then the above argument gives $A^{-1} = 2^{1/2}(2^{3/2}-1)^{1/3}a^{2/3}$ in the theorem above. We may compare this with Karatsuba's uniform estimation [2] with respect to k and x;

$$\Delta_k(x) \ll x^{1-(2(2ak)^{2/3})^{-1}}(B\log x)^k,$$

where a is the same as above and B is some positive absolute constant. We may remark here that a slight improvement of the above theorem can be obtained by choosing $\beta(b) = \big(2(78b)^{2/3}-78(78b)^{1/3}+2\big)^{-1}$ in the above argument.

References

[1] А. А. Карацуба, *Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения*, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 112 (1971), pp. 241–255.

[2] — *Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле*, Изв. АН СССР, сер. матем., 36 (1972), pp. 475–483.

[3] Г. А. Колесник, *Об оценке некоторых тригонометрических сумм*, Acta Arith. 25 (1973), pp. 7–30.

[4] H.-E. Richert, *Zur Abschätzung der Riemannschen Zetafunktion in der Nähe der Vertikalen* $\sigma = 1$, Math. Ann. 169 (1967), pp. 97–101.

[5] E. K. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford 1951.

[6] P. Turán, *On some recent results in the analytic theory of numbers*, Proc. of Sympos. in Pure Math. 20 (1969), pp. 359–374.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
RIKKYO UNIVERSITY
Tokyo, Japan

Received on 14. 3. 1975
and in revised form on 8. 7. 1975 (686)

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

Fonctions g-additives et formule asymptotique pour la propriété $(n, f(n)) = q$

par

MICHEL OLIVIER (Bordeaux)

1. Introduction. Un théorème bien connu de Čebyšev dit que la probabilité que deux entiers n et m soient premiers entre eux vaut $6/\pi^2$; autrement dit:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{xy} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ 1\leqslant m\leqslant y\\ (n,m)=1}} 1 = \frac{6}{\pi^2}.$$

On peut s'attendre à ce que ce résultat reste vrai si les entiers n et m sont tels que $n = f(m)$, où f est une fonction arithmétique à valeurs entières, pourvu que f ne conserve pas les propriétés arithmétiques de l'entier n. Plusieurs résultats de cette nature ont été obtenus notamment par G. L. Watson [14], Erdös et Lorentz [4], T. Estermann [5], R. R. Hall [8], [9], [10], et enfin par A. S. Fainleib [6].

Au contraire, si la fonction arithmétique f préserve certaines propriétés arithmétiques, on peut espérer un résultat différent. C'est ce qui a été démontré pour les fonctions multiplicatives par P. Erdös [3] et par E. J. Scourfield [13].

Dans ce qui suit nous étudions sous cet aspect une fonction g-additive. Cette notion a été introduite par A. O. Gelfond [7] et développée entre autres par J. Bésineau [1], H. Delange [2] et M. Mendès-France [11].

Si g est un entier >1, on dit que la fonction arithmétique f est g-additive si, quel que soit $k\geqslant 0$, on a:

$$f(ag^k+b) = f(ag^k)+f(b) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant a\leqslant g-1 \text{ et } 0\leqslant b\leqslant g^k-1.$$

On dit que la fonction arithmétique F est g-multiplicative si, quel que soit $k\geqslant 0$, on a:

$$F(ag^k+b) = F(ag^k)\cdot F(b) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant a\leqslant g-1 \text{ et } 0\leqslant b\leqslant g^k-1.$$

En particulier $F(0)=1$ si F n'est pas identiquement nulle. En outre, F est complètement déterminée quand on connait sa valeur sur les entiers de la forme ag^k ($k\geqslant 0, 1\leqslant a\leqslant g-1$). Il suffit d'écrire l'entier n dans le système de numération à base g:

$$n=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k(n)g^k,\quad \text{avec}\quad 0\leqslant\varepsilon_k(n)\leqslant g-1 \text{ pour tout } k\geqslant 0.$$

La valeur $F(n)$ est donnée par:

$$F(n)=\prod_{k=0}^{\infty}F\big(\varepsilon_k(n)g^k\big).$$

Un exemple simple de fonction g-additive est fourni par la fonction „somme des chiffres en base g" définie par:

$$s(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k(n).$$

Dans la suite nous évaluons en particulier la probabilité pour que $(n,s(n))=1$.

Si A est un ensemble d'entiers positifs, nous noterons $d(A)$ sa densité si elle existe, $\complement A$ le complémentaire de A dans N^*.

La relation n divise m sera notée $n|m$, la relation n divise exactement m, $n\|m$.

La lettre p désignera toujours un nombre premier.

Soient m et q des entiers positifs donnés.

Soient $M(m)$ et $S(q)$ les suites d'entiers suivantes:

$$M(m)=\{n|\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)\},$$
$$S(q)=\{n|\ s(n)\equiv b\ (\mathrm{mod}\ q)\},$$

a et b étant des entiers quelconques.

Nous savons grâce à Gelfond [7], que les ensembles $M(m)$ et $S(q)$ sont „statistiquement indépendants" si et seulement si $(q,g-1)=1$.

Plus précisément $d\big(M(m)\big)$ et $d\big(S(q)\big)$ existent et valent respectivement $1/m$ et $1/q$. En outre:

$$d\big(M(m)\cap S(q)\big)=d\big(M(m)\big)\cdot d\big(S(q)\big).$$

Un nombre premier p étant donné, définissons la suite $E(p)$ par:

$$E(p)=\big\{n|\ p|\big(n,s(n)\big)\big\}.$$

Le résultat précédent montre que si p ne divise pas $g-1$,

$$d\big(E(p)\big)=\frac{1}{p^2}.$$

D'autre part, il est aisé de démontrer que si p divise $g-1$,

$$n\equiv s(n)\ (\mathrm{mod}\ p),$$

de telle sorte que dans ce cas:

$$d\big(E(p)\big)=\frac{1}{p}.$$

Si on admet que les ensembles $\big(\complement E(p)\big)_p$ sont „indépendants", on obtient:

$$d\Big(\bigcap_p\complement E(p)\Big)=\prod_p d\big(\complement E(p)\big).$$

Le premier membre de cette égalité est la densité de l'ensemble des entiers n tels que $\big(n,s(n)\big)=1$.

Il est facile d'évaluer le second membre:

$$\prod_p d\big(\complement E(p)\big)=\prod_{p|g-1}d\big(\complement E(p)\big)\prod_{p\nmid g-1}d\big(\complement E(p)\big).$$

Remplaçons $d\big(\complement E(p)\big)$ par sa valeur:

$$\prod_p d\big(\complement E(p)\big)=\prod_{p|g-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{p\nmid g-1}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big).$$

Compte tenu du fait que:

$$\prod_p\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)=\frac{6}{\pi^2},$$

nous obtenons:

$$d\big(\{n|\ (n,s(n))=1\}\big)=\frac{6}{\pi^2}\prod_{p|g-1}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}.$$

C'est un des résultats que nous démontrerons.

THÉORÈME 1. *Soit $s(n)$ la somme des chiffres de l'entier n écrit dans la base g; soit q un entier positif.*

Soit: $E(g-1,q)=\{p|$ il existe $a\geqslant 0$ tel que $p^a\|q$ et $p^{a+1}|g-1\}$. On a, pour tout $\varepsilon>0$:

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ (n,s(n))=q}}1=\frac{6}{\pi^2}\frac{(q,g-1)}{q^2}\prod_{p\in E(g-1,q)}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}+O\big((\log x)^{-1/8+\varepsilon}\big).$$

En particulier, si $g=2$ et $q=1$, on obtient: La probabilité que n soit premier à la somme de ses chiffres en base 2 vaut $6/\pi^2$.

