For a given $\varepsilon > 0$, we choose

$$U = \exp\{\exp[(1-\varepsilon)j]\} \quad \text{and} \quad W = \exp\{\exp[(1+\varepsilon)j]\}.$$

By Theorem 2 we get that the left-hand sides of (21) and (22) tend to 0 as $x \to +\infty$. Since the above $U = U(x) \to +\infty$ with x, for $U < p_k < W$, we can apply (18) and (19) and we get

$$(23) \qquad \sum_{U<p_k<W}' \nu_x\left(n: \frac{\log q_{j+1}(n)}{\log q_j(n)} > z,\ q_j(n) = p_k\right) = \big(1+o(1)\big) z^{-1} \nu_x\big(n:\ U < q_j(n) < W\big).$$

Another appeal to Theorem 2 yields that, for our j, as $x \to +\infty$,

$$\nu_x\big(n:\ U < q_j(n) < W\big) \to 1,$$

and thus (20)–(23) lead to the conclusion of Theorem 3. This completes the proof.

References

[1] N. G. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$*, Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A 54 (1951), pp. 50–60.

[2] P. Erdös, *On the distribution function of additive functions*, Ann. of. Math. (2) 47 (1946), pp. 1–20.

[3] J. Kubilius, *Probabilistic methods in the theory of numbers*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., Vol. 11, 1964.

[4] B. V. Levin and A. S. Fainleib, *Application of some integral equations to problems of number theory*, Russian Math. Surveys 22 (1967), pp. 119–204.

[5] W. Schwarz, *Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1969.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TEMPLE UNIVERSITY
Philadelphia, Pa.

Received on 8. 11. 1974 (639)

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

Über die maximale Norm der Idealteiler des Polynoms $\alpha x^m + \beta y^n$ mit den algebraischen Koeffizienten

von

S. V. Kotov (Minsk)

1. Einleitung. K. Mahler bewies [16], daß der allergrößte Primteiler P des Polynoms

$$(1) \qquad G(x, y) = ax^m + by^n,$$

wo $m \geqslant 2$, $n \geqslant 3$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ganz und rational sind, unbegrenzt bei $X = \max(|x|, |y|) \to \infty$, $(x, y) = 1$, wächst. Um das Verhalten von P zu erforschen, betrachtete K. Mahler Ergebnisse von C. Parry [17] über die p-adische Verallgemeinerung vom Thue–Siegelschen Satz. Da sie nichteffektiv sind, war es unmöglich auch im Prinzip die Geschwindigkeit des Wachstums von P bei $X \to \infty$ festzusetzen.

Zum ersten Male brachten A. Vinogradov und V. Sprindžuk [2] ([1]) das prinzipielle Schema der Effektivisierung des Ergebnisses von K. Mahler für $m = n \geqslant 3$, wenn $G(x, y)$ die irreduzibele binäre Form ist. Später, wenn J. Coates [13] und V. Sprindžuk [7] die Gleichung von Thue–Mahler analysierten, bekamen sie explizite Abschätzungen für P im Falle, daß $G(x, y)$ eine binäre Form ist (sieh ausführlicher [4] und [1] auf den Seiten 209–211).

Auf die Möglichkeit der Effektivisierung (1) deutete V. Sprindžuk in [8] hin. J. Coates [14] realisierte diese Möglichkeit, wenn $m = 2$, $n = 3$. Er setzte fest, daß der allergrößte Primteiler die Zahl

$$10^{-3}(\ln\ln X)^{1/4}$$

übertrifft, wenn $(x, y) = 1$. In diesem Artikel bringen wir einen effektiven Beweis des Ergebnisses von K. Mahler [16] und lösen die ähnliche Aufgabe für relative Körper. Sei $\boldsymbol{K}$ ein gewisser Körper von algebraischen Zahlen des Grades $[\boldsymbol{K}: \boldsymbol{Q}] = d$ über den Körper der Rationalzahlen $\boldsymbol{Q}$, wo $G(x, y) = \alpha x^m + \beta y^n$ $(m \geqslant 2,\ n \geqslant 3,\ m \neq n)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$-Ring der ganzen Zahlen des Körpers $\boldsymbol{K}$, $x, y \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ und $(x, y) = 1$ ist.

([1]) Konkret, wurde die irreduzibele binäre Form $G(x, y)$ in allgemeiner Form betrachtet.

THEOREM. *Wenn $G(x, y)$ ein Polynom der hindeutenden Form ist, dann gilt die Abschätzung*

$$N(\mathfrak{p}) > c_1(\ln\ln N \ln\ln\ln N)^{f/2}, \quad N \geqslant N_0, \tag{2}$$

wo $N = \max\left(|Nm(x)|, |Nm(y)|\right)$, $c_1 > 0$ *und* N_0 *durch die Parameter des Polynoms* $G(x, y)$ *und des Körpers* $\boldsymbol{K}$ *effektiv definiert werden, für die maximale Norm* $N(\mathfrak{p}) = P^f$ $(1 \leqslant f \leqslant d)$ *der Primideale* $\mathfrak{p}$, *die in* $G(x, y)$ *geht.*

Die Überlegungen von K. Mahler [16], die mit effektiven Abschätzungen von Werten der Lösungen der verallgemeinerten Gleichung von Thue–Mahler [4] ergänzt sind, liegen zugrunde dem Beweis des Theorems. Auf die Möglichkeit der Gewinnung von Abschätzung der Form (2) im gegebenen Aspekt wurde von V. Sprindžuk hingedeutet, wenn $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}$ (sieh [1] auf den Seiten 212–213).

