[4] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité, application a un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (3) 72 (1955), pp. 69–92.
[5] P. Flor, *Über eine Klasse von Folgen natürlicher Zahlen*, Math. Annalen 140 (1960), pp. 299–307.
[6] M. Grandet-Hugot, *Ensembles fermés d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (3) 82 (1965), pp. 1–35.
[7] G. H. Hardy, *A problem of diophantine approximation*, Journ. Ind. Math. Soc. 11 (1919), pp, 162–166; *Collected works I*, pp. 124–129.
[8] L. Kronecker, *Zwei Sätze über Gleichungen mit Ganzzahligen Coefficienten*, J. Reine Angew. Math. 53 (1857), pp. 173–175.
[9] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. Math. 34 (1933), pp. 461–479.
[10] Ch. Pisot, *La repartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 7 (1938), pp. 205–248.
[11] R. Salem, *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. J. 11 (1944), pp. 103–107.
[12] — *Power series with integral coefficients*, ibid., 12 (1945), pp. 153–171.
[13] C. L. Siegel, *Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle*, ibid., 11 (1944), pp. 597–602.
[14] A. Thue, *Über eine Eigenshaft die keine transzendente Grösse haben kann*, Skrifter Vidensk. I. Kristiania 2 (1912), No. 20, pp. 1–15.
[15] T. Vijayaraghavan, *On the fractional parts of the powers of a number (II)*, Proc. Camb. Phil. Soc. 37 (1941), pp. 349–357.

THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
Vancouver, Canada

Received on 25. 6. 1975 (732)

ACTA ARITHMETICA
XXXII (1977)

Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires

par

J. Coquet (Valenciennes) et M. Mendès-France (Talence)

1. Introduction. Soit $F\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{C}$ une suite infinie. On appelle spectre (de Fourier–Bohr) de F l'ensemble

$$\operatorname{sp}(F) = \Big\{\alpha\in\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\,\Big|\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}F(k)e(-\alpha k)\Big|>0\Big\}$$

(la notation $e(x)$ représente $\exp 2i\pi x$).

On dit que F est pseudo-aléatoire si les deux conditions suivantes sont remplies (voir [1] et [2]):

(i) Pour tout entier p, la limite $\gamma(p)$ de la quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{F}(k)F(k+p)$$

existe quand n croît indéfiniment (γ s'appelle la corrélation de F);

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\gamma(k)|^2=0.$

Une des propriétés remarquables des suites pseudo-aléatoires est qu'elles sont à spectre vide (dans la théorie de l'équirépartition (mod 1), cette propriété porte le nom de „théorème de Van der Corput"). La réciproque est fausse: la suite $n\mapsto e(\sqrt{n})$ est à spectre vide, mais elle n'est pas pseudo-aléatoire.

Dans [2], J.-P. Bertandias précise les différences (et les ressemblances) entre suite pseudo-aléatoire et suite à spectre vide. Dans notre article, nous nous proposons de montrer que pour certaines classes de suites, il y a équivalence entre les deux concepts „spectre vide" et „pseudo-aléatoire".

2. Les suites q-multiplicatives. Soit $q\geqslant 2$ un entier donné. On dit que la suite $f\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}$ est *q-additive* si pour tous entiers $a\in\{0,1,\ldots,q-1\}$, $k\in\{0,1,2,\ldots\}$, $b\in\{0,1,\ldots,q^k-1\}$ on a

$$f(aq^k+b) = f(aq^k)+f(b).$$

Une suite $F\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{C}$ est dite *q-multiplicative* si, sous les mêmes hypothèses, on a $F(0)=1$ et

$$F(aq^k+b) = F(aq^k)F(b).$$

Introduites par Gelfond [6], ces deux familles de fonctions ont été étudiées par Bésineau [3], Coquet [4], Delange [5] et Mendès-France [9]. Signalons que les deux suites $n\to an$ et $n\to as(n)$ ($s(n)$ désigne la somme des chiffres q-adiques de n) sont q-additives, de sorte que leurs exponentielles sont q-multiplicatives.