Enfin, notons a_q les nombres réels définis au théorème 1 par:

$$a_q = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ (n,s(n))=q}} 1.$$

THÉORÈME 2. *Les nombres réels a_q sont tels que:*

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q = 1.$$

Remarquons que, tout raisonnable que paraisse le résultat du théorème 2, il n'est pas une trivialité en ce sens que la densité n'est pas σ-additive. On peut construire une partition de N^* en sous-ensembles de densités positives, dont la somme des densités est inférieure à 1.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 est faite au paragraphe 4. Au paragraphe 3 nous évaluons l'expression $\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ (n,s(n))=q}} 1$ à partir des quantités $S_m(x) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv s(n)\equiv 0 (\operatorname{mod} m)}} 1.$

Il s'agit donc dans la deuxième partie de calculer $S_m(x)$ selon les différentes valeurs de m. Dans ce but nous serons amenés à majorer des produits finis du type

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left|\cos\pi \frac{tg^k+z}{q}\right|.$$

2. Quelques résultats préliminaires. Nous notons $[x]$ la partie entière de x, $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche.

PROPOSITION 1. *Soient g un entier supérieur ou égal à 2, ε un nombre réel compris (strictement) entre 0 et 1/2, p un nombre premier tel que $4g < p^{1/2-\varepsilon}$. Pour tout couple d'entiers z et t tel que p ne divise pas t, et tout entier naturel k, on peut trouver un entier i satisfaisant les relations:*

(i) $k \leqslant i \leqslant k+j_0$, *avec* $j_0 = \left[\dfrac{\log p}{\log g}\right]+1$,

(ii) $\|\beta_i\| > p^{-1/2+\varepsilon}$, *en posant* $\beta_i = \dfrac{tg^i+z}{p}$.

Démonstration. 1) Remarquons que l'inégalité $4g < p^{1/2-\varepsilon}$ assure que p est premier à g; par conséquent p ne divise pas tg^k. Quitte à effectuer le changement de variable $tg^k \to t$, on peut supposer que k est nul.

2) D'autre part, on ne restreint pas non plus la généralité en supposant t positif et inférieur à $p/2$.

On peut en effet écrire t sous la forme:

$$t = t_0+\lambda p,$$

$0 < t_0 < p/2$, λ entier.

On a:

$$\left\|\frac{tg^i+z}{p}\right\| = \left\|\frac{t_0 g^i+z}{p}+\lambda g^i\right\| = \left\|\frac{t_0 g^i+z}{p}\right\|.$$

Nous allons donc démontrer la proposition 1 dans le cas:

(1) $$k = 0, \quad 0 < t < p/2.$$

3) Etablissons d'abord le résultat dans le cas particulier $k = 0$, $z = 0$.

Nous allons démontrer un peu plus, à savoir qu'il existe un entier i $(0 \leqslant i \leqslant j_0-1)$ tel que $\|\beta_i\|$ soit supérieur à $2p^{-1/2+\varepsilon}$.

Posons $i = \left[(\log g)^{-1}\log\dfrac{p}{2t}\right]$; on a en vertu de (1):

$$0 \leqslant i \leqslant \left[(\log g)^{-1}\log\frac{p}{2}\right] \leqslant [(\log g)^{-1}\log p] = j_0-1.$$

D'autre part:

$$tg^{(\log g)^{-1}\log\frac{p}{2t}-1} < tg^i \leqslant tg^{(\log g)^{-1}\log\frac{p}{2t}},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{p}{2g} < tg^i \leqslant \frac{p}{2}.$$

Par suite $\|\beta_i\|$ est supérieur à $1/2g$, ce qui, compte tenu du fait que $4g$ est inférieur à $p^{1/2-\varepsilon}$, assure que $\|\beta_i\|$ est supérieur à $2p^{-1/2+\varepsilon}$.

4) Dans le cas général (1), on va raisonner par l'absurde et supposer que pour tout indice i $(0 \leqslant i \leqslant j_0)$, on a:

$$\|\beta_i\| \leqslant p^{-1/2+\varepsilon}.$$

Pour tout indice i $(0 \leqslant i \leqslant j_0-1)$, on a alors:

$$\|\beta_{i+1}-\beta_i\| \leqslant 2p^{-1/2+\varepsilon}.$$

Mais $\beta_{i+1}-\beta_i$ vaut $t(g-1)g^i/p$. On en déduit donc:

(2) $$\left\|\frac{t(g-1)g^i}{p}\right\| \leqslant 2p^{-1/2+\varepsilon},$$

pour tout i compris entre 0 et j_0-1.

D'autre part, l'inégalité $4g < p^{1/2-\varepsilon}$ assure que p est supérieur à g; par conséquent p est premier à $g-1$, donc à $t(g-1)$.

Si donc on effectue dans l'inégalité (2) le changement de variable $t(g-1)\to t$, on est en contradiction avec le cas particulier 3.

Ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 2. *Soient g un entier supérieur ou égal à 2, q un entier positif ne divisant pas $g-1$ tel que $(g-1, q) = r$. Pour tout couple d'entiers z et t tel que q ne divise pas z et z non multiple de $q' = q/r$, pour tout entier k positif ou nul, on a:*

$$\|\beta_k\| \geqslant \frac{1}{2gq'} \quad \text{ou} \quad \|\beta_{k+1}\| \geqslant \frac{1}{2gq'},$$

en posant:

$$\beta_k = \frac{tg^k+z}{q}.$$

Démonstration. Remarquons que la condition q ne divise pas $g-1$ implique que q' est un entier supérieur ou égal à 2.

D'autre part:

$$g\beta_k - \beta_{k+1} = \frac{z}{q}(g-1),$$

de telle sorte qu'en posant $g-1 = r(g-1)'$ avec $\big((g-1)', q'\big) = 1$, on obtient:

$$g\beta_k - \beta_{k+1} = z\frac{(g-1)'}{q'}.$$

Puisque z n'est pas multiple de q' on a:

$$\|g\beta_k - \beta_{k+1}\| \geqslant \frac{1}{q'}. \tag{3}$$

Cette inégalité implique la proposition. En effet, si

$$\|\beta_k\| < \frac{1}{2gq'} \quad \text{et} \quad \|\beta_{k+1}\| < \frac{1}{2gq'},$$

l'inégalité triangulaire permet d'écrire:

$$\|g\beta_k - \beta_{k+1}\| < \frac{1}{2q'} + \frac{1}{2gq'} < \frac{1}{q'},$$

ce qui contredit l'inégalité (3).

LEMME 1. *La fonction f définie continue sur $\mathbf{R}$ telle que:*

$$f(x) = \left|\frac{\sin\pi g x}{\sin\pi x}\right|$$

possède les trois propriétés suivantes:

(i) $0 \leqslant f(x) \leqslant g$ *pour tout* x;

(ii) f *est décroissante dans l'intervalle* $[0, 1/2g]$, f *est croissante dans l'intervalle* $[1-1/2g, 1]$;

(iii) $0 \leqslant f(x) \leqslant f(1/2g)$ *dans l'intervalle* $[1/2g, 1-1/2g]$.