Mann soll auch bemerken, daß es für $N(\mathfrak{p})$ eine scharfe Abschätzung im Falle $m = n \geqslant 4$ gibt, wenn $G(x, y)$ die binäre Form des speziellen Aspekts ist (sieh [4], [5] und der Satz aus § 2).

2. Hilfsbehauptungen. Weiter werden für uns einige Hilfsbehauptungen nützlich sein, die wir anführen.

Durch $\overline{|\xi|}$ bezeichnen wir das Maximum von Absolutbeträgen, die mit der algebraischen Zahl ξ konjugieren (die Eingeschaften der Funktion $\overline{|\ldots|}$ sieh, z.B., in [9]).

Sei $\boldsymbol{L}$ ein Körper der algebraischen Zahlen des endlichen Grades $[\boldsymbol{L}:\boldsymbol{Q}] = r$ über die Rationalzahlen $\boldsymbol{Q}$.

LEMMA 1. *Existiert so ein vollständiges System der unabhängigen algebraischen Einheiten* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *des Körpers* $\boldsymbol{L}$, *daß*

$$\overline{|\varepsilon_j|} < \exp\{c_2 R_{\boldsymbol{L}}\} \quad (1 \leqslant j \leqslant k;\ k \leqslant r-1),$$

wo $c_2 > 0$ *effektiv durch* r *definiert wird,* $R_{\boldsymbol{L}}$ *ein Regulator des Körpers* $\boldsymbol{L}$ *ist.*

Sieh [18] und Lemma 1 in [4].

LEMMA 2. *Wenn* $\xi \in \boldsymbol{L}$ *und* $Nm(\xi) \neq 0$, *dann existiert so eine Einheit* $\varepsilon \in \boldsymbol{L}$, *daß*

$$\overline{|\varepsilon\xi|} < \exp\{c_3 R_{\boldsymbol{L}}\} |Nm(\xi)|^{1/r},$$

wo $c_3 > 0$ *effektiv durch* r *definiert wird.*

Sieh Lemma 4.5 in [9] und Lemma 2 in [4].

Am Ende der Arbeit [4] wird hervorgehoben, daß ihre Ergebnisse für binäre Formen des Grades $n \geqslant 4$ gelten, wenn sie nicht „außerordentlich" sind. In [4] gaben wir die Definition der „außerordentlichen" binären Formen mit algebraischen Koeffizienten, wenn sie nicht über den Ausgangskörper irreduzibel sind. Der Fakt der Irreduzibilität der

Formen wird in der Stichhaltung der Ergebnisse [4] benutzt, insbesondere im „Schlüsseltheorem" 1, aber nur um das zu beweisen, daß es bei $n \geqslant 5$ keine „außerordentliche" binare Form existiert (sieh [4], Lemma 7). Alle übrigen Momente, die mit der Irreduzibilität der Form verbunden sind, kann man leicht überwältigen (sieh den Beweis des Theorems 1, [4]).

Gleichartig kann man auch den Begriff der „außerordentlichen" binären Form einführen, ohne seine Irreduzibilität zu fordern.

Sei $F(x, y)$ eine binäre Form des Grades $n \geqslant 4$ mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{L}}$ Ring der ganzen Zahlen des Körpers $\boldsymbol{L}$. Wir nennen sie „außerordentlich", wenn es so eine Nummeration von ihren Wurzeln $\theta_1, \ldots, \theta_n$ gibt, daß die Gleichungen

$$\frac{\theta_1 - \theta_k}{\theta_2 - \theta_k} \cdot \frac{\theta_2 - \theta_l}{\theta_1 - \theta_l} = \frac{1 - \zeta_k}{1 - \zeta_l} \tag{3}$$

für alle Indexe k, l $(k \neq l; 3 \leqslant k, l \leqslant n)$ erfüllt werden, wo $\zeta_k, \zeta_l \neq 1$ verschiedene Wurzeln aus 1 sind.

Es sei

$$F(x, y) = \gamma_1 x^n + \gamma_2 y^n, \tag{4}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2 \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{L}}$.

LEMMA 3. *Binäre Formen* $F(x, y)$ *der Gestalt* (4) *sind keine „außerordentlichen".*

Beweis. Wir nehmen die Gegensatzlichkeit an. Es gibt so eine Nummeration der Wurzeln $\theta_1, \ldots, \theta_n$ der Form $F(x, y)$, daß die Gleichungen (3) existieren. Aus (4) folgt

$$\theta_j = |\gamma_2/\gamma_1|^{1/n} e^{i\frac{\varphi + 2j\pi}{n}} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1), \tag{5}$$

wo $\varphi = \arg(-\gamma_2/\gamma_1)$. Wir setzen (5) in (3) ein und bekommen nach offenbaren Umformungen

$$\frac{1 - e^{i\frac{2(k-1)}{n}\pi}}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k-1)}{n}\pi}} \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}} - e^{i\frac{2(l-1)}{n}\pi}}{1 - e^{i\frac{2(l-1)}{n}\pi}} = \frac{1 - \zeta_k}{1 - \zeta_l} \tag{6}$$

für beliebige Indexe k, l $(k \neq l; 3 \leqslant k, l \leqslant n)$.

Wir analysieren den linken Teil (6).

$$\frac{1 - e^{i\frac{2(k-1)}{n}\pi}}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k-1)}{n}\pi}} = e^{-i\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{e^{-i\frac{k-1}{n}\pi} - e^{i\frac{k-1}{n}\pi}}{e^{-i\frac{k-2}{n}\pi} - e^{i\frac{k-2}{n}\pi}} = e^{-i\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\sin\frac{k-1}{n}\pi}{\sin\frac{k-2}{n}\pi}.$$

Gleichartig formen wir den zweiten Multiplikator im linken Teil (6) um. Im Ergebnis haben wir

$$\frac{\sin\frac{k-1}{n}\pi}{\sin\frac{k-2}{n}\pi}\cdot\frac{\sin\frac{l-2}{n}\pi}{\sin\frac{l-1}{n}\pi} = \frac{1-\zeta_k}{1-\zeta_l} \tag{7}$$

für beliebige Indexe k, l ($k \neq l$; $3 \leqslant k, l \leqslant n$).