Ces deux dernières suites font partie d'une sous-famille de suites q-additives ainsi définies. Soit

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)q^k, \qquad e_k(n)\in\{0,1,\ldots,q-1\}$$

le développement de n en base q ($e_k(n)$ est nul sitôt que k est suffisamment grand). Soit par ailleurs $c=(c_k)$ une suite de nombres réels. A l'entier n, on associe le nombre

$$f_c(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)c_k. \tag{1}$$

On désigne par M_q la famille des suites q-multiplicatives $e(f_c)$ où f_c est du type (1).

Dans cet article, nous établissons le théorème suivant où $\|x\|$ désigne $\min\limits_{n\in\boldsymbol{Z}}|x-n|$:

THÉORÈME. *Soit $F\in M_q$. Les quatre affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est à spectre vide;*

(ii) *F est pseudo-aléatoire;*

(iii) *si $e(c_k)$ désigne $F(q^k)$,*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|c_{k+1}-qc_k\|^2 = +\infty;$$

(iv) *pour tout $a\in\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$,*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|c_k-aq^k\|^2 = +\infty.$$

On remarquera que dans le cas $q=2$, la famille M_2 coïncide avec l'ensemble des suites 2-multiplicatives, de module 1, en sorte que toute suite 2-multiplicative, de module 1, à spectre vide est nécessairement pseudo-aléatoire. Il serait intéressant d'étendre ce résultat au cas où $q>2$.

En observant que

$$e_k(n) = \left[\frac{n}{q^k}\right]-q\left[\frac{n}{q^{k+1}}\right],$$

on vérifie immédiatement

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)c_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{q^k}\right](c_k-qc_{k-1})$$

où on a posé $c_{-1}=0$ et où $[x]$ désigne la partie entière de x. Le théorème admet donc la formulation suivante:

COROLLAIRE 1. *Soit $a=(a_k)$ une suite infinie de nombres réels et soit*

$$F(n) = e\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{q^k}\right]a_k\Big).$$

Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *F est à spectre vide;*

(ii) *F est pseudo-aléatoire;*

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|^2 = +\infty.$

Il est bien clair que le théorème précédent admet des applications dans la théorie de l'équirépartition (mod 1) ou (mod m). En reprenant les idées de Bésineau [3], on pourra même obtenir des résultats concernant plusieurs bases. On se contentera de n'en citer qu'un seul, sans démonstration, lequel généralise une caractérisation des nombres de Pisot–Vijayaraghavan (P. V. en abrégé) obtenue dans [8] par l'un des auteurs.

Soient $\theta_1>1,\ldots,\theta_m>1$ des nombres réels et $q_1\geqslant 2,\ldots,q_n\geqslant 2$ des entiers premiers entre eux deux à deux. Soit

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_{kl}(n)q_l^k, \qquad e_{kl}(n)\in\{0,1,\ldots,q_l-1\}$$

le développement de n en base q_l ($l=1,2,\ldots,m$).

COROLLAIRE 2. *La suite*

$$n\mapsto \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} e_{kl}(n)\theta_l^k$$

est équirépartie (mod 1) *si et seulement si l'un au moins des nombres $\theta_1,\ldots,\theta_m$ n'est pas un nombre P. V.*

La démonstration du théorème se fait selon le schéma logique suivant:

$$\begin{tikzcd} & \text{(i)} \arrow[dl] & \\ \text{(iv)} \arrow[dr] & & \text{(ii)} \arrow[ul] \\ & \text{(iii)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) a été signalée dans l'introduction. Il reste donc à établir les trois autres.

3. Une inégalité diophantienne. L'implication (iv)$\Rightarrow$(iii), démontrée indépendamment par J. Lesca, est conséquence immédiate du lemme qui suit, dans lequel $((x))$ représente le reste (mod 1) du nombre réel x, $-\frac{1}{2} < ((x)) \leqslant \frac{1}{2}$.

