 2 soll zunächst das erste Integral auf der rechten Seite von (4) nach oben abgeschätzt werden. Wegen Lemma 2 existiert eine Konstante c_6 mit

$$|G(s,s')| \geqslant \frac{c_6^{-1}}{|ss'|}, \quad |T(s,s')| \leqslant \frac{c_6}{|ss'|^2} \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_6(\delta).$$

Wegen (8) erhält man daher:

$$\text{(14)} \qquad \int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0}\left|\frac{T(s,s')}{G(s,s')}\right| du\,dw \leqslant c_7|\log\varepsilon|^2 \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_7(\delta).$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite von (4) werde jetzt mit I_1 bezeichnet und unter der Annahme (5) nach oben abgeschätzt:

$$\text{(15)} \qquad I_1 \leqslant c_6 \int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |ss'|\,|R(s,s')|\,du\,dw \leqslant c_8 u_0^2 \int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |R(s,s')|\,du\,dw$$

wegen (7), (8).

Wendet man auf die rechte Seite von (15) die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, so folgt mit

$$I_2 := \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |R(s,s')|^2\,du\,dw:$$

$$\text{(16)} \qquad I_1 \leqslant c_9 u_0^3 I_2^{1/2}.$$

Aus (5) folgt, daß es zu vorgegebenem δ mit $0 < \delta < 1$ ein $\varepsilon_8(\delta)$ gibt,

so daß für $\varepsilon \leqslant \varepsilon_8(\delta)$ gilt:

$$\text{(17)} \qquad I_2 = 4\pi^2 \sum_{\mu \underline{\in} 0} r(\mu,\mu')^2 \exp\{-2\varepsilon S(\mu)\}$$
$$\leqslant c_{10} \sum_{\substack{1 \leqslant N(\mu) \leqslant 1/\varepsilon \\ \mu \underline{\in} 0}} N(\mu)^{1/2}\exp\{-2\varepsilon S(\mu)\} + \delta \sum_{\substack{N(\mu) > 1/\varepsilon \\ \mu \underline{\in} 0}} \frac{N(\mu)^{1/2}}{(\log N(\mu))^2}\exp\{-2\varepsilon S(\mu)\}.$$

Zur Abschätzung der beiden in (17) erscheinenden Summen Σ_1 und Σ_2 wird Lemma 3 angewendet:

$$\text{(18)} \qquad \Sigma_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{\mu \underline{\in} 0} \exp\{-2\varepsilon S(\mu)\} \leqslant c_{11}\varepsilon^{-5/2},$$

$$\text{(19)} \qquad \Sigma_2 \leqslant \frac{1}{|\log\varepsilon|^2} \sum_{\mu \underline{\in} 0} N(\mu)^{1/2}\exp\{-2\varepsilon S(\mu)\} \leqslant c_{12}(\varepsilon^3|\log\varepsilon|^2)^{-1}.$$

Setzt man (18), (19) in (17) ein, so folgt:

$$I_2 \leqslant c_{13}\beta(\varepsilon^3|\log\varepsilon|^2)^{-1} \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_8(\delta).$$

Damit liefert (16):

$$\text{(20)} \qquad I_1 \leqslant c_{14}|\log\varepsilon|^2 \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_8(\delta).$$

Schließlich ergeben (4), (14) und (20):

$$\text{(21)} \qquad \int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |g(s,s')|^2\,du\,dw \leqslant c_{15}|\log\varepsilon|^2 \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_8(\delta).$$

Jetzt soll die linke Seite von (21) unter der Annahme (5) nach unten abgeschätzt werden. Wegen Lemma 1, (6) und (8) erhält man:

$$\int_{-u_0}^{u_0}\int_{-w_0}^{w_0} |g(s,s')|^2\,du\,dw \geqslant c_{16}^{-1}u_0^2 \sum_{\mu \underline{\in} 0} a_\mu^2 \exp\{-2\varepsilon S(\mu)\}$$
$$\geqslant c_{16}^{-1}u_0^2 \sum_{\mu \underline{\in} 0} a_\mu \exp\{-2\varepsilon S(\mu)\},$$
$$\text{da } a_\mu \in \mathbf{Z} \text{ und } a_\mu \geqslant 0,$$
$$\text{(22)} \qquad = c_{16}^{-1}u_0^2 g(2\varepsilon, 2\varepsilon).$$