Démonstration. Puisque $f(x) = f(\|x\|)$, il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

En outre,

$$|\sin(x+y)| \leqslant |\sin x| + |\sin y|$$

implique (i).

Dans l'intervalle $]0, 1/2g]$ on a:

$$f'(x) = \pi\frac{\cos\pi g x\cdot\cos\pi x}{\sin^2\pi x}(g\,\mathrm{tg}\,\pi x - \mathrm{tg}\,\pi g x),$$

expression qui est du signe de:

$$g\,\mathrm{tg}\,\pi x - \mathrm{tg}\,\pi g x = g\int_0^{\pi x}\left(\frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 g y}\right)dy.$$

L'intégrale étant négative, on en déduit (ii).

Enfin, si $x \in \left[\frac{1}{2g}, 1-\frac{1}{2g}\right]$,

$$f(x) \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2g}} = f\left(\frac{1}{2g}\right),$$

ce qui prouve (iii).

PROPOSITION 3. *En reprenant les notations et les hypothèses de la proposition 2, posons:*

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\sin\pi g\beta_k}{\sin\pi\beta_k}\right|.$$

On a:

$$Q_n \leqslant g^{\lambda_1(q)n+1},$$

$$\lambda_1(q) = \frac{1}{2\log g}\left(\log\left(g\sin\pi\frac{(q, g-1)}{2q}\right) - \log\left(\sin\pi\frac{(q, g-1)}{2gq}\right)\right). \tag{4}$$

Démonstration. Grâce à la proposition 2, on peut affirmer que pour tout $k \geqslant 0$,

$$\|\beta_k\| \geqslant \frac{1}{2gq'} \quad \text{ou} \quad \|\beta_{k+1}\| \geqslant \frac{1}{2gq'}.$$

En outre, le lemme 1 permet d'écrire:

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} f(\beta_k),$$

avec:

$$f(\beta_k)\cdot f(\beta_{k+1}) \leqslant g\cdot f\left(\frac{1}{2gq'}\right).$$

On obtient la proposition 3 en posant:

$$g\cdot f\left(\frac{1}{2gq'}\right) = g^{2\lambda_1(q)}.$$

Proposition 4. *Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses qu'à la proposition* 1, *posons*: $\eta(\varepsilon) = p^{-1/2+\varepsilon}$,

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\sin \pi g \beta_k}{\sin \pi \beta_k}\right|.$$

On a:

$$Q_n \leqslant p\cdot g^{n\lambda_2(p)+1},$$

(5) $$\lambda_2(p) = \frac{j_0}{j_0+1} + \frac{1}{(j_0+1)\log g}\Big(\log\big(\sin \pi g \eta(\varepsilon)\big) - \log\big(\sin \pi \eta(\varepsilon)\big)\Big).$$

Démonstration. En vertu de la proposition 1, parmi j_0+1 termes consécutifs de la suite $(\beta_k)_{k\geqslant 0}$, il y en a au moins un pour lequel:

$$\|\beta_i\| \geqslant \eta(\varepsilon).$$

Utilisant le lemme 1, on écrit:

$$f(\beta_k)\ldots f(\beta_{k+j_0}) \leqslant g^{j_0} f\big(\eta(\varepsilon)\big).$$

Enfin, si on pose:

$$g^{(j_0+1)\lambda_2(p)} = g^{j_0} f\big(\eta(\varepsilon)\big),$$

on obtient:

$$Q_n \leqslant \left(g^{(j_0+1)\lambda_2(p)}\right)^{\left[\frac{n}{j_0+1}\right]} g^{j_0},$$

ce qui, compte tenu de la valeur de j_0, s'écrit:

$$Q_n \leqslant g^{n\lambda_2(p)+1} p.$$

La proposition 4 est ainsi démontrée.

Proposition 5 (Gelfond). *Soit $F(n)$ une fonction g-multiplicative telle que pour tout entier n,*

$$|F(n)| \leqslant 1.$$

On a:

(6) $$\left|\sum_{n=0}^{N-1} F(n)\right| \leqslant g \sum_{n=0}^{v} \prod_{k=0}^{n-1} \left|\sum_{s=0}^{g-1} F(\varepsilon g^k)\right|, \quad v = \left[\frac{\log N}{\log g}\right].$$

Démonstration. Voir Delange [2].

Proposition 6. *Le nombre réel $\lambda_1(q)$ étant défini par la formule* (4) *de la proposition* 3, *on a*:

(7) $$\left|\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv s(n)\equiv 0 \pmod g}} 1 - \frac{(q, g-1)}{q^2} x\right| \leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1}(x+1)^{\lambda_1(q)} + 2.$$

On remarquera que le nombre réel $\lambda_1(q)$ vérifie les inégalités:

$$\tfrac{1}{2} < \lambda_1(q) < 1.$$

Avant de démontrer ce résultat, établissons un lemme.

Lemme 2. *Reprenant les notations et les hypothèses de la proposition* 2, *on a*:

(8) $$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x} e\left(\frac{tn+zs(n)}{q}\right)\right| \leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1}(x+1)^{\lambda_1(q)} + 1,$$

$\lambda_1(q)$ étant défini par la formule (4) *de la proposition* 3, *$e(\alpha)$ désignant $e^{2i\pi\alpha}$*.

Démonstration. Posons,

$$V_{t,z}(x) = \left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x} e\left(\frac{tn+zs(n)}{q}\right)\right|.$$

Ecrivons l'entier $[x]+1$ dans la base g:

$$[x]+1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 g + \ldots + \varepsilon_v g^v,$$

les entiers ε_i ($i = 0, 1, \ldots, v$) et v vérifiant les conditions:

$$0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant g-1, \quad \varepsilon_v \neq 0.$$

La fonction arithmétique F définie par:

$$F(n) = e\left(\frac{tn+zs(n)}{q}\right)$$

est g-multiplicative, de telle sorte que l'on peut appliquer la proposition 5:

$$V_{t,z}(x) \leqslant g \sum_{n=0}^{v} \prod_{k=0}^{n-1} \left|\sum_{s=0}^{g-1} F(\varepsilon g^k)\right| + 1.$$

D'autre part:

$$\Big|\sum_{s=0}^{g-1} F(\varepsilon g^k)\Big| = \Big|\frac{\sin \pi g \beta_k}{\sin \pi \beta_k}\Big|.$$

Par conséquent, avec les notations de la proposition 3,

$$V_{t,z}(x) \leqslant g \sum_{n=0}^{v} Q_n + 1.$$

La proposition 3 permet de conclure que:

$$V_{t,z}(x) \leqslant g^2 \sum_{n=0}^{v} g^{n\lambda_1(q)} + 1,$$

ou, de façon plus précise:

$$V_{t,z}(x) \leqslant g^2 \frac{g^{\lambda_1(q)(v+1)} - 1}{g^{\lambda_1(q)} - 1} + 1.$$

Compte tenu de la remarque faite à la fin de la proposition 6 et du fait que $g^v \leqslant x+1$,

$$V_{t,z}(x) \leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1}(x+1)^{\lambda_1(q)} + 1.$$

Démonstration de la proposition 6:
Premier cas: q divise $g-1$. Ecrivons l'entier n dans la base g:

$$n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 g + \ldots + \varepsilon_m g^m,$$

de telle sorte que:

$$n - s(n) = \varepsilon_1(g-1) + \ldots + \varepsilon_m(g-1)(1+g+\ldots+g^{m-1}).$$

La condition q divise $g-1$ implique donc:

$$n \equiv s(n) \ (\mathrm{mod}\ q).$$

Par conséquent:

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv s(n)\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 = \Big[\frac{x}{q}\Big],$$

d'où:

$$\Big|\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv s(n)\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{x}{q}\Big| \leqslant 1,$$

résultat bien meilleur que celui de la formule (7).

