References

[1] L. Euler, *Opera omnia*, Series Prima, Vol. VIII, p. 334.
[2] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, Vol. 1, pp. 232–234.
[3] — ibid., pp. 236–237.
[4] S. Ramanujan, *Collected Papers*, pp. 210–212.

Received on 30. 5. 75 (720)

ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

Remarques sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan

par

JEAN COQUET (Valenciennes)

1. Introduction. Dans [3], Mendès-France donne la caractérisation suivante des nombres de Pisot–Vijayaraghavan:

THÉORÈME. *Soit θ un réel >1. Soit*

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n) q^r$$

le développement de n en base q. Posons

$$f_{(\theta)}(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n)\theta^r.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que θ soit un nombre de Pisot est que la suite $\big(f_{(\theta)}(n)\big)_{n\in N}$ ne soit pas équirépartie modulo 1.

C'est ce résultat que nous généralisons. Nous avons besoin de quelques définitions et notations:

(1) $\|x\|$ désigne la distance du réel x à l'entier qui lui est le plus proche.

(2) $\varphi = (q_i)_{i\in N^*}$ est une suite d'entiers $\geqslant 2$. Posons $p_0 = 1$, et pour tout $i \in N^*$, $p_i = \prod_{j=1}^{i} q_j$.

Tout entier naturel n se développe de manière unique sous la forme:

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n) p_r \quad \text{où} \quad \forall r\in N,\ a_r(n) \in \{0, \ldots, q_{r+1}-1\}.$$

Ce développement est appelé développement de n en base φ.

(3) Une application f de N dans C est dite φ-additive si, pour tout $i\in N^*$, on a:

$$f(ap_i+b) = f(ap_i)+f(b)$$

quel que soit le couple d'entiers (a, b) satisfaisant à:

$$a\in\{1, \ldots, q_{i+1}-1\} \quad \text{et} \quad b\in\{0, \ldots, p_i-1\}.$$

Une application g de $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{C}$ est dite φ-multiplicative si,

$$g(0) = 1$$

et si, pout tout $i \in \boldsymbol{N}^*$,

$$g(ap_i + b) = g(ap_i)g(b),$$

quel que soit le couple d'entiers (a, b) satisfaisant à:

$$a \in \{1, \ldots, q_{i+1} - 1\} \quad \text{et} \quad b \in \{0, \ldots, p_i - 1\}.$$

Remarquons que, si f est φ-additive,

$$f(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} f\big(a_r(n)p_r\big)$$

et si g est φ-multiplicative,

$$g(n) = \prod_{r=0}^{+\infty} g\big(a_r(n)p_r\big).$$

(4) Posons, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ et tout réel $\theta > 1$:

$$f_{\varphi,\theta}(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n)\theta^r,$$

les $a_r(n)$ étant les coefficients du développement de n en base φ.

Posons également, pour α réel:

$$g_{\alpha,\varphi,\theta}(n) = \exp\big(2i\pi\alpha f_{\varphi,\theta}(n)\big).$$

Remarquons que $f_{\varphi,\theta}$ est φ-additive et que $g_{\alpha,\varphi,\theta}$ est φ-multiplicative de module 1.

Théorème 1. *Soit θ un réel > 1. Supposons que la suite φ soit telle que*

(i) $\sqrt[r]{q_r} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \lambda$, *$\lambda$ étant un réel $\geqslant 1$,*

(ii) *il existe $C > 0$ tel que, pour tout $r \in \boldsymbol{N}^*$:*

$$q_r/\lambda^r \geqslant C.$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que θ soit un nombre de Pisot dont tous les conjugués sont de module $< 1/\lambda$ est que la suite $\big(f_{\varphi,\theta}(n)\big)_{n\in\boldsymbol{N}}$ ne soit pas équirépartie modulo 1.

Théorème 2. *Soit θ un réel > 1. Supposons que la suite φ soit telle que*

$$\sqrt[r]{q_r} \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que θ soit un entier naturel est que la suite $\big(f_{\varphi,\theta}(n)\big)_{n\in\boldsymbol{N}}$ ne soit pas équirépartie modulo 1.

Remarque. Dans le théorème 1, si (i) est réalisée avec $\lambda = 1$, (ii) est réalisée avec $C = 2$.

2. Lemmes et démonstration des théorèmes

Lemme 1. *Une application g, φ-multiplicative de module $\leqslant 1$, a une valeur moyenne nulle si et seulement si:*

$$\pi_k(g) = \prod_{r=1}^{k}\Big[\frac{1}{q_r}\sum_{a=0}^{q_r-1} g(ap_{r-1})\Big] \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. Ce lemme est le corollaire de la proposition I.2 de [1]. Il se démontre en généralisant aux fonctions φ-multiplicatives la proposition 2 de [2].

