ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

Über Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen in algebraischen Zahlkörpern

von

JÜRGEN HINZ (Marburg)

1. Im Jahre 1969 bewies H. L. Montgomery [12] neue Abschätzungen für den Ausdruck

$$\sum_{q\leqslant Q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma, T, \chi), \qquad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ T \geqslant 2,\ Q \geqslant 1,$$

wobei $\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}$ die Summe über alle primitiven Charaktere χ modulo q bezeichnet, und $N(\sigma, T, \chi)$ die Anzahl aller Nullstellen ϱ der L-Funktion

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \qquad s = \sigma + it,$$

im Bereich $\sigma \leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant 1$ und $|\operatorname{Im}\varrho| \leqslant T$ ist.

Montgomery benutzte im wesentlichen gewisse Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome

$$\sum_{n=1}^{N} \chi(n) a_n n^{-s}, \qquad a_n \in \boldsymbol{C},$$

die er mit einer Methode von Halász bewies [11].

Er erhielt folgende Resultate:

$$\sum_{q\leqslant Q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2T)^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} (\log QT)^{13} \quad \text{für } \tfrac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \tfrac{4}{5}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2T)^{2(1-\sigma)/\sigma} (\log QT)^{13} \quad \text{für } \tfrac{4}{5} \leqslant \sigma \leqslant 1. \tag{1.2}$$

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Untersuchungen auf algebraische Zahlkörper übertragen werden.

Dabei folge ich im wesentlichen der Beweismethode von Montgomery. Unter Benutzung eines Satzes von Bombieri ([13], Lemma 1.5) kann man bei der Herleitung der Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome auf die Methode von Halász verzichten ([13], Chapter 8).

Im folgenden sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n und der Diskriminante d über dem Körper der rationalen Zahlen. Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ aus K bedeute $N\mathfrak{a}$ seine Norm. Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo einem festen Ideal $\mathfrak{q}$ aus K.

Die Heckesche Zetafunktion ist definiert für $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ durch

$$\zeta_K(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s},$$

wobei über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ aus K summiert wird.

$N(\sigma, T, \chi)$ bezeichne wie oben die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta_K(s,\chi)$ im Rechteck $\sigma \leqslant \beta \leqslant 1$, $|\gamma| \leqslant T$.

Es sollen Abschätzungen für den Ausdruck

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi), \qquad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ T \geqslant 2$$

angegeben werden. Dabei wird über alle ganzen Ideale $\mathfrak{q}$ aus K mit $N\mathfrak{q} \leqslant Q$ und alle primitiven Charaktere χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ summiert.

Man erhält unter anderem die folgenden Sätze:

Satz A. *Es seien $Q \geqslant 1$, $T \geqslant 2$ reelle Zahlen. Dann gilt*

(a) *im Bereich $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1 - 1/2n$, $n \geqslant 2$*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll \{Q^2 T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10};$$

(b) *im Bereich $1 - 1/2n \leqslant \sigma \leqslant 1$, $n \geqslant 1$*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll \{Q^2 T^{b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

mit

$$\frac{2n+1}{3} \leqslant b = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{(n+1)\sigma - n}{4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2} \leqslant n$$

oder

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll T^{\frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b} \{Q^2 T^{b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

mit

$$\frac{n}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \leqslant b = \frac{(2-\sigma)(n - 5 + 6\sigma + n^{-1})}{6\sigma - 3} \leqslant \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n}, \qquad n \geqslant 2$$

und

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \qquad n \geqslant 2.$$

Satz B. *Es seien $Q \geqslant 1$, $T \geqslant 2$ reelle Zahlen. Dann gilt im Bereich $\frac{3}{4} \leqslant \sigma \leqslant 1$, $n \geqslant 1$:*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2 T^n)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} (\log QT)^c,$$

wobei

$$c = \max\left\{\frac{4(\sigma+1)}{2\sigma - 1}, \frac{3n - \sigma(3n-2) + 7}{\sigma}\right\}.$$

Alle auftretenden $\ll$-Konstanten hängen nur vom Körper K ab.