Deuxième cas: q ne divise pas $g-1$. Posons:

$$S_q(x) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv s(n)\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1.$$

$S_q(x)$ peut se mettre sous la forme:

$$S_q(x) = \frac{1}{q^2} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{z=0}^{q-1} \sum_{1\leqslant n\leqslant x} e\Big(\frac{tn+zs(n)}{q}\Big). \tag{9}$$

Décomposons $S_q(x)$ en deux parties:

$$S_q(x) = T_1(x) + T_2(x), \tag{10}$$

avec:

$$T_1(x) = \frac{1}{q^2} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\substack{z=0\\ z\neq lq'\,(0\leqslant l\leqslant r-1)}}^{q-1} \sum_{1\leqslant n\leqslant x} e\Big(\frac{tn+zs(n)}{q}\Big),$$

$$T_2(x) = \frac{1}{q^2} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\substack{z=0\\ z= lq'\,(0\leqslant l\leqslant r-1)}}^{q-1} \sum_{1\leqslant n\leqslant x} e\Big(\frac{tn+zs(n)}{q}\Big).$$

1) **Majoration de** $|T_1(x)|$.

$$|T_1(x)| \leqslant \frac{1}{q^2} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\substack{z=0\\ z\neq lq'\,(0\leqslant l\leqslant r-1)}}^{q-1} V_{t,z}(x),$$

ce que l'on peut encore majorer par:

$$|T_1(x)| \leqslant \max_{t,z}{}^{*} V_{t,z}(x),$$

le max* étant pris sur les z non congrus à 0 mod q'.
Nous sommes dans les conditions d'applications du lemme 2:

$$|T_1(x)| \leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1}(x+1)^{\lambda_1(q)} + 1. \tag{11}$$

2) **Calcul de** $T_2(x)$.

$$T_2(x) = \frac{1}{r^2 q'^2} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{1\leqslant n\leqslant x} e\Big(\frac{t}{rq'} n + \frac{l}{r} s(n)\Big),$$

par conséquent:

$$T_2(x) = \frac{1}{q'} \sum_{1 \leqslant n \leqslant x}^{*} 1,$$

la somme $\sum^*$ étant faite sur les entiers n tels que $n \equiv 0 \pmod{rq'}$ et $s(n) \equiv 0 \pmod{r}$.

Mais r divise $g-1$, de telle sorte que:

$$s(n) \equiv n \pmod{r},$$

autrement dit:

$$(12) \qquad T_2(x) = \frac{1}{q'} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, rq')}} 1 = \frac{x}{rq'^2} - \frac{1}{q'} \left\{ \frac{x}{rq'} \right\}.$$

Réunissant les formules (10), (11), (12), on obtient la proposition 6.

Proposition 7. *Les notations étant celles des propositions* 1 *et* 4, *on a*:

$$(13) \qquad \Bigg| \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv s(n) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)}} 1 - \frac{x}{p^2} \Bigg|$$

$$\leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1} p (x+1)^{\lambda_2(p)} + \frac{2g^2}{\sqrt{g}-1} \eta(\varepsilon) \frac{(x+1)^{\lambda_3(p)}}{p} + \frac{g^2}{\sqrt{g}-1} \frac{(x+1)^{\lambda_4(p)}}{p} + 2,$$

$$(5) \qquad \lambda_2(p) = \frac{j_0}{j_0+1} + \frac{1}{(j_0+1)\log g} \big(\log\big(\sin \pi g \eta(\varepsilon)\big) - \log\big(\sin \pi \eta(\varepsilon)\big)\big),$$

$$(14) \qquad \lambda_3(p) = \frac{1}{\log p} \left(\log \left(\sin \frac{\pi g}{p}\right) - \log \left(\sin \frac{\pi}{p}\right)\right),$$

$$(15) \qquad \lambda_4(p) = \frac{1}{\log p} \big(\log\big(\sin \pi g \eta(\varepsilon)\big) - \log\big(\sin \pi \eta(\varepsilon)\big)\big),$$

$$\tfrac{1}{2} < \lambda_i(p) < 1 \qquad (i = 2, 3, 4).$$

Etablissons un lemme préparatoire:

Lemme 3. *Reprenant les notations et hypothèses de la proposition* 1, *les inégalités suivantes ont lieu*:

(i) *Si* $1 \leqslant t \leqslant p-1$ *et* $0 \leqslant z \leqslant p-1$:

$$\Bigg| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} e\left(\frac{tn + zs(n)}{p}\right) \Bigg| \leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1} p (x+1)^{\lambda_2(p)} + 1.$$

(ii) *Si* $t = 0$ *et* $1 \leqslant z \leqslant p-1$:

$$\Bigg| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} e\left(\frac{zs(n)}{p}\right) \Bigg| \leqslant \frac{g^2}{\sqrt{g}-1} (x+1)^{\lambda_3(p)} + 1.$$

(iii) *Si* $t = 0$ *et* $p^{1/2+\varepsilon} < z < p - p^{1/2+\varepsilon}$

$$\Bigg| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} e\left(\frac{zs(n)}{p}\right) \Bigg| \leqslant \frac{g^2}{\sqrt{g}-1} (x+1)^{\lambda_4(p)} + 1.$$

Démonstration. La technique est la même qu'au lemme 2.

Ecrivons: $[x]+1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 g + \ldots + \varepsilon_v g^v$, $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant g-1$, $\varepsilon_v \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, v)$.

La démonstration de (i) repose sur la proposition 5 et la proposition 4.

$$V_{t,z}(x) \leqslant g \sum_{n=0}^{v} Q_n + 1,$$

d'où:

$$V_{t,z}(x) \leqslant pg^2 \sum_{n=0}^{v} g^{n\lambda_2(p)} + 1.$$

Il reste à remarquer que $\frac{1}{2} < \lambda_2(p) < 1$; on obtient:

$$V_{t,z}(x) \leqslant p \frac{g^3}{\sqrt{g}-1} (x+1)^{\lambda_2(p)} + 1.$$

D'autre part, appliquant la proposition 5 à $V_{0,z}(x)$:

$$V_{0,z}(x) \leqslant g \sum_{n=0}^{v} \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\sin \pi g \dfrac{z}{p}}{\sin \pi \dfrac{z}{p}} \right| + 1.$$

Le lemme 1 et le fait que $\|z/p\| > 1/p$ permettent d'écrire:

$$f\left(\frac{z}{p}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{p}\right).$$

Le résultat (ii) en découle si on pose:

$$g^{\lambda_3(p)} = \frac{\sin \pi \dfrac{g}{p}}{\sin \pi \dfrac{1}{p}}.$$

Enfin, si on limite l'étude précédente aux entiers z tels que:

$$p^{1/2+\varepsilon} < z < p - p^{1/2+\varepsilon},$$

on a:

$$\left\| \frac{z}{p} \right\| \geqslant \eta(\varepsilon).$$

Il suffit alors de poser:

$$g^{\lambda_4(p)} = \frac{\sin \pi g \eta(\varepsilon)}{\sin \pi \eta(\varepsilon)}$$

pour obtenir (iii).