Der linke Teil (7) ist eine reelle Zahl und wir bekommen entsprechend dem Lemma 3.4 aus [10], daß $\zeta_k = 1$, und das steht im Widerspruch zu (3). Das Lemma ist bewiesen.

Sei die binäre Form $F(x, y)$ der Gestalt (4); $a, \gamma_3, \delta_1, \ldots, \delta_s \in \boldsymbol{Z_L}$; Ideale (δ_l) sind die Potenzen der verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}_l$ aus $\boldsymbol{Z_L}$, $(\delta_l) = \mathfrak{p}_l^{u_l}$, $u_l > 0$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$, wobei $N(\mathfrak{p}_l) = p_l^{f_l}$ $(1 \leqslant f_l \leqslant r)$, $P = \max\limits_{(l)}(p_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$.

Wir betrachten die Gleichung

$$F(x, y) = \tau\gamma_3\delta_1^{v_1}\ldots\delta_s^{v_s}, \quad (x, y)|a, \tag{8}$$

wo τ eine gewisse Einheit aus $\boldsymbol{L}$ ist.

Aus den vorigen Überlegungen und aus Lemma 3 folgt die Behauptung

Satz. *Es existiert so eine Einheit $\zeta \in \boldsymbol{L}$, daß es für alle ganzwertigen Lösungen $x, y \in \boldsymbol{Z_L}$ und rationalen $v_1 \geqslant 0, \ldots, v_s \geqslant 0$ der Gleichung* (8), *gilt*

$$\begin{aligned}\ln\{\max(\overline{|\zeta x|}, \overline{|\zeta y|}, p_1^{f_1u_1v_1}, \ldots, p_s^{f_su_sv_s})\} &< \sigma_1 R_L(R_G + sh_G\ln P)\{\sigma_2 P^{2g}\big(\ln|Nm(\gamma_3)| + sh_G\ln P + \\ &\quad + (\ln H_F + \ln|Nm(a)|)(R_G + h_G\ln P)\big)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \\ &\quad + \big(\sigma_3\xi^{-1}s^3P^{2(g+1)}(R_G + h_G\ln P)^2\big)^{\sigma_4}\},\end{aligned} \tag{9}$$

wo entsprechend R_L ein Regulator des Körpers $\boldsymbol{L}$, R_G und h_G — Regulator und Klassenzahl der Ideale des Zerlegungskörpers $\boldsymbol{G}$ der Form $F(x, y)$, $H_F = \max(\overline{|\gamma_1|}, \overline{|\gamma_2|})$, ξ die beliebige Zahl aus dem Intervall $(0, \frac{1}{2})$ sind, die positiven Größen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ durch den Grad des Körpers $\boldsymbol{L}$ und den Grad der Form $F(x, y)$ effektiv definiert werden, $\sigma_4 = 4(sr+g+1)(1+\xi)/\xi$, $g = [\boldsymbol{G}:\boldsymbol{Q}]$.

3. Beweis des Satzes. Es sei

$$\big(G(x, y)\big) = \mathfrak{p}_1^{z_1}\ldots\mathfrak{p}_s^{z_s} \tag{10}$$

die Zerlegung $\big(G(x, y)\big)$ nach den Potenzen der Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ in $\boldsymbol{Z_K}$, $N(\mathfrak{p}_l) = p_l^{f_l}$, $1 \leqslant f_l \leqslant d$, $P = \max\limits_{(l)}(p_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$. Wenn h_K — die Klassenzahl der Ideale des Körpers $\boldsymbol{K}$ ist, dann wird angenommen, daß $z_l = h_Kw_l + w_l'$, $0 \leqslant w_l' < h_K$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$, was wir aus (10) gewinnen

$$\big(G(x, y)\big) = (\gamma)(\delta_1)^{w_1}\ldots(\delta_s)^{w_s},$$

wobei $(\gamma) = \mathfrak{p}_1^{w_1'}\ldots\mathfrak{p}_s^{w_s'}$, $(\delta_l) = \mathfrak{p}_l^{h_K}$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$, woher

$$G(x, y) = \tau'\gamma\delta_1^{w_1}\ldots\delta_s^{w_s}, \tag{11}$$

τ' eine gewisse Einheit aus $\boldsymbol{K}$ ist.

Weiter sei $w_l = mv_l + v_l'$, $0 \leqslant v_l' < m$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$, $\alpha' = -\alpha^{m-1}\tau'\gamma\delta_1^{v_1'}\ldots\delta_s^{v_s'}$. Da

$$|Nm(\alpha')| < c_4P^{c_5s},$$

wo $c_4 > 0$, $c_5 > 0$ durch die Parameter des Körpers $\boldsymbol{K}$ und das Polynom $G(x, y)$ effektiv definiert werden(2), dann wird so eine Einheit $\tau'' \in \boldsymbol{K}$ infolge Lemmas 2 gefunden, daß

$$\overline{|\tau''\alpha'|} < c_6P^{c_7s}. \tag{12}$$

Nehmen wir an in (11) $\alpha'' = \tau''\alpha'$, $\beta_1 = -\alpha^{m-1}\beta$, $X = \alpha x$ und $Y = y$, dann gilt

$$X^m + \alpha''(\tau'')^{-1}(\delta_1^{v_1}\ldots\delta_s^{v_s})^m = \beta_1Y^n. \tag{13}$$