Lemme 2. *Soit $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ des nombres de module 1. Posons*

$$\Delta_k = \varrho_1^k + \ldots + \varrho_s^k.$$

Il existe une infinité d'indices k tels que

$$|\Delta_k| \geqslant s/2.$$

Démonstration. Posons, pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $\varrho_j = \exp(2i\pi\beta_j)$.

1er cas: *$\beta_1, \ldots, \beta_s$ sont rationnels.* Alors il existe $m \in \boldsymbol{N}^*$ tel que $m\beta_1, \ldots \ldots, m\beta_s$ soient entiers. Il en résulte que, si $m|k$, $\Delta_k = s$.

2ème cas: *l'un au moins des nombres $\beta_1, \ldots, \beta_s$ est irrationnel.* Parmi ces s nombres, on peut en trouver t $(1 \leqslant t \leqslant s)$ (disons $\beta_1, \ldots, \beta_t$) tels que:

(a) $1, \beta_1, \ldots, \beta_t$ soient rationnellement indépendants,

(b) pour tout entier j satisfaisant à: $t+1 \leqslant j \leqslant s$:

$$\beta_j = a_{j1}\beta_1 + \ldots + a_{jt}\beta_t + bj,$$

les nombres $a_{j1}, \ldots, a_{jt}, b_j$ $(t+1 \leqslant j \leqslant s)$ étant rationnels.

Soit D le dénominateur commun des nombres:

$$a_{j1}, \ldots, a_{jt}, b_j \quad (t+1 \leqslant j \leqslant s).$$

Pour $u \in \{1, \ldots, t\}$ et $t+1 \leqslant j \leqslant s$ posons:

$$a_{ju} = a'_{ju}/D \quad \text{et} \quad b_j = b'_j/D$$

de sorte que les nombres a'_{ju} et b'_j sont entiers.

Posons:

$$M = \max_{t+1\leqslant j\leqslant s} (|a'_{j1}| + \ldots + |a'_{jt}| + |b'_j|).$$

D'après le théorème de Kronecker, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers k tels que:

$$\|k\beta_{j'}\| < \varepsilon/\max(D, M) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j' \leqslant t.$$

Pour un tel k, on a:

$$\|Dk\beta_{j'}\| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j' \leqslant t$$

et

$$\|Dk\beta_j\| < \frac{\varepsilon}{\max(D, M)} \{|a'_{j1}| + \ldots + |a'_{jt}| + |b'_j|\} \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad t+1 \leqslant j \leqslant s.$$

Utilisant alors l'inégalité:

$$|1 - e^{2i\pi\omega}| \leqslant 2\pi \|\omega\|,$$

on déduit qu'il existe une infinité d'entiers k pour lesquels:

$$|s - \Delta_k| < 2\pi\varepsilon s.$$

Le lemme est démontré.

Lemme 3. *Soit $\theta > 1$ un nombre de Pisot et soit $r \in \boldsymbol{N}^*$. Si θ^r est rationnel, θ est entier.*

Démonstration. Ce lemme est évident.

Démonstration du théorème 1. Nous distinguerons 3 cas:

1. θ n'est pas un nombre de Pisot.

2. θ est un nombre de Pisot dont tous les conjugués (s'il en existe) sont de module $< 1/\lambda$.

3. θ est un nombre de Pisot dont un conjugué au moins est de module $\geqslant 1/\lambda$.

1er cas: On sait alors que $\prod_{k=0}^{\infty} |\cos \pi h\theta^k|$ diverge pour tout $h \in \boldsymbol{N}^*$ (voir [4]).

D'après le critère de Weyl et le lemme 1, nous devons montrer que, quel que soit $h \in \boldsymbol{N}^*$

$$\prod_{r=1}^{k} \Big[\frac{1}{q_r} \sum_{a=0}^{q_r - 1} g_{h,\varphi,\theta}(ap_{r-1})\Big] \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Il est facile de voir que ceci équivaut à:

$$\prod_{\substack{r=0 \\ h\theta^r \notin \boldsymbol{Z}}}^{k} \frac{\sin(\pi q_{r+1} h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \quad \text{quel que soit } h \in \boldsymbol{N}^*.$$

Fixons $h \in \boldsymbol{N}^*$; si $\|h\theta^r\| > \frac{1}{4}$ pour une infinité d'indices r, on a bien:

$$\prod_{r=0}^{+\infty} \left|\frac{\sin(\pi q_{r+1} h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right| = 0$$

car ce produit contient une infinité de termes $\leqslant \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)}$.

