Conspectus materiae tomi XXXII, fasciculi 2

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange
Address of the Editorial Board and of the exchange
Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches
Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

О законе Грама в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

1. Пусть $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность корней уравнения ([5], стр. 261)

$$\vartheta(t) = \pi\nu, \tag{1}$$

где ([5], стр. 383)

$$\vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{2}$$

и ν — целое положительное. Далее напомним, что ([5], стр. 94)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it). \tag{3}$$

Свойство такого рода, что нули функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ и члены последовательности $\{t_\nu\}$ отделяют друг друга, называется *законом Грама.*

В работе [6], в этом направлении, Е. К. Титчмарш получил следующий результат (если учесть сказанное в [3], относительно опечатки в работе [6]):

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1}) \sim -2(c+1)N, \tag{4}$$

где M — постоянное целое число, и c — постоянная Эйлера.

Пусть, далее, $G(T)$ обозначает число промежутков $(t_\nu, t_{\nu+1}) \subset \subset (0, T)$, содержащих нуль функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$. Из соотношения (4), Е. К. Титчмарш получил следующую оценку снизу

$$G(T) > A\frac{T^{2/3}}{\ln T}. \tag{5}$$

В предлагаемой теперь работе улучшим результаты (4), (5), в смысле локализации. А именно, покажем, что имеет место формула:

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+\bar{H}} Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1}) = -\frac{c+1}{\pi}\sqrt{T}\psi(T)\ln^2 T + O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{6}$$

где $\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция, и,

$$\bar{H} = \sqrt{T}\,\psi(T)\ln T. \tag{7}$$

Прежде чем приступить к перечислению следствий из этой формулы, введем еще некоторые обозначения. Пусть

(8) $$\mu=\mu(T,\bar{H})=\max_{t\in\langle T,T+\bar{H}\rangle}|Z(t)|,$$

где (см. (3)),

(9) $$|Z(t)|=|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|.$$

Промежуток $\langle\bar{t}_\nu,\bar{t}_{\nu+1}\rangle$ назовем правильным, если

(10) $$Z(\bar{t}_\nu)Z(\bar{t}_{\nu+1})<0.$$

Конечно, правильный промежуток содержит нечетный нуль функции $Z(t)$, и, следовательно, в силу (3), нечетный нуль функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

Пусть $G(T,\bar{H})$ обозначает количество правильных промежутков, принадлежащих промежутку $\langle T,T+\bar{H}\rangle$. Из (6), в силу (8), получается (ср. [6], стр. 105),

(11) $$-\frac{c+1}{\pi}\sqrt{T}\psi(T)\ln^2T+O(\sqrt{T}\ln^2T)\geqslant$$
$$\geqslant-\sum_{(\bar{t}_\nu)}|Z(\bar{t}_\nu)Z(\bar{t}_{\nu+1})|>-\mu^2G(T,\bar{H}),$$

т.е. имеет место

Следствие 1.

(12) $$G(T,\bar{H})>A\frac{\sqrt{T}\psi(T)\ln^2T}{\mu^2}.$$

Записывая различные результаты касающиеся порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, в форме (ср. [5], стр. 116)

(13) $$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|<A(\alpha,\beta)t^\alpha\ln^\beta t,$$

то, в силу (12), получаем

Следствие 2. Если имеет место (13), то

(14) $$G(T,\bar{H})>A(\alpha,\beta)T^{\frac{1}{2}-2\alpha}\psi(T)\ln^{2-2\beta}T.$$

Результаты рода (13), помещенные в [5], стр. 116, теперь следует дополнить следующими:

Ханеке, [1],

(15) $$\alpha=\tfrac{6}{37},\quad \beta=1;$$

Колесник, [2],

(16) $$\alpha=\tfrac{173}{1067},\quad \beta=\tfrac{331}{200}.$$

На последний результат любезно обратил наше внимание г. проф. Шинцель.

Из (14), в силу (16), получается

Следствие 3.