Auf Grunde Lemmas 2 können wir schreiben

$$(\tau'')^{-1} = \varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_k^{u_k} \quad (k \leqslant d-1),$$

wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ein System der unabhängigen Einheiten des Körpers ist. Wird berücksichtigt, daß $u_j = mu_j' + u_j''$, $0 \leqslant u_j'' < m$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, $\alpha_1 = \alpha''\varepsilon_1^{u_1''}\ldots\varepsilon_k^{u_k''}$ und $z = \varepsilon_1^{u_1'}\ldots\varepsilon_k^{u_k'}\delta_1^{v_1}\ldots\delta_s^{v_s}$, dann nimmt (13) die Form

$$G_1(X, Z) = X^m + \alpha_1Z^m = \beta_1Y^n \tag{14}$$

an, wobei aus Lemma 1 und Abschätzung (12)

$$\overline{|\alpha_1|} < c_8P^{c_9s} \tag{15}$$

folgt.

Wenn ω eine Wurzel der binären Form $G_1(X, Z)$ ist, dann sehen wir aus (14), daß die Zerlegung nach den ganzen Idealen im Körper $\boldsymbol{K_1} = \boldsymbol{K}(\omega)$

$$(X - \omega Z)\left(\frac{G_1(X, Z)}{X - \omega Z}\right) = (\beta_1Y^n)$$

---

(2) Weiter werden die Größen $c_6, c_7, \ldots$ die selbe Bedeutung haben, wie c_4, c_5.

gilt. Nehmen wir an, daß $\mathfrak{p}^U \| (X-\omega Z)$ und

$$\left(\frac{G_1(X,Z)}{X-\omega Z}, \mathfrak{p}\right) = 1. \tag{16}$$

Aus (16) folgt $\mathfrak{p}^U \| (\beta_1 Y^n)$ und wir nehmen $U = U_1 + U_2$ an, wo

$$\mathfrak{p}^{U_1} \| (\beta_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}^{U_2} \| (Y^n).$$

Sei $U_2 = nU_3$ dann gilt:

$$\mathfrak{p}^{U_1}(\mathfrak{p}^{U_3})^n \| (\beta_1 Y^n), \tag{17}$$

wobei $\mathfrak{p}^{U_1} \| (\beta_1)$ und $\mathfrak{p}^{U_3} \| (Y)$. Jetzt nehmen wir an, daß $\mathfrak{q} \,|\, (X-\omega Z)$ und

$$\left(\frac{G_1(X,Z)}{X-\omega Z}, \mathfrak{q}\right) \neq 1.$$

Merken wir an, daß $X \equiv \omega Z \pmod{\mathfrak{q}}$ und

$$\frac{G_1(X,Z)}{X-\omega Z} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}},$$

woher infolge $(x, y) = 1$ $G_1'(\omega Z, Z) \equiv G_1'(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$, wo

$$G_1'(\omega, 1) = \left.\frac{\partial G_1(u,v)}{\partial u}\right|_{u=\omega, v=1}.$$

Wenn $\mathfrak{q}^V \| (X-\omega Z)$, dann $\mathfrak{q}^V \,|\, (\beta_1 Y^n)$ und wir nehmen an $V = V_1 + V_2$, wo $\mathfrak{q}^{V_1}(\beta_1)$ und $\mathfrak{q}^{V_2} \,|\, (Y^n)$. Sei $V_2 = nV_3 + V_4$, $0 \leqslant V_4 < n$, also,

$$\mathfrak{q}^{V_3} \,|\, (Y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}^{V_4} \big| \big(G_1'(\omega, 1)\big)^{n-1}. \tag{18}$$

Auf diese Weise folgt es aus (17) und (18), daß

$$(X-\omega Z) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^n, \tag{19}$$

wobei

$$\mathfrak{a} \big| \big(\beta_1 \big(G_1'(\omega, 1)\big)^{n-1}\big) \tag{20}$$

und $\mathfrak{b} \,|\, (Y)$.

In den Umkehrklassen zu den Klassen der Ideal $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ befinden sich entsprechend ganze Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ mit den Normen die nicht größer als $|D_{\boldsymbol{K}_1}|^{1/2}$ sind, wo $D_{\boldsymbol{K}_1}$ die Diskriminante des Körpers $\boldsymbol{K}_1$ ist (sieh [3] auf der Seite 120). Aus (19) gewinnen wir

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1^n)(X-\omega Z) = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1)^n. \tag{21}$$

Weiter merken wir an, daß $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1) = (\mu')$ und $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1^n) = (\lambda')$ die Hauptideale sind, wobei

$$\begin{gathered} |Nm(\mu')| \leqslant N(\mathfrak{a}) |D_{\boldsymbol{K}_1}|^{1/2}, \\ |Nm(\lambda')| \leqslant |D_{\boldsymbol{K}_1}|^{\frac{1}{2}(n+1)}. \end{gathered} \tag{22}$$

Auf Grunde der Abschätzung (15) haben wir

$$\overline{|\omega|} < c_{10} P^{c_{11} s}, \tag{23}$$

woher

$$\overline{|G_1'(\omega, 1)|} < c_{12} P^{c_{13} s}$$

und infolge (20)

$$N(\mathfrak{a}) \leqslant \Big|Nm\Big(\beta_1 \big(G_1'(\omega, 1)\big)^{n-1}\Big)\Big| < c_{14} P^{c_{15} s}. \tag{24}$$