LEMME. *Soit $c = (c_k)$ une suite infinie réelle et soit*

$$a_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((c_k - qc_{k-1}))}{q^k} \qquad (c_{-1} = 0).$$

Pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$(q-1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - a_0 q^k\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|c_{k+1} - qc_k\|^2 \leqslant (q+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - aq^k\|^2.$$

Démonstration. Pour la démonstration du théorème, seule la première inégalité est nécessaire. Etablissons aussi néanmoins la seconde inégalité, laquelle est d'ailleurs triviale:

$$\|c_{k+1} - qc_k\| \leqslant \|c_{k+1} - aq^{k+1}\| + q\|c_k - aq^k\|$$

d'où:

$$\|c_{k+1} - qc_k\|^2 \leqslant (q+1)\left(\|c_{k+1} - aq^{k+1}\|^2 + q\|c_k - aq^k\|^2\right).$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|c_{k+1} - qc_k\|^2 \leqslant (1+q)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - aq^k\|^2 - (1+q)\|c_0 - a\|^2$$
$$\leqslant (1+q)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - aq^k\|^2.$$

Montrons maintenant la première inégalité du lemme. On pose pour simplifier l'écriture $\eta_k = ((c_k - qc_{k-1}))$, de sorte que $c_k = qc_{k-1} + u_k + \eta_k$,

$u_k \in \mathbf{Z}$. Un calcul élémentaire permet d'établir par récurrence

$$c_k = q^k\left(u_0 + \eta_0 + \frac{u_1 + \eta_1}{q} + \frac{u_2 + \eta_2}{q^2} + \ldots + \frac{u_k + \eta_k}{q^k}\right),$$

donc

$$c_k \equiv q^k\left(\eta_0 + \frac{\eta_1}{q} + \frac{\eta_2}{q^2} + \ldots + \frac{\eta_k}{q^k}\right) \pmod 1.$$

Soit alors

$$a_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_j}{q^j}.$$

On a:

$$\|c_k - a_0 q^k\| = q^k \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\eta_j}{q^j}\right|$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - a_0 q^k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_{k+i}}{q^i}\right)^2$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_{k+i}^2}{q^{2i}} + 2 \sum_{1 \leqslant i < i'} \frac{\eta_{k+i}\eta_{k+i'}}{q^{i+i'}}\right)$$
$$= \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ i \geqslant 1}} \frac{\eta_{k+i}^2}{q^{2i}} + 2 \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ i \geqslant 1 \\ j \geqslant 1}} \frac{\eta_{k+i}\eta_{k+i+j}}{q^{2i+j}}$$
$$= \sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2 \sum_{0 \leqslant k \leqslant r-1} \frac{1}{q^{2(r-k)}} + 2 \sum_{r \geqslant 1} \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant r-1}} \frac{\eta_r \eta_{r+j}}{q^{2(r-k)+j}}$$
$$\leqslant \frac{1}{q^2-1} \sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2 + 2 \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{q^j} \sum_{r \geqslant 1} \eta_r \eta_{r+j} \sum_{0 \leqslant k \leqslant r-1} \frac{1}{q^{2(r-k)}}$$
$$\leqslant \frac{1}{q^2-1}\left(\sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2 + 2 \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{q^j} \sum_{r \geqslant 1} \eta_r \eta_{r+j}\right).$$

On applique l'inégalité de Schwarz à la dernière somme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k - a_0 q^k\|^2 \leqslant \frac{1}{q^2-1}\left(\sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2 + 2 \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{q^j} \sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2\right)$$
$$= \frac{1}{q^2-1}\left(1 + \frac{2}{q-1}\right) \sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2 = \frac{1}{(q-1)^2} \sum_{r \geqslant 1} \eta_r^2. \quad \blacksquare$$

4. Preuve que (iii) implique (ii). Cette preuve est longue et consiste à reprendre les calculs développés dans ([7], p. 45 à 53). Comme ces calculs sont presque les mêmes, nous nous contenterons d'en signaler les étapes.