Dans le cas contraire il existe $r_0 \in \boldsymbol{N}^*$ tel que:

$$r \geqslant r_0 \Rightarrow \|h\theta^r\| \leqslant \tfrac{1}{4}.$$

Donc, si $r \geqslant r_0$, on a:

$$\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1} h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right| \leqslant \left|\frac{\sin(2\pi h\theta^r)}{2\sin(\pi h\theta^r)}\right| = |\cos(h\pi\theta^r)|.$$

La divergence de $\prod_{k=0}^{+\infty} |\cos(\pi h\theta^k)|$ implique celle de

$$\prod_{r=0}^{+\infty} \left|\frac{\sin(\pi q_{r+1} h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right|.$$

La suite $\big(f_{\varphi,\theta}(n)\big)_{n \in \boldsymbol{N}}$ est équirépartie modulo 1.

2ème cas: $\theta > 1$ est un nombre de Pisot dont tous les conjugués $\theta_1, \ldots, \theta_m$ sont de module $< 1/\lambda$ (si θ n'a pas de conjugué, θ est un entier naturel et le résultat est trivial).

Posons $\mu = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\theta_i|$. Il est évident que $\mu \in]0, 1/\lambda[$.

Comme, pour tout $r \in \boldsymbol{N}^*$, $\theta^r + \theta_1^r + \ldots + \theta_m^r$ est un entier relatif, on a, pour tout $r \in \boldsymbol{N}_1^*$

$$\|\theta^r\| \leqslant m\mu^r. \tag{1}$$

Nous allons montrer que la fonction φ-multiplicative de module 1, $g_{1,\varphi,\theta}$ définie par:

$$g_{1,\varphi,\theta}(n) = \exp\big(2i\pi f_{\varphi,\theta}(n)\big)$$

n'a pas une valeur moyenne nulle.

Le critère de Weyl permettra alors de conclure.

D'après le lemme 1, il suffit de vérifier que:

$$\prod_{r=0}^{k} \left|\frac{1}{q_{r+1}} \sum_{a=0}^{q_{r+1}-1} \exp(2i\pi a\theta^r)\right|$$

ne tend pas vers 0 lorsque $k \to +\infty$.

Ceci revient à prouver que:

$$\prod_{r=0}^{k}\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi\theta^r)}\right|$$

ne tend pas vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

(Remarquons que chaque terme du produit est défini et non nul car θ est supposé non entier naturel — voir lemme 3.)

Il suffit donc de montrer la convergence de la série:

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\left[1-\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi\theta^r)}\right|\right].$$

Remarquons que, d'après (1),

$$q_{r+1}\|\theta^r\|\xrightarrow[r\to+\infty]{}0.$$

On a, pour $r\geqslant r_1$,

$$1\geqslant\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi\theta^r)}\right|\geqslant\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}m\mu^r)}{q_{r+1}\sin(\pi m\mu^r)}\right| \tag{2}$$

d'après (1) et la décroissance de la fonction

$$\psi_q(x)=\left|\frac{\sin(\pi qx)}{q\sin(\pi x)}\right|\quad\text{sur}\quad\left]0,\frac{1}{2q}\right[.$$

On est ramené à prouver la convergence de:

$$\sum_{r=r_1}^{+\infty}\left[1-\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}m\mu^r)}{q_{r+1}\sin(\pi m\mu^r)}\right|\right]. \tag{3}$$

Observons que:

$$\frac{\sin(\pi q_{r+1}m\mu^r)}{q_{r+1}}=\pi m\mu^r+O(q_{r+1}^2\mu^{3r})$$

et

$$\sin(\pi m\mu^r)=\pi m\mu^r+O(\mu^{3r}),$$

de sorte que:

$$1-\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}m\mu^r)}{q_{r+1}\sin(\pi m\mu^r)}\right|=O(q_{r+1}^2\mu^{2r}).$$

L'hypothèse faite sur les q_r implique la convergence de $\sum_{r=0}^{+\infty}q_{r+1}^2\mu^{2r}$ donc celle de (3).

3ème cas: On suppose ici que λ est >1 et que $\theta>1$ est un nombre de Pisot dont un conjugué au moins est de module $\geqslant 1/\lambda$. Nous posons $\mu=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\theta_i|$ comme précédemment. Rangeons les conjugués de manière que:

$$|\theta_1|=\ldots=|\theta_s|=\mu>|\theta_{s+1}|\geqslant\ldots\geqslant|\theta_m|.$$

Le lemme 2 permet de montrer qu'il existe une infinité $\mathcal{R}$ d'indices r tels que:

$$|\theta_1^r+\ldots+\theta_m^r|\geqslant\frac{s}{4}\mu^r\geqslant\frac{\mu^r}{4}.$$