(17) $$G(T,\bar{H})>AT^{\frac{721}{2134}}\psi(T)\ln^{-1.31}T.$$

Как известно ([5], стр. 97, 323) гипотеза Линделёфа заключается в том, что для любого $\varepsilon>0$,

(18) $$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|<A(\varepsilon)t^\varepsilon,\quad t\geqslant T_0(\varepsilon).$$

Из (12), в силу (18), получается

Следствие 4. *Если справедлива гипотеза Линделёфа, то*

(19) $$G(T,\bar{H})>A(\varepsilon)T^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}\psi(T)\ln^2T.$$

В предположении справедливости гипотезы Римана имеет место следующая оценка ([5], стр. 350)

(20) $$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|<\exp\left(A\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)=t^{\frac{A}{\ln\ln t}}.$$

Из (12), в силу (20), получается

Следствие 5. *Если справедлива гипотеза Римана, то*

(21) $$G(T,\bar{H})>AT^{\frac{1}{2}-\frac{A}{\ln\ln T}}\psi(T)\ln^2T.$$

Следующие части работы содержат доказательство формулы (6)

2. В этой части явно упомянем O-члены соответствующие асимптотическому соотношению (4). Прежде всего, согласно [6], стр. 98, введем обозначение

(22) $$g(t_\nu)=\sum_{m\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{\cos(t_\nu\ln m)}{\sqrt{m}}.$$

Если теперь внимательно просмотреть стр. 101–105 работы [5], то обнаруживается, что Е. К. Титчмарш получил следующее соотношение

(23) $$\sum_{\nu=M+1}^{N}g(t_\nu)g(t_{\nu+1})=\frac{1}{2}(c+1)N+O\left(\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right)+O(\sqrt{t_N}\ln^2t_N).$$

Происхождение члена (ср. [6], стр. 102)

$$O\left(\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right)$$

такого

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}\left\{O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t_\nu}}\right)\right\}=O\left(\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right). \tag{24}$$

Так как ([5], стр. 261)

$$Z(t_\nu)=2(-1)^\nu g(t_\nu)+O(t_\nu^{-1/4}), \tag{25}$$

и

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}\{O(t_\nu^{-1/12}\ln t_\nu)\}=O(t_N^{11/12}\ln t_N), \tag{26}$$

то (см. [6], стр. 105)

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1})=-4\sum_{\nu=M+1}^{N}g(t_\nu)g(t_{\nu+1})+O(t_N^{11/12}\ln t_N). \tag{27}$$

Наконец, из (27), в силу (23), получается

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1})= \tag{28}$$

$$=-2(c+1)N+O\left(\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right)+O(t_N^{11/12}\ln t_N)+O(\sqrt{t_N}\ln^2 t_N).$$

Это последнее и представляет соотношение (4) в развернутом виде.

Анализируя способ Е. К. Титчмарша ([6], стр. 101–105) обнаруживается, что следующие обстоятельства —

(a) фиксирование начала суммирования

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}(\ldots)$$

на постоянной (M — постоянное число),

(b) (с прежним обстоятельством связанный) способ обращения порядка суммирования (ср. [6], стр. 101),

— не являются существенными элементами способа Е. К. Титчмарша оценок соответствующих величин.

Заметив это, попробуем улучшить соотношение (28), в смысле локализации.

3. Прежде всего, пусть

$$H=O\{\sqrt{T}(\ln T)^k\}, \tag{29}$$

где k — целое положительное число. Так как

$$\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}-\sqrt{\frac{T}{2\pi}}=\frac{\frac{H}{2\pi}}{\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}+\sqrt{\frac{T}{2\pi}}}<A\frac{H}{\sqrt{T}}<A(\ln T)^k, \tag{30}$$

то

$$\sum_{\sqrt{T/2\pi}\leqslant m\leqslant\sqrt{(T+H)/2\pi}}\frac{1}{\sqrt{m}}<A\frac{(\ln T)^k}{\sqrt[4]{T}}. \tag{31}$$

Следовательно, (см. (22)), при $t_\nu\in\langle T, T+H\rangle$ в силу (31),

$$g(t_\nu)=\sum_{m<\sqrt{T/2\pi}}\frac{\cos(t_\nu\ln m)}{\sqrt{m}}+O\left\{\frac{(\ln T)^k}{\sqrt[4]{T}}\right\}=\sum_{(m)}+\sum{}'. \tag{32}$$

Далее, в силу (32),

$$P=\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}g(t_\nu)g(t_{\nu+1})= \tag{33}$$

$$=\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\ \sum_{m\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{\cos(t_\nu\ln m)}{\sqrt{m}}\sum_{n\leqslant\sqrt{t_{\nu+1}/2\pi}}\frac{\cos(t_{\nu+1}\ln n)}{\sqrt{n}}=$$

$$=\sum_{(t_\nu)}\sum_{(m)}\sum_{(n)}+\sum_{(t_\nu)}\sum{}'\sum_{(n)}+\sum_{(t_\nu)}\sum_{(m)}\sum{}''+\sum_{(t_\nu)}\sum{}'\sum{}''.$$

Наконец напомним ([4], (23)), что

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}1=\frac{H}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{H^2}{T}\right). \tag{34}$$