M. N. Huxley [4] veröffentlichte 1971 Abschätzungen für den Term

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \frac{N(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N'(\sigma + it, \lambda, \chi), \qquad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

$N'(\sigma + it, \lambda, \chi)$ ist dabei die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ der Heckeschen Zetafunktion mit dem Größencharakter λ im Bereich $\sigma \leqslant \beta \leqslant 1$, $t \leqslant \gamma \leqslant t + 1$.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit lassen sich nicht unmittelbar mit den Ergebnissen von Huxley vergleichen, denn es werden hier größere Nullstellenbereiche betrachtet. Summiert man jedoch bei Huxley über die Nullstellenbereiche, dann ergibt sich z.B. die Abschätzung:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \frac{N(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll T(Q^2 + Q^{\frac{5}{3}} T^{\frac{n}{3}})^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{4-2\sigma}.$$

Die auftretende $\ll$-Konstante hängt nur vom Körper K ab.

Diese Arbeit wurde vom Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg als Dissertation angenommen. Herrn Prof. Dr. W. Schaal, der dieses Thema anregte, danke ich für seine vielseitige Unterstützung.

2. Zunächst sollen, der Arbeit von Montgomery [11] folgend, Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome in algebraischen Zahlkörpern bewiesen werden.

Es sei G die engere Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ der Ordnung $h(\mathfrak{q})$ und χ einer der $h(\mathfrak{q})$ Charaktere der abelschen Gruppe G. Man betrachtet Polynome

$$P(s,\chi) = \sum_{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant N} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s},$$

wobei die Koeffizienten $c(\mathfrak{a})$ beliebige komplexe Zahlen sind, und $s=\sigma+it$ eine komplexe Variable ist.

Es werden Ausdrücke der Form

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q}\ \sum^{*}_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sum_{l=1}^{R_\chi}|P(s_{\chi,l},\chi)|^2 \tag{2.1}$$

abgeschätzt. Dabei wird über alle ganzen Ideale $\mathfrak{q}$ aus K mit $N\mathfrak{q}\leqslant Q$ und alle primitiven Charaktere χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ summiert. Die innere Summation wird in Satz 2.1 angegeben.

In diesem und den folgenden Paragraphen hängen alle auftretenden $\ll$-Konstanten nur vom Körper K ab.

Lemma 2.1. *Für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ und für $\sigma\leqslant -1$ gilt:*

$$\zeta_K(\sigma+it,\chi)\ll\left\{\frac{d}{(2\pi)^n}N\mathfrak{q}\cdot\big(3(1-\sigma)(|t|+1)\big)^n\right\}^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Beweis. Für $\sigma=\operatorname{Re}s\leqslant -1$ folgt nach ([8], Satz LXVI):

$$\zeta_K(s,\chi)=\zeta_K\big(1-(1-s),\chi\big)\ll\left(\frac{d}{(2\pi)^n}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}(N\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}-\sigma}|\Gamma(1-s)|^n e^{n\frac{\pi}{2}|t|}.$$

Ferner erhält man nach ([14], Anhang, Satz 6.1) wegen $\operatorname{Re}(1-s)\geqslant 2$:

$$|\Gamma(1-s)|\ll|e^{(\frac{1}{2}-s)\log(1-s)}|\,e^{\sigma-1}. \tag{2.2}$$

Für $|t|\leqslant 1$ ergibt sich

$$|\Gamma(1-s)|\ll\{2(1-\sigma)\}^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Für $t>1$ gilt

$$\log(1-s)=\log(-it)+\int_{-it}^{(1-\sigma)-it}\frac{dz}{z}$$

$$=\log t-\frac{\pi}{2}i+I\quad\text{mit}\quad |I|\leqslant\log 3(1-\sigma).$$

Somit folgt mit (2.2):

$$|\Gamma(1-s)|\ll\{3(1-\sigma)t\}^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{-\frac{\pi}{2}t}.$$

Analog erhält man für $t<-1$:

$$|\Gamma(1-s)|\ll\{3(1-\sigma)(-t)\}^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{\frac{\pi}{2}t}.$$

Lemma 2.2. *Es sei*

$$P(s,\chi)=\sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N}c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s},$$

wobei χ ein beliebiger Charakter modulo $\mathfrak{q}$ ist. $\mathfrak{M}$ sei eine endliche Menge von Tripeln $(\mathfrak{q},\chi,s)=(\mathfrak{q},\chi \bmod \mathfrak{q},s)$ und α eine beliebige reelle Zahl.