Démonstration de la proposition 7. Soit $S_p(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv s(n) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)}} 1.$

Ecrivons $S_p(x)$ sous la forme:

$$S_p(x) = \frac{1}{p^2} \sum_{t=0}^{p-1} \sum_{z=0}^{p-1} \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} e\left(\frac{tn + zs(n)}{p}\right),$$

ou encore,

$$\left| S_p(x) - \frac{x}{p^2} \right| \leqslant \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} \sum_{z=1}^{p-1} V_{0,z}(x) + \frac{1}{p^2} \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{z=0}^{p-1} V_{t,z}(x). \tag{16}$$

Grâce au lemme 3 (i), on a:

$$\frac{1}{p^2} \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{z=0}^{p-1} V_{t,z}(x) \leqslant \frac{g^3}{\sqrt{g}-1} p (x+1)^{\lambda_2(p)} + 1. \tag{17}$$

Décomposons la première somme du deuxième membre de (16) en deux parties:

$$\frac{1}{p^2} \sum_{z=1}^{p-1} V_{0,z}(x) = \frac{1}{p^2} \sum_{z \in I(p,\varepsilon)} V_{0,z}(x) + \frac{1}{p^2} \sum_{z \in J(p,\varepsilon)} V_{0,z}(x),$$

avec:

$$I(p, \varepsilon) = \{z \mid 1 \leqslant z \leqslant p^{\varepsilon+1/2} \quad \text{ou} \quad p - p^{\varepsilon+1/2} \leqslant z \leqslant p-1\},$$

$$J(p, \varepsilon) = \{z \mid p^{\varepsilon+1/2} < z < p - p^{\varepsilon+1/2}\}.$$

En vertu du lemme 5 (ii) et (iii):

$$\frac{1}{p^2} \sum_{z \in I(p,\varepsilon)} V_{0,z}(x) \leqslant \frac{2g^2}{\sqrt{g}-1} \frac{\eta(\varepsilon)}{p} (x+1)^{\lambda_3(p)} + \frac{2\eta(\varepsilon)}{p}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{p^2} \sum_{z \in J(p,\varepsilon)} V_{0,z}(x) \leqslant \frac{g^2}{\sqrt{g}-1} \frac{(x+1)^{\lambda_4(p)}}{p} + \frac{1}{p}. \tag{19}$$

Réunissant les formules (17), (18), (19), on obtient la proposition 7.

Lemme 4. *Les nombres réels $\lambda_1(q)$, $\lambda_2(p)$, $\lambda_3(p)$, $\lambda_4(p)$ définis par les formules* (4), (5), (14), (15), *sont tels que:*

$$\lambda_1(q) = 1 - \frac{\alpha_1}{q'^2} + O\left(\frac{1}{q'^4}\right),$$

$$\lambda_2(p) = 1 - \frac{\alpha_2}{(j_0+1)p^{1-2\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{j_0 p^{2-4\varepsilon}}\right),$$

$$\lambda_3(p) = 1 - \frac{\alpha_3}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^4}\right),$$

$$\lambda_4(p) = 1 - \frac{\alpha_4}{p^{1-2\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{p^{2-4\varepsilon}}\right),$$

quand q et p tendent vers l'infini.

On peut préciser les valeurs de α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{48}\left(1 - \frac{1}{g^2}\right) \frac{1}{\log g},$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{\pi^2(g^2-1)}{6 \log g}.$$

3. Probabilité pour que l'on ait $(n, f(n)) = q$. Soit f une fonction arithmétique à valeurs entières.

Soit q un entier positif; on note $\mathscr{D}_q$ l'ensemble des diviseurs premiers de q. Si $p \in \mathscr{D}_q$; $a(p)$ est l'exposant de p dans la décomposition de q. D'autre part, si ω est un nombre réel tel que:

$$\omega > \max\{p \mid p \in \mathscr{D}_q\}, \tag{20}$$

on désigne par $\mathscr{A}(n, \omega)$ l'ensemble suivant:

Si $p^{a(p)} \| (n, f(n))$ pour tout $p \in \mathscr{D}_q$:

$$\mathscr{A}(n, \omega) = \{p \leqslant \omega \mid p | (n, f(n)) \text{ et } p \notin \mathscr{D}_q\}.$$

Si il existe $p \in \mathscr{D}_q$ tel que $p^{a(p)}$ non $\| (n, f(n))$:

$$\mathscr{A}(n, \omega) = \{p \leqslant \omega \mid p | (n, f(n)) \text{ et } p \notin \mathscr{D}_q\} \cup \mathscr{D}_q.$$

Enfin, nous notons $\Pi(n, \omega)$, $\Pi(\omega)$ et $\Pi^*(\omega)$ les entiers définis par:

$$\Pi(n, \omega) = \prod_{p \in \mathscr{A}(n,\omega)} p, \quad \Pi(\omega) = \prod_{p \leqslant \omega} p, \quad \Pi^*(\omega) = \Pi(\omega) \Big(\prod_{p \in \mathscr{D}_q} p\Big)^{-1}.$$

Lemme 5. *On a $\Pi(n, \omega) = 1$ si et seulement si $(n, f(n))$ est divisible par q et le quotient $\frac{(n, f(n))}{q}$ n'a que des facteurs premiers plus grands que ω.*

Démonstration. La définition de $\Pi(n,\omega)$ implique que $\Pi(n,\omega)=1$ si et seulement si $\mathscr{A}(n,\omega)=\emptyset$.

Or $\mathscr{A}(n,\omega)=\emptyset$ équivaut à: pour tout $p\in\mathscr{D}_q$, $p^{\alpha(p)}\| (n,f(n))$ et les autres diviseurs premiers de $(n,f(n))$ sont plus grand que ω.

Proposition 8. *Soit:*

$$T(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\(n,f(n))=q}}1,\qquad S_m(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv f(n)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)}}1.$$

On a:

$$T(x)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}\sum_{m|\Pi^*(\omega)}\mu(m)S_{mqp_{i_1}\cdots p_{i_l}}(x)+O\Big(\sum_{p>\omega}S_p(x)\Big),$$

où $k=\operatorname{card}\mathscr{D}_q$ et où le domaine de sommation de $\sum^*$ est l'ensemble des l-uplets $(p_{i_1},\dots,p_{i_l})$ tels que $p_{i_j}\in\mathscr{D}_q$, les p_{i_j} étant deux à deux distincts.

Démonstration. Utilisons le lemme 5 de façon à écrire:

$$T(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ \Pi(n,\omega)=1}}1-\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}'\,1,$$

la somme $\sum'$ étant effectuée sur les entiers n tels que $(n,f(n))$ soit divisible par q et que le quotient $(n,f(n))/q$ n'ait que des facteurs premiers plus grands que ω et en ait au moins un. Par conséquent:

$$0\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}'\,1\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}''\,1,$$

le domaine de sommation de $\sum''$ étant constitué des entiers n pour lesquels il existe un nombre premier plus grand que ω qui divise $(n,f(n))$.