4. В силу (25), (29), (31), (32), (34), и, в силу оценки ([5], стр. 109)

$$|Z(t)|=|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|<At^{1/6}\ln t, \tag{35}$$

имеет место

$$\sum_{(t_\nu)}\sum{}'\sum_{(n)}=O\left\{H\ln T\cdot\frac{(\ln T)^k}{\sqrt[4]{T}}\cdot T^{1/6}\ln T\right\}=O\{T^{5/12}(\ln T)^{k+2}\}, \tag{36}$$

$$\sum_{(t_\nu)}\sum{}'\sum{}''=O\{(\ln T)^{k+1}\}. \tag{37}$$

Далее, (ср. [6], стр. 101),

(38)
$$Q=\sum_{(t_\nu)}\sum_{(m)}\sum_{(n)}=\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\ \sum_{m<\sqrt{T/2\pi}}\frac{\cos(t_\nu\ln m)}{\sqrt{m}}\sum_{n<\sqrt{T/2\pi}}\frac{\cos(t_{\nu+1}\ln n)}{\sqrt{n}}=$$
$$=\sum_{(m)}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{(n)}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(t_\nu)}\cos(t_\nu\ln m)\cos(t_{\nu+1}\ln n)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{(m)}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{(n)}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(t_\nu)}\cos(t_\nu\ln m-t_{\nu+1}\ln n)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{(m)}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{(n)}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{(t_\nu)}\cos(t_\nu\ln m+t_{\nu+1}\ln n)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_1+\frac{1}{2}\sum\nolimits_2$$

Применяя теперь для оценки величины (38) способ Е. К. Титчмарша ([6], стр. 101–105) получается (ср. (23), (24))

$$Q=\frac{1}{2}(c+1)\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}1+O\Big\{\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\frac{1}{\sqrt{\ln t_\nu}}\Big\}+O(\sqrt{T}\ln^2T). \tag{39}$$

Однако, в силу (29), (34),

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}1=\frac{H}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O\{(\ln T)^{2k}\}, \tag{40}$$

так что, в силу (39), (40),

$$Q=\frac{c+1}{4\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(H\sqrt{\ln T})+O(\sqrt{T}\ln^2T). \tag{41}$$

Если теперь (36), (37), (41) подставить в (33), то получается

$$P=\frac{c+1}{4\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(H\sqrt{\ln T})+O(\sqrt{T}\ln^2T)+ +O\{T^{5/12}(\ln T)^{k+2}\}+O\{(\ln T)^{k+1}\}. \tag{42}$$

Наконец, полагая

$$\bar{H}=\sqrt{T}\psi(T)\ln T, \tag{43}$$

(что соответствует значению $k=2$ в соотношении (29)) получается

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+\bar{H}}g(t_\nu)g(t_{\nu+1})=\frac{c+1}{4\pi}\sqrt{T}\psi(T)\ln^2T+O(\sqrt{T}\ln^2T). \tag{44}$$

5. Прежде всего, в силу (25), (35),

$$|g(t_\nu)|<AT^{1/6}\ln T,\quad t_\nu\in\langle T,T+\bar{H}\rangle. \tag{45}$$

Дальше, в силу (25), (40), (43), (45),

(46)
$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+\bar{H}}Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1})=$$
$$=\sum_{(t_\nu)}\{2(-1)^\nu g(t_\nu)+O(t_\nu^{-1/4})\}\{2(-1)^{\nu+1}g(t_{\nu+1})+O(t_{\nu+1}^{-1/4})\}=$$
$$=-4\sum_{(t_\nu)}g(t_\nu)g(t_{\nu+1})+O(\bar{H}\ln T\cdot T^{1/6}\ln T\cdot T^{-1/4})+O(T^{-1/2})=$$
$$=-4\sum_{(t_\nu)}g(t_\nu)g(t_{\nu+1})+O\big(T^{5/12}\psi(T)\ln^3T\big).$$

Наконец, принимая во внимание (44), получается

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+\bar{H}}Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1})=-\frac{c+1}{\pi}\sqrt{T}\psi(T)\ln^2T+O(\sqrt{T}\ln^2T),$$

т.е. (6).

Литература

[1] W. Haneke, *Verschärfung der Abschätzung von* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Arith. 8 (1963), стр. 357–430.
[2] Г. А. Колесник, *Об оценке некоторых тригонометрических сумм*, ibid., 25 (1973), стр. 7–30.
[3] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, ibid., 31 (1976), стр. 31–43.
[4] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid., 31 (1976), стр. 45–51.
[5] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.
[6] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 23. 5. 1975
и в исправленной форме 17. 9. 1975 (715)