Dann gilt:

$$\sum_{(\mathfrak{q},\chi,s)\in\mathfrak{M}}|P(s,\chi)|^2 \tag{2.3}$$

$$\leqslant\Big\{\sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N}|c(\mathfrak{a})|^2\big(l(\mathfrak{a})\big)^{-1}(N\mathfrak{a})^{-2\alpha}\Big\}\max_{(\mathfrak{q},\chi,s)\in\mathfrak{M}}\sum_{(\mathfrak{q}',\chi',s')\in\mathfrak{M}}|K(\bar{s}+s'-2\alpha,\bar{\chi}\chi')|,$$

wobei

$$K(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}}l(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}.$$

Dabei sind die reellen Zahlen $l(\mathfrak{a})\geqslant 0$ so zu wählen, daß

$$\sum_{\mathfrak{a}}l(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{2\alpha-2\sigma}$$

für alle $(\mathfrak{q},\chi,\sigma+it)\in\mathfrak{M}$ konvergiert und $l(\mathfrak{a})>0$ für $c(\mathfrak{a})\neq 0$ ist. $\bar{\chi}\chi'$ ist ein Charakter modulo

$$[\mathfrak{q},\mathfrak{q}']=\frac{\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}'}{(\mathfrak{q},\mathfrak{q}')}.$$

Beweis. Lemma 2.2 ist eine unmittelbare Anwendung eines Satzes von Bombieri. Man setze dazu in ([13], Lemma 1.5):

$$\xi=\big\{(N\mathfrak{a})^{-\alpha}c(\mathfrak{a})\big(l(\mathfrak{a})\big)^{-1/2}\big\},\qquad\text{wobei}\qquad c(\mathfrak{a})=0\ \text{für}\ N\mathfrak{a}>N,$$

$$\varphi_r=\big\{\big(l(\mathfrak{a})\big)^{1/2}\bar{\chi}(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{\alpha-\bar{s}}\big\}.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2 lassen sich Abschätzungen für den Ausdruck (2.1) beweisen. Dabei sind die reellen Zahlen $l(\mathfrak{a})$ in (2.3) geeignet zu wählen.

Es soll zunächst eine wichtige Abschätzung für $K(s,\chi)$ angegeben werden, die beim Beweis des späteren Hauptsatzes 2.1 wesentlich benutzt wird.

Lemma 2.3. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$.*

Ferner sei $s=\sigma+it$, $\sigma\geqslant 0$,

$$l(\mathfrak{a})=e^{-\left(\frac{N\mathfrak{a}}{2N}\right)^r}-e^{-\left(\frac{N\mathfrak{a}}{N}\right)^r}\quad\textit{mit}\quad r=\log N$$

und

$$N\mathfrak{q}(|t|+1)^n\leqslant\frac{(2\pi)^n}{d}(6n)^{-n}N(\log N)^{-3n}.$$

Dann gilt:

$$|K(s,\chi)| \ll 1+\varepsilon(\chi) N e^{-|t|(\log N)^{-1}},$$

wobei

$$\varepsilon(\chi) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \chi \textit{ Hauptcharakter modulo } \mathfrak{q}, \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Beweis. 1) Für $r = \log N \ll 1$ folgt die Behauptung wegen

$$|K(s,\chi)| \leqslant \sum_{\mathfrak{a}} l(\mathfrak{a}) \ll 1.$$

2) Für $\sigma \geqslant 2$ erhält man

$$|K(s,\chi)| \leqslant \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-2} \ll 1.$$

3) Es sei nun $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $r \geqslant 6$; dann gilt nach ([14], Anhang, Lemma 3.2):

$$K(s,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K(s+w,\chi)\,\Gamma\Big(\frac{w}{r}+1\Big)\frac{(2N)^w-N^w}{w}\,dw.$$

Es wird der Residuensatz auf das Integral und das Rechteck R mit den Ecken $2\pm iT$, $-r/2\pm iT$ angewendet.