Jetzt schätzen wir $|D_{\boldsymbol{K}_1}|$ durch P und s ab. Nehmen wir an, daß $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}(\theta)$, dann dividiert die Differente des Körpers $\boldsymbol{K}_1$ die Zahl

$$\delta(\theta) m \omega^{m-1},$$

wobei $\delta(\theta)$ — die Differente der Zahl θ ist, und die Diskriminante $D_{\boldsymbol{K}_1}$, als die Norm der Differente des Körpers $\boldsymbol{K}_1$, die Norm dieser Zahl dividiert (sieh [3] auf den Seiten 131–147). Also infolge (23), gewinnen wir

$$|D_{\boldsymbol{K}_1}| < c_{16} P^{c_{17} s}. \tag{25}$$

In Erwägung (21), (22), (24) und (25) haben wir

$$\max\big(|Nm(\mu')|, |Nm(\lambda')|\big) < c_{18} P^{c_{19} s} \tag{26}$$

und behaupten auf Grunde Lemmas 2, daß die Einheiten $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \boldsymbol{K}_1$ gelten, für die

$$\max\big(\overline{|\mu''|}, \overline{|\lambda''|}\big) < \exp\{c_{20} R_{\boldsymbol{K}_1}\} c_{21} P^{c_{22} s}, \tag{27}$$

wo $\mu'' = \varkappa_1 \mu'$, $\lambda'' = \varkappa_2 \lambda'$, $R_{\boldsymbol{K}_1}$ ein Regulator des Körpers $\boldsymbol{K}_1$ ist.

In (21) gehen wir von Idealen zu Zahlen

$$X - \omega Z = \varkappa_3 \frac{\mu''}{\lambda''} (\eta')^n \tag{28}$$

über, wo $(\eta') = \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$,

$$\varkappa_3 = (\varepsilon_1')^{n_1} \ldots (\varepsilon_h')^{n_h} \quad (h \leqslant dm-1),$$

$\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_h'$ ein System der unabhängigen Einheiten in $\boldsymbol{K}_1$ ist, dabei infolge Lemma 1 und 2

$$\overline{|\varepsilon_j'|} < \exp\{c_{23} R_{\boldsymbol{K}_1}\} \quad (1 \leqslant j \leqslant h). \tag{29}$$

Aus der Landauschen Ungleichung [15]

$$R_{\boldsymbol{K}_1} < c_{24} |D_{\boldsymbol{K}_1}|^{1/2} (\ln |D_{\boldsymbol{K}_1}|)^{dm-1}$$

und der Abschätzung (25) folgt, daß

$$R_{\boldsymbol{K}_1} < c_{25} P^{c_{26} s}. \tag{30}$$

Nehmen wir an, daß $n_j = nn_j' + n_j''$, $0 \leqslant n_j'' < n$ $(1 \leqslant j \leqslant h)$

$$\mu = \mu''(\varepsilon_1')^{n_1''} \ldots (\varepsilon_h')^{n_h''}, \tag{31}$$

$$\lambda = \lambda'', \quad \eta'' = \eta'(\varepsilon_1')^{n_1'} \ldots (\varepsilon_h')^{n_h'}, \tag{32}$$

dann nimmt (28) die Form

$$X - \omega Z = \frac{\mu}{\lambda}(\eta'')^n \tag{33}$$

an und infolge (26), (27), (29), (30), (31) erhalten wir die Abschätzungen

$$\max(|Nm(\mu)|, |Nm(\lambda)|) < c_{27}P^{c_{28}s}, \tag{34}$$

$$\max(\overline{|\mu|}, \overline{|\lambda|}) < \exp\{c_{29}P^{c_{30}s}\}. \tag{35}$$

Offenbar, die Gleichungen und die Abschätzungen, die (31), (32), (33) und (23), (26), (34), (35) entsprechend analog sind, für beliebige Wurzel $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_m$ der binären Form $G_1(X, Z)$ gelten. Wir können also für beliebige Indexe $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ schreiben

$$F(\eta_i, \eta_j) = \eta_i^n - (\mu_i\lambda_j)^{n-1}\mu_j\lambda_i\eta_j^n = \tau(\mu_i\lambda_j)^{n-1}\lambda_i\lambda_j(\omega_j - \omega_i)\delta_1^{v_1} \ldots \delta_s^{v_s}, \tag{36}$$

wo $\eta_i = \mu_i\lambda_j\eta_i''$, $\eta_j = \eta_j''$, $\tau = \varepsilon_1^{u_1'} \ldots \varepsilon_k^{u_k'}$.

Fixieren wir irgendwelche Indexe i und j, zum Beispiel, $i = 1$ und $j = 2$. Wir haben die Gleichung im Körper $\boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K}(\omega_1, \omega_2)$ in Bezug auf die Unbekannten $\eta_1, \eta_2, v_1 \geqslant 0, \ldots, v_s \geqslant 0$. Betrachten wir die folgenden Fälle: (I) $n \geqslant 4$ und (II) $n = 3$.

(I) Es ist klar, daß (36) die Gleichung der Form (8) ist. Zur Abschätzung der ganzwertigen Lösungen ist den Satz aus § 2 andwendbar, und wir bekommen die Abschätzung der Form (9). Durch P und s schätzen wir die Parameter ab, die in diese Abschätzung hineingehen.

Wie früher, stellen wir fest, daß die Abschätzung

$$R_{\boldsymbol{K}_2} < c_{31}P^{c_{32}s} \tag{37}$$

für den Regulator $R_{\boldsymbol{K}_2}$ des Körpers $\boldsymbol{K}_2$ gilt.