Soit donc $F_c = e(f_c)$ où, rappelons-le,

$$f_c(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, c_k.$$

On introduit l'opérateur de translation τ qui agit sur c: ainsi τc est la suite $(c_1, c_2, \ldots)$ et plus généralement, $\tau^\nu c$ représente la suite $(c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots)$. Les relations de récurrences $e_k(qn+a) = e_{k-1}(n) + a$ $(k = 1, 2, \ldots;$ $a = 0, 1, \ldots, q-1)$ permettent d'établir l'existence de la corrélation γ_c de F_c ainsi que les relations (voir [7], p. 46 ou [3], p. 411):

$$\gamma_{\tau^k c}(qn+a) = \frac{q-a}{q}\, e(ac_k)\,\gamma_{\tau^{k+1}c}(n) + \frac{a}{q}\, e\big((a-q)c_k\big)\,\gamma_{\tau^{k+1}c}(n+1) \tag{2}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots;$ $k = 0, 1, 2, \ldots;$ $a = 0, 1, \ldots, q-1$.

Il reste à montrer que sous la condition

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|c_{k+1} - qc_k\|^2 = +\infty, \tag{3}$$

ces équations impliquent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_c(k)|^2 = 0. \tag{4}$$

A cet effet, on définit la corrélation Γ_c de γ_c dont l'existence est assurée par le théorème de Wiener selon lequel toute suite définie positive admet une corrélation. L'équation (4) s'écrit alors $\Gamma_c(0) = 0$. Montrons donc la nullité de Γ_c. Les relations de récurrence (2) se transmettent à Γ_c sous forme matricielle.

Soit la matrice $N(c)$ définie par

$$6q^2 N(c) =$$
$$= \begin{bmatrix} 4q^2+2 & (q^2-1)e(-qc_0) & (q^2-1)e(qc_0) \\ 4(q^2-1)e(c_0) & (q+1)(q+2)e\big((1-q)c_0\big) & (q-1)(q-2)e\big((1+q)c_0\big) \\ 4(q^2-1)e(-c_0) & (q-1)(q-2)e\big(-(1+q)c_0\big) & (q+1)(q+2)e\big((q-1)c_0\big) \end{bmatrix}.$$

Alors ([7], p. 50)

$$\begin{pmatrix} \Gamma_c(0) \\ \Gamma_c(1) \\ \Gamma_c(-1) \end{pmatrix} = \Big(\prod_{k=0}^{l-1} N(\tau^k c)\Big) \begin{pmatrix} \Gamma_{\tau^l c}(0) \\ \Gamma_{\tau^l c}(1) \\ \Gamma_{\tau^l c}(-1) \end{pmatrix}.$$

Si donc $|||\cdot|||$ représente une norme d'algèbre définie sur l'algèbre des matrices 3×3, on a pour tout $l \geqslant 1$

$$\Gamma_c(0) \leqslant \Big|\Big|\Big| \prod_{k=0}^{l-1} N(\tau^k c) \Big|\Big|\Big|.$$

On en déduit

$$|\Gamma_c(0)|^2 \leqslant \prod_{k=0}^{\infty} |||N(\tau^k c) N(\tau^{k+1} c)|||. \tag{5}$$

Choisissons la norme définie par

$$|||(a_{ij})||| = \sup_{1\leqslant i\leqslant 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}|.$$

Compte tenu de l'expression de la matrice $N(c)$, un calcul simple (mais laborieux!) montre que

$$|||N(\tau^k c) N(\tau^{k+1} c)||| \leqslant 1 - \frac{4}{45} \sin^2 \pi (c_{k+1} - qc_k)$$
$$\leqslant 1 - \frac{16}{45} \|c_{k+1} - qc_k\|^2.$$