Die Integrale über die Horizontalstücke streben für $T\to\infty$ gegen 0.

Der Integrand ist in R regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $w = 1-s$ mit dem Residuum

$$\ll \frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}\left|\Gamma\Big(\frac{1-s}{r}+1\Big)\right|\left|\frac{(2N)^{1-s}-N^{1-s}}{1-s}\right|,$$

falls χ Hauptcharakter modulo $\mathfrak{q}$ ist.

Somit ergibt sich

(2.4) $\quad |K(s,\chi)|$

$$\ll \varepsilon(\chi)N\left|\Gamma\Big(\frac{1-s}{r}+1\Big)\right| + \left|\int_{-r/2-i\infty}^{-r/2+i\infty} \zeta_K(s+w,\chi)\,\Gamma\Big(\frac{w}{r}+1\Big)\frac{(2N)^w-N^w}{w}\,dw\right|.$$

Mit [5], Satz 229, folgt

$$\left|\Gamma\Big(\frac{1-s}{r}+1\Big)\right| \ll e^{-|t|(\log N)^{-1}}$$

und

$$|\Gamma(\tfrac{1}{2}+iu)| \ll e^{-\frac{\pi}{2}|u|}.$$

Es sei jetzt χ ein beliebiger Charakter mod $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ der Führer von χ und χ_1 der zugehörige primitive Charakter mod $\mathfrak{q}_1$. Sei $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{q}_2$; dann folgt mit Lemma 2.1 für $\sigma = \operatorname{Re} s \leqslant -1$:

$$\zeta_K(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}_2}\big(1-\chi_1(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}\big)\zeta_K(s,\chi_1)$$
$$\ll \left\{\frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}\big(3(1-\sigma)(|t|+1)\big)^n\right\}^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich das Integral I in (2.4) folgendermaßen abschätzen:

$$|I| \ll \left\{\frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}\big(3(1-\sigma+r/2)\big)^n\right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (|t+u|+1)^{n\left(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}\right)} e^{-\frac{|u|}{r}}\left|\frac{r}{2}+iu\right|^{-1} du$$
$$\ll \left\{\frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}\big(3(1-\sigma+r/2)\big)^n\right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}}\{2(|t|+1)\}^{n\left(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_{0}^{\infty} u^{n\left(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}\right)-1} e^{-\frac{u}{r}} du$$
$$\ll \left\{\frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}(6n)^n r^{3n}(|t|+1)^n\right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}} e^{-\frac{n}{2}\log N} \ll 1.$$

Lemma 2.4. *Es seien a und b beliebige reelle Zahlen. $\mathfrak{M}$ bezeichne eine endliche Menge von Tripeln $(\mathfrak{q},\chi,s_\chi)$, $s_\chi = \sigma_\chi+it_\chi$, wobei χ primitive Charaktere der engeren Idealklassengruppen modulo $\mathfrak{q}$, $N\mathfrak{q}\leqslant Q$, sind. Ferner sei*

$$\sigma_\chi \geqslant a, \quad b \leqslant t_\chi \leqslant b+1$$

für alle $(\mathfrak{q},\chi,s_\chi)\in\mathfrak{M}$.

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{q},\chi \\ (\mathfrak{q},\chi,s_\chi)\in\mathfrak{M}}} \left|\sum_{N\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2N} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s_\chi}\right|^2 \ll (Q^2+N)\sum_{N\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2N}|c(\mathfrak{a})|^2(N\mathfrak{a})^{-2a}.$$

Beweis. Zunächst folgt nach [3], Theorem 1:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\left|\sum_{N\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2N} u(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})\right|^2 \ll (Q^2+N)\sum_{N\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2N}|u(\mathfrak{a})|^2,$$

wobei die Koeffizienten $u(\mathfrak{a})$ beliebige komplexe Zahlen sind. Die Behauptung von Lemma 2.4 ergibt sich hieraus durch partielle Summation. Man kann o.B.d.A. $0 \leqslant t_\chi \leqslant 1$ annehmen. Andernfalls ersetze man die Koeffizienten $c(\mathfrak{a})$ durch $c(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-it}$.