On peut donc écrire:

$$T(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ \Pi(n,\omega)=1}}1+\theta\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}''\,1,\tag{21}$$

où

$$-1<\theta=\theta(x,\omega)<0.$$

Il est aisé de voir que:

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}''\,1\leqslant\sum_{p>\omega}S_p(x).$$

La formule (21) devient:

$$T(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ \Pi(n,\omega)=1}}1+O\Big(\sum_{p>\omega}S_p(x)\Big).\tag{22}$$

Il reste à évaluer

$$T_1(x)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ \Pi(n,\omega)=1}}1.$$

On a:

$$T_1(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\ \sum_{m|\Pi(n,\omega)}\mu(m).$$

Décomposons $T_1(x)$ en deux parties:

$$T_1(x)=\Sigma_1+\Sigma_2,\tag{23}$$

avec:

$$\Sigma_1=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}_1\ \sum_{m|\Pi(n,\omega)}\mu(m),\qquad \Sigma_2=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}_2\ \sum_{m|\Pi(n,\omega)}\mu(m),$$

la somme Σ_1 étant étendue aux entiers n tels que:

$$\text{pour tout } p\in\mathscr{D}_q,\ p^{\alpha(p)}\|(n,f(n)),$$

la somme Σ_2 aux entiers n pour lesquels

$$\text{il existe } p\in\mathscr{D}_q \text{ tel que } p^{\alpha(p)}\text{non}\,\|(n,f(n)).$$

1) Traitons d'abord Σ_1. La définition de $\Pi(n,\omega)$ et les conditions de sommation impliquent que m divise $\Pi(n,\omega)$ si et seulement si m divise $(n,f(n))$ et m divise $\Pi^*(\omega)$.

D'où:

$$\Sigma_1=\sum_{m|\Pi^*(\omega)}\mu(m)\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}_{*}\,1,$$

la sommation $\sum_*$ s'effectuant sur les entiers n tels que:

$$n\equiv f(n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m),$$

et pour tout $p\in\mathscr{D}_q$, $p^{\alpha(p)}\|(n,f(n))$.

Le calcul de Σ_1 se fait en sommant d'abord sur les entiers n tels que $p^{\alpha(p)}|(n,f(n))$ pour tout $p\in\mathscr{D}_q$; puis on retranche la somme sur les entiers n pour lesquels il existe $p\in\mathscr{D}_q$ tels que $p^{\alpha(p)+1}|(n,f(n))$ et pour tout $p\in\mathscr{D}_q$, $p^{\alpha(p)}|(n,f(n))$. Ceci s'écrit:

$$\Sigma_1=\sum_{m|\Pi^*(\omega)}\mu(m)S_{mq}(x)-\sum_{m|\Pi^*(\omega)}\mu(m)\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}_{**}\,1,$$

la somme $\sum_{**}$ étant étendue aux entiers n tels que:

$$n\equiv f(n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m),$$
$$n\equiv f(n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^{\alpha(p)})\quad\text{pour pour tout } p\in\mathscr{D}_q,$$
$$n\equiv f(n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^{\alpha(p)+1})\quad\text{pour au moins un } p\in\mathscr{D}_q.$$

Cette dernière somme peut se mettre sous la forme:

$$\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}\ \sum_{m\mid \Pi^*(\omega)}\mu(m)S_{mqp_{i_1}\dots p_{i_l}}(x),$$

le domaine de définition de $\sum^*$ étant celui défini dans l'énoncé de la proposition.

Finalement, si on réunit les deux termes, on obtient:

$$\Sigma_1=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}\ \sum_{m\mid \Pi^*(\omega)}\mu(m)S_{mqp_{i_1}\dots p_{i_l}}(x). \tag{24}$$

2) Montrons que

$$\Sigma_2=0. \tag{25}$$

La définition de $\Pi(n,\omega)$ et les conditions de sommation sur n impliquent que l'on peut écrire m sous la forme:

$$m=p_{i_1}\dots p_{i_l}m',$$

avec:

$$0\leqslant l\leqslant k;\qquad m'\mid \Pi^*(\omega),\qquad m'\mid\big(n,f(n)\big),$$

et cette décomposition est unique. D'où:

$$\Sigma_2=\sum_{0\leqslant l\leqslant k}(-1)^{l}\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}\ \sum_{1\leqslant n\leqslant x}^{2}\ \sum_{m'\mid \Pi^*(\omega)}\mu(m').$$

Il suffit d'intervertir les signes de sommation et de remarquer que:

$$\sum_{0\leqslant l\leqslant k}(-1)^{l}\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}1=0;$$

ce qui démontre (25).

Les formules (22), (23), (24), (25) donnent la proposition 8.

Corollaire. *La proposition 8 appliquée à la fonction „somme des chiffres en base g" montre que si x est supérieur ou égal à g^{g-1},*

$$T(x)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}\ \sum_{m\mid \Pi^*(\omega)}\mu(m)S_{mqp_{i_1}\dots p_{i_l}}(x)+O\Big(\sum_{\omega<p\leqslant\varphi\log x}S_p(x)\Big),$$

avec $\varphi=g/\log g$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si p divise $s(n)$, alors p est inférieur ou égal à $s(n)$.

Les entiers n étant inférieurs ou égaux à x, $s(n)$ ne peut excéder $\dfrac{g-1}{\log g}\log x+(g-1)$. Cette expression est plus petite que $\varphi\log x$ dès que x est supérieur à g^{g-1}. Ceci termine la démonstration du corollaire.

4. Démonstration des théorèmes 1 et 2

Démonstration du théorème 1. Nous reprenons les notations du paragraphe 3. Décomposons $g-1$ en facteurs premiers:

$$g-1=p_1^{\gamma_1}\dots p_t^{\gamma_t}q_1^{\delta_1}\dots q_s^{\delta_s},$$

où les entiers p_i $(i=1,2,\dots,t)$ et q_j $(j=1,2,\dots,s)$ sont premiers, et où les exposants γ_i $(i=1,2,\dots,t)$ et δ_j $(j=1,2,\dots,s)$ sont supérieurs à 0. De plus:

$$p_i\in\mathcal{D}_q\ (i=1,2,\dots,t)\qquad\text{et}\qquad q_j\notin\mathcal{D}_q\ (j=1,2,\dots,s).$$

Le nombre réel ω intervenant dans les calculs sera choisi convenablement à la fin de la démonstration.

La proposition 6 s'écrit:

$$S_m(x)=\frac{(m,g-1)}{m^2}x+R_m(x),$$

$$|R_m(x)|\leqslant\frac{g^3}{\sqrt{g-1}}(x+1)^{\lambda_1(m)}+2.$$

De même la proposition 7 peut se mettre sous la forme:

$$S_p(x)=\frac{x}{p^2}+R'_p(x),$$

$$|R'_p(x)|\leqslant\frac{g^2}{\sqrt{g-1}}p(x+1)^{\lambda_2(p)}+\frac{2g^2}{\sqrt{g-1}}\eta(\varepsilon)\frac{(x+1)^{\lambda_3(p)}}{p}+$$
$$+\frac{g^2}{\sqrt{g-1}}\frac{(x+1)^{\lambda_4(p)}}{p}+2.$$

Remplaçons $S_m(x)$ par sa valeur dans le corollaire de la proposition 8:

$$T(x)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\sum_{p_{i_1},\dots,p_{i_l}}^{*}\ \sum_{m\mid \Pi^*(\omega)}\mu(m)\Big((mqp_{i_1}\dots p_{i_l},g-1)(mqp_{i_1}\dots p_{i_l})^{-2}x+$$
$$+R_{mqp_{i_1}\dots p_{i_l}}(x)\Big)+O\Big(\sum_{\omega<p\leqslant\varphi\log x}\Big(\frac{x}{p^2}+R'_p(x)\Big)\Big),$$

à condition que:

$$\log\omega\geqslant(\tfrac12-\varepsilon)^{-1}\log(4g). \tag{26}$$

Désignons par $T_1(x)$ le terme principal et $T_2(x)$ le terme résiduel.