En effet

$$|\theta_{s+1}^r+\ldots+\theta_m^r|=o(\mu^r)\quad\text{lorsque } r\to+\infty.$$

Soit alors $h\in\boldsymbol{N}^*$. On doit montrer que:

$$\prod_{r=0}^{k}\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right|\xrightarrow[k\to+\infty]{}0.$$

On constate que $\|h\theta^r\|\xrightarrow[r\to+\infty]{}0$ et que, pour une infinité $\mathcal{R}_1$ d'indices r:

$$\|h\theta^r\|>h\mu^r/4.$$

Donc, pour une infinité d'indices r,

$$\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right|\leqslant\frac{1}{q_{r+1}\sin\left(\dfrac{\pi h\mu^r}{4}\right)}\leqslant\frac{2}{q_{r+1}h\mu^r}\qquad(\text{dès que } h\mu^r\leqslant 2).$$

Si $\mu>1/\lambda$,

$$\frac{1}{q_{r+1}\mu^r}\xrightarrow[r\to+\infty]{}0.$$

Le résultat est alors évident.

Si $\mu=1/\lambda$,

$$q_{r+1}\|h\theta^r\|\geqslant\frac{h}{4}q_{r+1}\mu^r\geqslant\frac{Ch}{4}$$

pour une infinité $\mathcal{R}_1$ d'indices r (d'après l'hypothèse 2 du théorème).

Donc, pour une infinité d'indices r,

$$\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1}\|h\theta^r\|)}{\pi q_{r+1}\|h\theta^r\|}\right|\leqslant T<1\quad\text{où}\quad T=\sup_{x\geqslant hC/4}\left|\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right|.$$

Comme, $\sin(\pi h\theta^r) \underset{r\to+\infty}{\sim} \pi\|h\theta^r\|$, on a, pour une infinité $\mathscr{R}_2$ d'indices r:

$$\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1} h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right| \leqslant \frac{T+1}{2} < 1.$$

Le théorème est démontré.

Démonstration du théorème 2. Si θ est entier naturel, $(f_{\varphi,\theta}(n))_{n\in N}$ n'est pas équirépartie modulo 1. Dans le cas contraire,

1er cas: *θ n'est pas un nombre de Pisot.* La démonstration du 1er cas du théorème 1 peut être reconduite car on n'y utilise aucune hypothèse sur φ.

2ème cas: *θ est un nombre de Pisot* ayant au moins un conjugué. Posons

$$\mu = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |\theta_i| \quad (\theta_1, \ldots, \theta_m \text{ sont les conjugués de } \theta).$$

On a, quel que soit $h\in N^*$,

$$\|h\theta^r\| \geqslant \frac{h\mu^r}{4} \quad \text{pour une infinité d'indices } r.$$

Pour un tel indice,

$$\left|\frac{\sin(\pi q_{r+1} h\theta^r)}{q_{r+1}\sin(\pi h\theta^r)}\right| \leqslant \frac{1}{q_{r+1}\sin(\pi\|h\theta^r\|)}$$

$$\leqslant \frac{1}{q_{r+1}\sin(\pi h\mu^r/4)} \leqslant \frac{2}{q_{r+1}h\mu^r} \quad \text{dès que } h\mu^r \leqslant 2.$$

Il est clair que $q_{r+1}\mu^r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$.

Le théorème est démontré.

3. Remarques

1. Dans la démonstration du théorème 1, on a prouvé que, si θ n'était pas un nombre de Pisot, la suite $(f_{\varphi,\theta}(n))_{n\in N}$ était équirépartie modulo 1 sans faire d'hypothèse sur φ.

2. En modifiant légèrement la démonstration du théorème 1, on peut démontrer avec l'hypothèse plus faible:

$$\limsup \sqrt[r]{q_r} = \lambda \geqslant 1,$$

que:

Si $\theta > 1$ est un nombre de Pisot dont tous les conjugués sont de module $< 1/\lambda$, la suite $(f_{\varphi,\theta}(n))_{n\in N}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

Si $\theta > 1$ est un nombre de Pisot ayant un conjugué θ_1 de module $\geqslant 1/\lambda$ et si ses autres conjugués $\theta_2, \ldots, \theta_m$ satisfont à: $|\theta_i| < |\theta_1|$ quel que soit $i\in\{2, \ldots, m\}$, la suite $(f_{\varphi,\theta}(n))_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1.

Références

[1] J. Coquet, *Thèse de troisième cycle*, Orsay 1975.

[2] H. Delange, *Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives*, Acta Arith. 21 (1972), p. 285–298.

[3] M. Mendès-France, *Deux remarques concernant l'équirépartition des suites*, ibid., 14 (1968), p. 163–167.

[4] Ch. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Série 2, 7 (1938), p. 205–248.

Reçu le 5. 6. 1975 (723)