Nach diesen Vorbereitungen kann jetzt einer der Hauptsätze dieses Kapitels formuliert und bewiesen werden.

Für den Körper der rationalen Zahlen wurde der entsprechende Satz von Montgomery in [11] hergeleitet.

Satz 2.1. *Für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppen modulo $\mathfrak{q}$, $N\mathfrak{q} \leqslant Q$, sei R_χ eine natürliche Zahl. Ferner seien*

$$s_{\chi,l} = \sigma_{\chi,l} + it_{\chi,l}$$

für $1 \leqslant l \leqslant R_\chi$ komplexe Zahlen mit

$$\delta := \min_{\mathfrak{q},\chi,j\neq k} |t_{\chi,j} - t_{\chi,k}| > 0.$$

Man setze

$$T := 1 + \max_{\mathfrak{q},\chi,l} t_{\chi,l} - \min_{\mathfrak{q},\chi,l} t_{\chi,l}, \qquad \sigma_0 := \min_{\mathfrak{q},\chi,l} \sigma_{\chi,l}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{R_\chi} \Big| \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s_{\chi,l}}\Big|^2$$
$$\ll \{Q^2T(\log N)^{3n} + Q^{\frac{2r}{n}} T^r N^{1-\frac{r}{n}} (\log N)^{3r} + N\}\{1+\delta^{-1}\log N\}\log N \times$$
$$\times \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0},$$

wobei $1 \leqslant r \leqslant n$ eine reelle Zahl ist.

Beweis. Man unterteile das Intervall $[1, N]$ in $\ll \log N$ Teilintervalle der Form $[m, 2m]$ und setze $c(\mathfrak{a}) = 0$ für $N\mathfrak{a} > N$. Es genügt dann zu zeigen:

$$S := \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{R_\chi} \Big| \sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s_{\chi,l}}\Big|^2$$
$$\ll \{Q^2T(\log M)^{3n} + Q^{\frac{2r}{n}} T^r M^{1-\frac{r}{n}} (\log M)^{3r} + M\}\{1+\delta^{-1}\log M\} \times$$
$$\times \sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}.$$

Wendet man Lemma 2.2 an mit

$$a = \sigma_0, \qquad N = 2M,$$
$$l(\mathfrak{a}) = e^{-\left(\frac{N\mathfrak{a}}{2N}\right)^{\log N}} - e^{-\left(\frac{N\mathfrak{a}}{N}\right)^{\log N}}$$

und

$$c(\mathfrak{a}) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant M,$$

dann folgt

$$S \ll \sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0} \times$$
$$\times \max_{\mathfrak{q},\chi,l} \sum_{N\mathfrak{q}'\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi' \bmod \mathfrak{q}'} \sum_{l'=1}^{R_{\chi'}} |K(\bar{s}_{\chi,l} + s_{\chi',l'} - 2\sigma_0, \bar{\chi}\chi')|,$$

wobei

$$K(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} l(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}.$$

1. Fall:

$$Q^2T^n \leqslant \frac{(2\pi)^n}{d}(6n)^{-n} 2M(\log 2M)^{-3n}.$$

$K(\bar{s}_{\chi,l} + s_{\chi',l'} - 2\sigma_0, \bar{\chi}\chi')$ läßt sich mit Hilfe von Lemma 2.3 abschätzen. Man erhält

$$K(\bar{s}_{\chi,l} + s_{\chi',l'} - 2\sigma_0, \bar{\chi}\chi') \ll 1 + \varepsilon(\bar{\chi}\chi') M e^{-|t_{\chi',l'} - t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}}$$

und folglich

$$S \ll \sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0} \Big\{ \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{R_\chi} 1 +$$
$$+ \max_{\mathfrak{q},\chi,l} \sum_{N\mathfrak{q}'\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi' \bmod \mathfrak{q}'} \sum_{l'=1}^{R_{\chi'}} \varepsilon(\bar{\chi}\chi') M e^{-|t_{\chi',l'} - t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}} \Big\}.$$

χ und χ' sind primitive Charaktere mod $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$. Man kann χ, χ' nach dem Modul $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}'$ erklären.