Première partie: évaluation de $T_1(x)$.

$$T_1(x) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l \sum_{p_{i_1},\ldots,p_{i_l}}^{*} \sum_{m|\Pi^*(\omega)} \mu(m)\big((mqp_{i_1}\ldots p_{i_l}, g-1)(mqp_{i_1}\ldots p_{i_l})^{-2}x + \\ + R_{mqp_{i_1}\ldots p_{i_l}}(x)\big).$$

Nous allons d'abord évaluer le terme principal, ensuite nous majorerons le terme du aux quantités $R_{mqp_{i_1}\ldots p_{i_l}}(x)$.

Tenant compte des conditions sur m, q, p_{i_j} $(j = 1, 2, \ldots, l)$ on a:

$$(mqp_{i_1}\ldots p_{i_l}, g-1) = (m, g-1)\cdot(q, g-1)\prod_{j=1}^{l}{}' p_{i_j},$$

le produit $\prod'$ étant étendu aux indices j pour lesquels $p_{i_j}^{\beta(i,j)}$ divise $g-1$, avec $\beta(i,j) = \inf\big(\alpha(p_{i_j}), \gamma_{i_j}\big)+1$.

Après simplification on obtient:

$$(27)\qquad T_1(x) = x\frac{(q, g-1)}{q^2}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l \sum_{p_{i_1},\ldots,p_{i_l}}^{*}\Big(\prod_{j=1}^{k}{}' p_{i_j}\Big)(p_{i_1}\ldots p_{i_l})^{-2}\times \\ \times\sum_{m|\Pi^*(\omega)}\mu(m)(m, g-1)m^{-2}+\mathcal{R}_1(x),$$

où $\mathcal{R}_1(x)$ est le terme résiduel.

Calculons pour commencer le terme

$$\Sigma_\omega = \sum_{m|\Pi^*(\omega)}\mu(m)(m, y-1)m^{-2}.$$

On écrit m sous la forme:

$$m = q_{j_1}\ldots q_{j_r}m' \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r \leqslant s, \quad q_{j_l}|g-1 \quad (l = 1, \ldots, r),$$
$$m'|\Pi^{**}(\omega), \quad \text{avec} \quad \Pi^{**}(\omega) = (q_1\ldots q_s)^{-1}\Pi^*(\omega).$$

En remplacant dans Σ_ω, nous obtenons:

$$\Sigma_\omega = \sum_{r=0}^{s}(-1)^r\sum_{q_{j_1},\ldots,q_{j_r}}^{*}\sum_{m'|\Pi^{**}(\omega)}\mu(m')m'^{-2}(q_{j_1}\ldots q_{j_r})^{-1},$$

c'est-à-dire:

$$\Sigma_\omega = \prod_{i=1}^{s}\Big(1-\frac{1}{q_i}\Big)\sum_{m'|\Pi^{**}(\omega)}\mu(m')m'^{-2},$$

à condition de choisir ω de telle sorte que:

$$(28)\qquad \omega \geqslant \max\{q_j,\ j = 1, 2, \ldots, s\}.$$

Finalement:

$$\Sigma_\omega = \prod_{i=1}^{s}\Big(1-\frac{1}{q_i}\Big)\frac{6}{\pi^2}\prod_{p|q(g-1)}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1}+O\big(\omega^{-1}(\log\omega)^{-1}\big).$$

Remplaçons dans la formule (27) Σ_ω par sa valeur:

$$T_1(x) = \frac{6}{\pi^2}x(q, g-1)q^{-2}\prod_{i=1}^{s}\Big(1-\frac{1}{q_i}\Big)\prod_{p|q(g-1)}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1}\prod_{p|q}\Big(1-\frac{1}{p^\beta}\Big)+ \\ +O\big(x\omega^{-1}(\log\omega)^{-1}\big)+\mathcal{R}_1(x),$$

avec:

$$\beta = \begin{cases}1 & \text{si} \quad p^{\alpha(p)}\|q \ \text{et}\ p^{\alpha(p)+1}|g-1,\\ 2 & \text{sinon}.\end{cases}$$

Par conséquent, en simplifiant et en utilisant les notations du théorème 1:

$$(29)\qquad T_1(x) = x\frac{6}{\pi^2}\frac{(q, g-1)}{q^2}\prod_{p\in E(g-1,q)}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}+O\Big(\frac{x}{\omega\log\omega}\Big)+\mathcal{R}_1(x).$$

Nous pouvons d'autre part majorer $|\mathcal{R}_1(x)|$ par:

$$|\mathcal{R}_1(x)| \leqslant \sum_{l=0}^{k}\sum_{p_{i_1},\ldots,p_{i_l}}^{*}\sum_{m\leqslant\Pi(\omega)}|R_{mqp_{i_1}\ldots p_{i_l}}(x)|,$$

puis, en utilisant la majoration de $|R_m(x)|$ donnée au début, après avoir remarqué que la fonction $m\to\lambda_1(m)$ est croissante:

$$|\mathcal{R}_1(x)| \ll \Pi(\omega)x^{\lambda_1(\Pi(\omega))},$$

ce qui transforme la formule (29) en:

$$(30)\qquad T_1(x) = x\frac{6}{\pi^2}\frac{(q, g-1)}{q^2}\prod_{p\in E(g-1,q)}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}+ \\ +O\Big(\frac{x}{\omega\log\omega}\Big)+O\big(\Pi(\omega)x^{\lambda_1(\Pi(\omega))}\big).$$

Deuxième partie: majoration de $T_2(x)$.

$$T_2(x) = O\Big(\sum_{\omega<p\leqslant\varphi\log x}\Big(\frac{x}{p^2}+R'_p(x)\Big)\Big).$$

Nous utilisons essentiellement la proposition 7.

$$T_2(x) = O\Big(\sum_{\omega<p\leqslant\varphi\log x}\frac{x}{p^2}\Big)+O\Big(\sum_{\omega<p\leqslant\varphi\log x}|R'_p(x)|\Big),$$

$$|R'_p(x)| = O(px^{\lambda_2(p)})+O\Big(\frac{\eta(\varepsilon)}{p}x^{\lambda_3(p)}\Big)+O\Big(\frac{1}{p}x^{\lambda_4(p)}\Big).$$

Après avoir remarqué que les fonctions $p \to \lambda_i(p)$ $(i = 2, 3, 4)$ sont croissantes, on écrit:

$$T_2(x) = O\left(\frac{x}{\omega}\right) + O(\log^2 x \cdot x^{\lambda_2(\varphi \log x)}) + O\left(\frac{x}{\omega^{1/2-\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{\log x}{\omega} x^{\lambda_4(\varphi \log x)}\right).$$

Pour x suffisamment grand et $\omega = (\log x)^{1/4}$, les conditions (20), (26), (28) sont satisfaites, ainsi que les inégalités:

$$e^{\frac{1}{2}(\log x)^{1/4}} \leqslant \Pi(\omega) < e^{2(\log x)^{1/4}}.$$

Utilisant le lemme 4 on obtient:

(31) $T_2(x)$

$$= O\big(x(\log x)^{-1/4}\big) + O\big(xe^{-a(\log x)^{2\varepsilon}(\log\log x)^{-1}}\big) + O\big(x(\log x)^{\varepsilon-1/8}\big) + O\big(xe^{-b(\log x)^2}\big),$$

a et b étant deux constantes positives.