D'après la condition (3) qui implique la divergence vers 0 du produit infini, et de l'inégalité (5), $\Gamma_c(0)$ est nul. F_c est donc pseudo-aléatoire. ∎

5. Preuve que (i) implique (iv). Soit $F = e(f)$ une suite q-multiplicative de module 1. La suite $n \mapsto F(n)e(-\alpha n)$ est elle aussi q-multiplicative, de module 1 pour tout α réel. D'après des formules établies dans [5] et [9]

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} F(k)\, e(-\alpha k)\Big| = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q} \Big|\sum_{a=0}^{q-1} F(aq^k)\, e(-\alpha a q^k)\Big|.$$

Supposons qu'en particulier, $F = F_c \in M_q$. Dans ces conditions $F(aq^k) = e(ac_k)$ de sorte que

$$\frac{1}{q}\Big|\sum_{a=0}^{q-1} F_c(aq^k)\, e(-\alpha a q^k)\Big| = \frac{1}{q}\Big|\sum_{a=0}^{q-1} e\big((c_k - \alpha q^k)a\big)\Big| = \Big|\frac{\sin \pi (c_k - \alpha q^k) q}{q \sin \pi (c_k - \alpha q^k)}\Big|.$$

L'hypothèse $\mathrm{sp}(F_c) = \varnothing$ se traduit donc par

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \prod_{k=0}^{\infty} \Big|\frac{\sin \pi (c_k - \alpha q^k) q}{q \sin \pi (c_k - \alpha q^k)}\Big| = 0.$$

Cette même hypothèse $\mathrm{sp}(F_c) = \varnothing$ a pour conséquence que la suite $n \mapsto F_c(an)e(-\alpha n)$ est de moyenne nulle pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout réel α. Choisissant $a = q^\nu$, on en déduit $\mathrm{sp}(F_{\tau^\nu c}) = \varnothing$. Ainsi

$$\forall a \in \boldsymbol{R},\ \forall \nu \geqslant 0,\quad \prod_{k=\nu}^{\infty} \left| \frac{\sin \pi (c_k - aq^k) q}{q \sin \pi (c_k - aq^k)} \right| = 0.$$

Ou bien le produit infini diverge vers 0, ou bien *une infinité de facteur sont nuls*. Dans le premier cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \left| \frac{\sin \pi q (c_k - aq^k)}{q \sin \pi (c_k - aq^k)} \right| \right) = +\infty$$

soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| c_k - aq^k \|^2 = +\infty. \tag{6}$$

Dans le second cas, il existe une infinité de k pour lesquels

$$c_k - aq^k \in \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q} \right\}$$

et de toute évidence, (6) a encore lieu. ■

Bibliographie

[1] J. Bass, *Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseud aléatoires*, Bull. Soc. Math. France 87 (1959), p. 1–69.

[2] J.-P. Bertrandias, *Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asym totique d'ordre p*, supplément Bull. Soc. Math. France, mémoire 5, (1966), p. 3–10

[3] J. Bésineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction „somm des chiffres"*, Acta Arith. 20 (1972), p. 401–416.

[4] J. Coquet, *Sur les fonctions q-multiplicatives B-presque périodiques*, C. R. Aca Sci. Paris (à paraître).

[5] H. Delange, *Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives*, Acta Arith. 2 (1972), p. 285–298.

[6] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicativ données*, ibid., 13 (1968), p. 259–265.

[7] M. Mendès France, *Nombres normaux. Applications aux fonctions pseud aléatoires*, Journal d'Analyse Mathem. (Jérusalem), 20 (1967), p. 1–56.

[8] — *Deux remarques concernant l'équirépartition des suites*, Acta Arith. 14 (1968 p. 163–167.

[9] — *Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1*, Journal of Number Theor 5 (1973), p. 1–15.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CENTRE UNIVERSITAIRE DE VALENCIENNES
Valenciennes, France

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
Talence, France

Reçu le 3. 7. 1975 (73