Jetzt schätzen wir $R_{\boldsymbol{K}_3}$ ab, den Regulator des Zerlegungkörpers $\boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{K}_2(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ der Form $F(\eta_1, \eta_2)$, wo $\theta_1, \ldots, \theta_n$ die Wurzeln von $F(\eta_1, \eta_2)$ sind. Da die Diskriminante $D_{\boldsymbol{K}_3}$ des Körpers $\boldsymbol{K}_3$ die Norm der Zahl

$$\delta(\theta)m^2(\omega_1\omega_2)^{m-1}n^n(\theta_1 \ldots \theta_n)^{n-1}$$

dividiert, infolge (23) und (34)

$$|D_{\boldsymbol{K}_3}| < c_{33}P^{c_{34}s}, \tag{38}$$

also aus der Landauschen Ungleichung folgt

$$R_{\boldsymbol{K}_3} < c_{35}P^{c_{36}s}. \tag{39}$$

Auf Grunde der Ergebnisse der Arbeit [15] und der Ungleichung (38) schließen wir, daß

$$h_{\boldsymbol{K}_3} < c_{37}|D_{\boldsymbol{K}_3}|^{1/2}(\ln|D_{\boldsymbol{K}_3}|)^{d'-1} < c_{38}P^{c_{39}s}, \tag{40}$$

wo $h_{\boldsymbol{K}_3}$ die Klassenzahl der Ideale des Körpers $\boldsymbol{K}_3$ ist, $d' = [\boldsymbol{K}_3 : \boldsymbol{Q}] \leqslant dm(m-1)n!$.

Weiter merken wir an, daß infolge (23), (26) und (35)

$$H_F < \exp\{c_{40}P^{c_{41}s}\} \tag{41}$$

und

$$|Nm(\gamma_3)| < c_{42}P^{c_{43}s}. \tag{42}$$

Daraus, weil $(x, y) = 1$ und aus der Abschätzung (23) folgt, daß

$$(\eta_1, \eta_2) \mid (\omega_2 - \omega_1)$$

und

$$|Nm(\omega_2 - \omega_1)| < c_{44}P^{c_{45}s}. \tag{43}$$

Die Gleichungen (37), (39), (40), (41), (42) und (43) zeigen, daß in diesem Falle die Abschätzung, wenn $\xi = \frac{1}{4}$, die Form

$$\ln\{\max(\overline{|\zeta\eta_1|}, \overline{|\zeta\eta_2|})\} < c_{46}P^{c_{47}s^2} \tag{44}$$

annimmt, wo ζ eine gewisse Einheit aus $\boldsymbol{K}_2$ ist.

(II) Da $F(\eta_1, \eta_2)$ die kubische binäre Form ist, ist die direkte Anwendung des Satzes aus § 2 unmöglich. Deshalb benutzen wir für die Analyse der ganzwertigen Lösungen (36) die Methode, die in [11] gezeigt wurde.

Für die Einfachkeit der Bezeichnung nehmen wir an, daß

$$A = -(\mu_1\lambda_2)^2\mu_2\lambda_1, \quad B = (\mu_1\lambda_2)^2\lambda_1\lambda_2(\omega_2 - \omega_1) \tag{45}$$

und betrachten die Gleichung

$$F_1(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^3 + A\eta_2^3 = \tau B\delta_1^{v_1} \ldots \delta_s^{v_s}. \tag{46}$$

Es seien $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ Wurzeln der binären Form $F_1(\eta_1, \eta_2)$, $\boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{K}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ der Zerlegungkörper von $F_1(\eta_1, \eta_2)$, $[\boldsymbol{K}_3 : \boldsymbol{Q}] \leqslant 6dm(m-1)$, $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}_3}$ und $h_{\boldsymbol{K}_3}$ der Ring der ganzen Zahlen und die Zahl der Ideale des Körpers $\boldsymbol{K}_3$.

Mit Hilfe von den Standartüberlegungen (sieh, z.B., [5]) bekommen wir aus (46)

$$\eta_1 - \theta_i\eta_2 = \pi_i\varrho_1^{U_{1i}} \ldots \varrho_t^{U_{ti}}(\varepsilon_1'')^{V_{1i}} \ldots (\varepsilon_r'')^{V_{ri}} = \Delta_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ t \leqslant 3s;\ r \leqslant d'-1), \tag{47}$$

wobei $\varrho_l = \mathfrak{P}_l^{h_{\boldsymbol{K}_3}}$ $(1 \leqslant l \leqslant t)$, die Primideale $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t$ aus $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}_3}$ in die Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ hineingehen, $\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_r''$ ein System der unabhängigen Einheiten in $\boldsymbol{K}_3$ ist, dabei

$$\max(|Nm(\pi_i)|, |Nm(\varrho_l)|) < c_{48}P^{c_{49}s} \tag{48}$$

und

$$\max\left(\overline{|\pi_i|},\ \overline{|\varrho_l|},\ \overline{|\varepsilon_j|}\right) < \exp\{c_{50}P^{c_{51}s}\} \tag{49}$$

für beliebige Indexe i, j $(i = 1, 2, 3; 1 \leqslant l \leqslant t; 1 \leqslant j \leqslant r)$.

Eliminiert man η_1 und η_2 aus (47) so bekommt man

$$(\theta_1-\theta_2)\Delta_3-(\theta_1-\theta_3)\Delta_2-(\theta_3-\theta_2)\Delta_1 = 0. \tag{50}$$