Réunissant les formules (30) et (31),

$$T(x) = \frac{6}{\pi^2} x \frac{(q, g-1)}{q^2} \prod_{p \in E(g-1, q)} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} + O\big(x(\log x)^{\varepsilon - 1/8}\big),$$

ce qui démontre le théorème 1.

Démonstration du théorème 2. Nous avons démontré au théorème 1 que:

$$a_q = \frac{6}{\pi^2} \frac{(q, g-1)}{q^2} \prod_{p \in E(g-1, q)} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

$$E(g-1, q) = \{p \mid \text{ il existe } \alpha \geqslant 0,\ p^\alpha \| q \text{ et } p^{\alpha+1} | g-1\}.$$

Définissons les nombres réels c_q de la manière suivante:

$$c_q = q^2 \frac{a_q}{a_1} = (q, g-1) \prod_{\substack{p \in F(g-1, q) \\ p | g-1}} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \tag{32}$$

$$F(g-1, q) = \{p \mid \text{ il existe } \alpha \geqslant 1,\ p^\alpha \| q \text{ et } p^{\alpha+1} \nmid g-1\}.$$

La fonction arithmétique $q \to c_q$ est multiplicative, c'est-à-dire:

$$c_1 = 1,\ c_{qq'} = c_q c_{q'} \text{ sitôt que } (q, q') = 1.$$

D'autre part, en vertu de la formule (32), le théorème 2 équivaut à:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{q^2} = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p | g-1} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \tag{33}$$

La multiplicativité de $q \to c_q$ permet d'écrire:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{q^2} = \prod_p \left(1 + \frac{c_p}{p^2} + \frac{c_{p^2}}{p^4} + \ldots\right). \tag{34}$$

Calculons c_{p^k} pour $k \geqslant 1$, p premier.

Si $(p, g-1) = 1$, $c_{p^k} = 1$ pour tout $k \geqslant 0$.

Si p divise $g-1$,

$$c_{p^k} = \begin{cases} p^k & \text{quand} \quad 1 \leqslant k \leqslant a(p) - 1, \\ p^{a(p)}\left(1 + \frac{1}{p}\right) & \text{quand} \quad k \geqslant a(p), \end{cases}$$

$a(p)$ étant l'exposant de p dans la décomposition de $g-1$ en facteurs premiers.

Remplaçons dans la formule (34) c_{p^k} par sa valeur:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{q^2} = \prod_{(p, g-1)=1} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \ldots\right) \prod_{p | g-1} \left(\left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^{a-1}}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{p^{a+2}} + \ldots\right)\right),$$

en posant $a = a(p)$.

Ou encore:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{q^2} = \prod_{(p, g-1)=1} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \prod_{p | g-1} \left(\left(1 - \frac{1}{p^a}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{1}{p}\right) p^{-a} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}\right),$$

expression qui peut s'écrire:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{q^2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \prod_{p | g-1} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

ce qui démontre la formule (33) et le théorème 2.

Bibliographie

[1] J. Bésineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction „somme des chiffres"*, Acta Arith. 20 (1972), p. 401–416.

[2] H. Delange, *Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives*, Acta Arith. 21 (1972), p. 285–298.

[3] P. Erdös, *Some asymptotic formulas in number theory*, J. Indian Math. Soc. 12 (1948), p. 75–78.
[4] P. Erdös and G. G. Lorentz, *On the probability that n and g(n) are relatively prime*, Acta Arith. 5 (1958), p. 35–44.
[5] T. Estermann, *On the number of primitive lattice points in a parallelogramm*, Canad. J. Math. 5 (1953), p. 456–459.
[6] A. S. Fainleib, *On the relative primality of n and f(n)*, Math. Notes 11 (1972), p. 163–168.
[7] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétes additives et multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1968), p. 259–265.
[8] R. R. Hall, *On the probability that n and f(n) are relatively prime*, Acta Arith. 17 (1970), p. 169–183.
[9] — *On the probability that n and f(n) are relatively prime, II*, Acta Arith. 19 (1971), p. 175–184.
[10] — *On the probability that n and f(n) are relatively prime, III*, Acta Arith. 20 (1972), p. 267–289.
[11] M. Mendès-France, *Suites à spectre vide et repartition modulo* 1, J. Number Theory 5 (1973), p. 1–15.
[12] D. J. Newman, *On the number of binary digits in a multiple of three*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), p. 719–721.
[13] E. J. Scourfield, *An asymptotic formula for the property* $(n, f(n)) = 1$ *for a class of multiplicative functions*, Acta Arith. 29 (1976), p. 401–423.
[14] G. L. Watson, *On integers n relatively prime to* $[an]$, Canad. J. Math. 5 (1953), p. 451–455.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE No 040226
ASSOCIE AU CNRS
Talence, France

Reçu le 28. 4. 1975
et dans la forme modifiée 2. 7. 1975 (697)

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

A problem of Schinzel on lattice points

by

L. Low (Adelaide, South Australia)

1. Introduction. Let L be a lattice in R^n, and for any basis $B = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ of R^n, let $c(B)$ be the cone with basis B, that is,

$$c(B) = c(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \,\Big|\, \lambda_i \in R,\ \lambda_i \geqslant 0 \ \ \forall i\Big\}.$$

By an *L-cone* we shall mean a cone C of the form $C = c(B)$ such that B is a basis of R^n and $B \subseteq L$.

Any L-cone C has a unique such basis B which satisfies the further condition that each vector $\boldsymbol{a}_i$ in B is primitive (i.e., $\boldsymbol{a}_i \neq s\boldsymbol{x}$ for integral s greater than 1, and $\boldsymbol{x}$ in L); and we define the *index* of an L-cone C (with respect to L) as the index in L of the sublattice generated by this primitive basis of C. We shall call an L-cone C *basic* (with respect to L) if its index is 1, that is, if $C = c(B)$ for some basis B of the lattice L.

W. M. Schmidt [1] (reviewed MR #1408, Vol. 39, Feb., 1970) showed that if L is a sublattice of the integer lattice Z^n then the non-negative orthant

$$E^+ = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid x_i \geqslant 0 \ \ \forall i\}$$

can be written as

$$E^+ = \bigcup_{i=1}^{N} c(B_i),$$

where each B_i is a basis of L, that is, E^+ is a finite union of basic L-cones. This result had been conjectured by Schinzel, and Schmidt's proof makes use of a compactness argument. In this paper, I shall give a simple constructive proof of the following theorem, from which Schmidt's theorem follows.

THEOREM. *If C is an L-cone of index m in L, where L is a lattice in R^n, then C is a union of at most $N = n^{m-1}$ non-overlapping basic L-cones (i.e., basic L-cones such that any two distinct ones have disjoint interiors).*

If L is a sublattice of Z^n, of index r, then E^+ is an L-cone since

$$E^+ = c(r\boldsymbol{e}_1, \ldots, r\boldsymbol{e}_n),$$