Aus Lemma 3 ergibt sich

$$\text{(23)} \qquad G(2\varepsilon,2\varepsilon) \leqslant c_{17}\varepsilon^{-2}, \quad T(2\varepsilon,2\varepsilon) \geqslant c_{17}^{-1}\varepsilon^{-4}, \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_9(\delta).$$

Wegen der Annahme (5) und Lemma 3 gilt ferner:

$$\text{(24)} \qquad R(2\varepsilon,2\varepsilon) \leqslant c_{18}\sum_{\mu \underline{\in} 0} N(\mu)^{1/4}\exp\{-2\varepsilon S(\mu)\} \leqslant c_{19}\varepsilon^{-5/2}.$$

Aus (2) folgt mit (23) und (24)

$$g^2(2\varepsilon, 2\varepsilon) \geqslant c_{20}^{-1}\varepsilon^{-2}, \qquad \varepsilon \leqslant \varepsilon_{10}(\delta). \tag{25}$$

Mit (25) erhält man aus (22) und (21) die Ungleichung:

$$c_{21}^{-1}\frac{u_0^2}{\varepsilon} \leqslant c_{15}|\log \varepsilon|^2 \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_{10}(\delta).$$

Setzt man für u_0 gemäß (6) ein, so gelangt man zu der Ungleichung:

$$\beta \geqslant c_{22}^{-1} \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_{10}(\delta). \tag{26}$$

Wählt man $\delta = \frac{1}{2}c_{22}^{-1}$ und $\varepsilon_{11}(\delta)$ so klein, daß für $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{11}(\delta)$ gilt:

$$\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|^2 \leqslant \tfrac{1}{3}c_{22}^{-1},$$

dann erhält man einen Widerspruch zu (26). Deshalb kann die Annahme (5) nicht gelten, und der angekündigte Satz ist bewiesen.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die bestechende Einfachheit des Beweises von Erdös und Fuchs deswegen teilweise verlorengeht, weil die Reihen $G(s, s')$ und $T(s, s')$, welche man als Verallgemeinerung der geometrischen Reihe bzw. deren Ableitung im Körper K anzusehen hat, nicht so elementar zu handhaben sind wie in $\boldsymbol{Q}$.

Literaturverzeichnis

[1] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, First English Edition 1953, Interscience Publishers, Inc., New York.

[2] P. Erdös and W. H. J. Fuchs, *On a problem of additive number theory*, J. London Math. Soc. 31 (1956), S. 67–73.

[3] W. Schaal, *Übertragung des Kreisproblems auf reell-quadratische Zahlkörper*, Math. Ann. 145 (1962), S. 273–284.

[4] — *On the expression of a number as the sum of two squares in totally real algebraic number fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), S. 529–537.

Eingegangen am 8. 8. 1975 (750)

ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

A new upper bound for Waring's problem (mod p)

by

J. D. Bovey (Cardiff)

1. Introduction. Let p be a prime and let d and t be positive integers with $p-1 = dt$. The number $\gamma(d, p)$ is defined to be the least positive integer s such that the congruence

$$x_1^d + \ldots + x_s^d \equiv N \pmod{p}$$

has a solution for all integers N. It can be verified readily from the work of Hardy and Littlewood [5] that

$$\gamma(d, p) \leqslant d$$

for all d and p. When $t = 1$ or 2 equality holds, but if we restrict d and p, better bounds can be found. Let ε be any fixed positive number. It is not hard to show, using exponential sum arguments (see [1] or [3]), that for all d, p with $d < p^{1/2-\varepsilon}$

$$\gamma(d, p) = O(1). \tag{1}$$

Dodson [3] has shown that when $d < p^{1/2}$

$$\gamma(d, p) = O(\log d).$$

Heilbronn [6] has conjectured that for $t > t_0(\varepsilon)$

$$\gamma(d, p) = O(d^{\varepsilon})$$

or at least that $\gamma(d, p) = O(d^{1/2})$ for $t > 2$. The best result so far is due to Dodson and Tietäväinen [4] who have proved that

$$\gamma(d, p) = O(d^{1/2+\varepsilon}) \tag{2}$$

for $t > 2$.

In this paper we obtain an upper bound for $\gamma(d, p)$ which is about as good as is possible in its dependence on d, but is spoilt by the factor $\varphi(t)$ (where φ is Euler's function). We then use this upper bound to obtain a new proof of the result of Dodson and Tietäväinen (2).