Nehmen wir an, daß

$$U_{li} = 4U'_{li}+U''_{li},\quad 0 \leqslant U''_{li} < 4,\qquad V_{ji} = 4V'_{ji}+V''_{ji},\quad 0 \leqslant V''_{ji} < 4$$
$$(i = 1, 2, 3; 1 \leqslant l \leqslant t; 1 \leqslant j \leqslant r),$$
$$\varepsilon = (\varepsilon''_1)^{V_{11}} \ldots (\varepsilon''_r)^{V_{r1}},$$

$$\begin{aligned} A_1 &= (\theta_1-\theta_2)\pi_3\varrho_1^{U''_{13}} \ldots \varrho_t^{U''_{t3}}(\varepsilon''_1)^{V''_{13}} \ldots (\varepsilon''_r)^{V''_{r3}},\\ B_1 &= (\theta_3-\theta_1)\pi_2\varrho_1^{U''_{12}} \ldots \varrho_t^{U''_{t2}}(\varepsilon''_1)^{V''_{12}} \ldots (\varepsilon''_r)^{V''_{r2}} \end{aligned} \tag{51}$$

und

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \varrho_1^{U'_{13}} \ldots \varrho_t^{U'_{t3}}(\varepsilon''_1)^{V'_{13}} \ldots (\varepsilon''_r)^{V'_{r3}},\\ \nu_2 &= \varrho_1^{U'_{12}} \ldots \varrho_t^{U'_{t2}}(\varepsilon''_1)^{V'_{12}} \ldots (\varepsilon''_r)^{V'_{r2}}, \end{aligned} \tag{52}$$

dann nimmt (50) die Form

$$F_2(\nu_1, \nu_2) = A_1\nu_1^4+B_1\nu_2^4 = \varepsilon(\theta_3-\theta_2)\varrho_1^{U_{11}} \ldots \varrho_t^{U_{t1}} \tag{53}$$

an und infolge (34), (35), (45), (48), (49) und (51)

$$\max\left(|Nm(A_1)|,\ |Nm(B_1)|\right) < c_{52}P^{c_{53}s},\qquad \max\left(\overline{|A_1|},\ \overline{|B_1|}\right) < \exp\{c_{54}P^{c_{55}s}\}.$$

Die Gleichung (53) hat die Form (8) und der Satz aus § 2 ist hier anwendbar. Alle Parameter, die in die Abschätzung ihrer ganzwertigen Lösungen hineingehen, werden analog wie (I) abgeschätzt und wir bekommen

$$\ln\left\{\max\left(\overline{|\zeta_1\nu_1|},\ \overline{|\zeta_1\nu_2|}\right)\right\} < c_{56}P^{c_{57}s^2}, \tag{54}$$

wo ζ_1 eine gewisse Einheit aus $\boldsymbol{K}_3$ ist.

Aus (47), (49), (52) und (54) folgt

$$\ln\left\{\max\left(\overline{|\zeta_1\eta_1|},\ \overline{|\zeta_1\eta_2|}\right)\right\} < c_{58}P^{c_{59}s^2}. \tag{55}$$

Aus den Abschätzungen (44) und (55) folgern wir, daß

$$\ln\left\{\max\left(|Nm(x)|,\ |Nm(y)|\right)\right\} < c_{60}P^{c_{61}s^2}. \tag{56}$$

Da $s \leqslant \pi(P) < cP/\ln P$ wo c die Konstante von Tschebyschev ist (sieh [12] auf der Seite 850), folgt (2) aus (56). Das Theorem ist bewiesen.

4. Schlussfolgerung. Die Abschätzung der Geschwindigkeit des Wachstums von $N(\mathfrak{p})$ durch N, aber nicht durch $\max\left(\overline{|x|},\ \overline{|y|}\right)$, ist im Grunde genommen treffend, wenn $\boldsymbol{K}$ mit $\boldsymbol{Q}$ oder mit dem imaginären quadratischen Körper nicht zusammenfallen. Das Spezifikum dieser Tatsache in demselben besteht, wie es im Falle *der varallgemeinerten Thue–Mahlerschen Gleichung* ist [4]–[6].

Tatsächlich, sei δ eine gewisse Einheit aus $\boldsymbol{K}$, $\overline{|\delta|} > 1$. Multiplizieren wir die beiden Teile (10) mit $\delta^{zz'}$, wo $z > 0$ eine ganze rationale Zahl ist, $z' = mm_1 = nn_1$, dann nimmt (10) die Form

$$\left(G(\delta^{zm_1}x,\ \delta^{zn_1}y)\right) = \mathfrak{p}_1^{z_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{z_s}$$

an. Bei $z \to \infty$ ist es klar, daß

$$\max\left(\overline{|\delta^{zm_1}x|},\ \overline{|\delta^{zn_1}y|}\right) \to \infty$$

und daß $N(\mathfrak{p}_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$ begrenzt bleiben. Deshalb ist die Erforschung des Wachstums von $N(\mathfrak{p})$ bei $N \to \infty$ ganz begründet.

In der Abschätzung (2) spielt der Exponent f eine unbestimmte, in einem gewissen Maße, Rolle. Für die restlose Klarheit kann man die maximale Primzahl P mit Vorbehalt $\left(P, G(x, y)\right) \neq 1$ nehmen. In diesem Falle bekommen wir

$$P > c_{62}(\ln\ln N \ln\ln\ln N)^{1/2},\qquad N \geqslant N'_0,$$

wo c_{62}, N'_0 gleichen Sinn haben wie c_1, N_0 in (2).

Tatsächlich, zeigten wir im Laufe des Beweises des Theorems eine Methode der effektiven Analyse von ganzwertigen Lösungen der Gleichung der Form

$$G(x, y) = \alpha x^m+\beta y^n = \tau\gamma\delta_1^{w_1} \ldots \delta_s^{w_s},$$
$$(x, y)\,|\,a,\qquad (a, \delta_1 \ldots \delta_s) = 1,$$
$$m \geqslant 2,\qquad n \geqslant 3,\qquad m \neq n\,(^3),$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \ldots, \delta_s$, $a \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$; Ideale $(\delta_l) = \mathfrak{p}_l^{h_l}$ $(h_l > 0)$ die Potenzen der Primideale aus $\boldsymbol{K}$ sind, wobei $N(\mathfrak{p}_l) = p_l^{f_l}$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$; $x, y \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, $w_1 \geqslant 0, \ldots, w_s \geqslant 0$ ganze rationale Zahlen sind, τ eine Unbekannte ist, die Werte von der zur Gruppe der Einheiten des Körpers $\boldsymbol{K}$ gehören. Wenn wir alle nötigen Abschätzungen durch die Parameter der Gleichung (57) und des Körpers $\boldsymbol{K}$ machen werden, dann bekommen wir eine effek-

(3) Der homogene Fall $m = n \geqslant 5$ mit der irreduzibelen binären Form $G(x, y)$ algemeinen Aspekts wurde in [4], [5] betrachtet; der Fall, wenn $m = n \geqslant 4$, sieh Satz aus § 2.

tive Obengrenze für

$$\max\left(|Nm(x)|,\ |Nm(y)|,\ p_1^{h_1 f_1 w_1}, \ldots, p_s^{h_s f_s w_s}\right).$$

Schließlich merken wir an, daß der Satz aus § 2 in unseren Untersuchungen als eine Hilfsbetrachtung benutzt wurde. Aber sie ist als solches interessant weil die Analyse der bestimmten Klasse der Diophantschen Gleichungen auf die Analyse der ganzwertigen Lösungen der Gleichung der Form (8) zurückgeführt wird.

Literatur

[1] В. Г. Спринджук, *Эффективный анализ уравнений Туэ-Малера*; в книге: *Актуальные проблемы аналитической теории чисел*, Минск 1974.

[2] А. И. Виноградов, В. Г. Спринджук, *О представлении чисел бинарными формами*, Матем. заметки, 3, № 4 (1968), S. 369–376.

[3] E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923.

[4] С. В. Котов, *Уравнение Туэ–Малера в относительных полях*, Acta Arith. 27 (1974), S. 293–315.

[5] — *Закон повторного логарифма для бинарных форм с алгебраическими коэффициентами*, ДАН БССР, 17, № 3 (1973), S. 591–594.

[6] С. В. Котов, В. Г. Спринджук, *Эффективный анализ уравнения Туэ–Малера в относительных полях*, ДАН БССР, 17, № 5 (1973), S. 393–395.

[7] В. Г. Спринджук, *О наибольшем простом делителе бинарной формы*, ДАН БССР, 15, № 5 (1971), S. 389–391.

[8] — *Эффективизация в некоторых задачах теории диофантовых приближений*, ДАН БССР 12, № 4 (1968), S. 293–297.

[9] — *Об оценке рещений уравнения Туэ*, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, № 4 (1972), S. 712–741.

[10] *О рациональных приближениях к алгебраическим числам*, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, № 5 (1971), S. 991–1007.

[11] — *О структуре чисел, представимых бинарными формами*, ДАН БССР, 17, № 8 (1973), S. 685–688.

[12] П. Л. Чебышев, *Избранные труды*, Москва 1965.

[13] J. Coates, *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue II. The greatest prime factor of a binary form*, Acta Arith. 16 (1970), S. 399–412.

[14] — *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue III. The diophantine equation $y^2 = x^3 + k$*, ibid., S. 425–435.

[15] E. Landau, *Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen*, Nachr. Königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen, 1918, S. 79–97.

[16] K. Mahler, *On the greatest prime factor of $ax^m + by^n$*, Nieuw Archief Voor Wiskunde (3) I, (1953), S. 113–132.

[17] C. J. Parry, *The p-adic generalization of the Thue–Siegel theorem*, Acta Math. 83 (1950), S. 1–100.

[18] C. L. Siegel, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 9 (1969), S. 71–86.

Eingegangen 17. 2. 1974 (649)

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, IV

by

W. J. LeVeque (Claremont, Calif.)

1. Introduction. For real t, let $\|t\|$ denote the distance between t and the nearest integer, so that $0 \leqslant \|t\| \leqslant 1/2$, and let $x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ be real numbers which may without loss of generality be taken in the interval $[0, 1)$. Let $a_1, a_2, \ldots$ be an increasing sequence of positive integers, let $f(1), f(2), \ldots$ be numbers in $[0, 1/2]$ for which $\sum f(k) = \infty$, and put $F(n) = 2\sum_1^n f(k)$. Finally, define $N_n(x)$ to be the number of positive integers $k \leqslant n$ for which

$$\|a_k x - \alpha_k\| < f(k). \tag{1}$$

The problem addressed in this sequence of papers is that of finding conditions under which

$$N_n(x) \sim F(n) \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{2}$$

this being the rate of growth of $N_n(x)$ one would expect on probabilistic grounds for "most" x [6]. Relation (2) does not hold for almost all (a.a.) x, for some pairs of sequences $\{a_k\}$, $\{f(k)\}$ as described above [2], but a number of conditions on $\{a_k\}$ and $\{f(k)\}$ together are known which guarantee (2) for a.a. x. (See Part III [6] and its bibliography, and also see [7], [8], for example. For a complete list of the literature in this area, see my *Reviews in Number Theory*, vol. 3, Section J24, American Mathematical Society, 1974.)

In the first part of the present paper it is shown that if $F(n) \gg n^a$ $(1/2 < a < 1)$ then (2) holds for a.a. x no matter what $\{a_k\}$ may be.

In the second part the case $a_k = k$, $\alpha_k = 0$, $f(k) = c/k$ (c a positive constant) is studied, so that $N_n(x)$ now counts the number of solutions p, q of the inequality

$$|qx - p| < c/q, \quad q \leqslant n \tag{3}$$

and one would expect $N_n(x) \sim 2c\log n$. This is true for almost all but not for all x, and either of the two quantities $N_n(x)$ and $\log n$ may be of