Falls $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ und $\chi = \chi'$ gilt, dann ist $\bar{\chi}\chi'$ Hauptcharakter mod $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}'$. Sei umgekehrt $\chi(\mathfrak{a}) = \chi'(\mathfrak{a})$ für alle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}\mathfrak{q}') = 1$. Die primitiven Charaktere χ mod $\mathfrak{q}$ und χ' mod $\mathfrak{q}'$ liefern dann denselben Charakter mod $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$. Da jedoch jeder Charakter mod $\mathfrak{w}$ primitiver Charakter modulo genau eines Teilers von $\mathfrak{w}$ ist, folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ und $\chi = \chi'$.

Es gilt also $\varepsilon(\bar{\chi}\chi') = 1$ genau dann, wenn $\chi = \chi'$ ist. Somit ergibt sich

$$S \ll \sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0} \Big\{ \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{R_\chi} 1 +$$
$$+ M \max_{\mathfrak{q},\chi,l} \sum_{l'=1}^{R_\chi} e^{-|t_{\chi,l'} - t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}} \Big\}.$$

Es sei $t_{\chi,1} < t_{\chi,2} < \ldots < t_{\chi,R_\chi}$; dann folgt nach [7] und [2] unter Berücksichtigung von

$$R_\chi \leqslant \delta^{-1}(t_{\chi,R_\chi}-t_{\chi,1})+1 \leqslant T(1+\delta^{-1}):$$

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sum_{l=1}^{R_\chi} 1 \ll Q^2 T(1+\delta^{-1}).$$

Für $R_\chi > 1$ gilt:

$$\sum_{l'=1}^{R_\chi} e^{-|t_{\chi,l'}-t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}} = \sum_{l'=1}^{l} e^{-|t_{\chi,l'}-t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}} + \sum_{l'=l+1}^{R_\chi} e^{-|t_{\chi,l'}-t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}}.$$

Die letzten beiden Summen lassen sich wie folgt abschätzen:

$$\sum_{l'=1}^{l} e^{-|t_{\chi,l'}-t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}} \leqslant 1+\sum_{l'=1}^{l-1} \frac{1}{t_{\chi,l'+1}-t_{\chi,l'}} \int_{t_{\chi,l'}}^{t_{\chi,l'+1}} e^{-(t_{\chi,l}-t)(\log 2M)^{-1}}\,dt$$
$$\ll 1+\delta^{-1}\log M.$$

Ebenso erhält man:

$$\sum_{l'=l+1}^{R_\chi} e^{-|t_{\chi,l'}-t_{\chi,l}|(\log 2M)^{-1}} \ll \delta^{-1}\log M.$$

Insgesamt ergibt sich schließlich im 1. Fall:

$$S \ll (Q^2T+M)(1+\delta^{-1}\log M)\sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}.$$

2. Fall:

$$2^nQ^2 \leqslant \frac{(2\pi)^n}{d}(6n)^{-n}2M(\log 2M)^{-3n} \leqslant Q^2T^m.$$

Man setze

$$(H+1)^n = \frac{(2\pi)^n}{d}(6n)^{-n}2M(\log 2M)^{-3n}Q^{-2};$$

dann folgt

$$1 \leqslant H \leqslant T-1 < T.$$

Man unterteile das Intervall $I=(\min t_{\chi,l}, \max t_{\chi,l})$ in $\ll TH^{-1}$ Teilintervalle der Länge $\leqslant H$.

Wegen

$$Q^2(H+1)^n = \frac{(2\pi)^n}{d}(6n)^{-n}2M(\log 2M)^{-3n}$$

kann man Fall 1 auf jedes der Teilintervalle anwenden und erhält

$$S \ll \frac{T}{H}(Q^2H+M)(1+\delta^{-1}\log M)\sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2(N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}$$
$$\ll \left(Q^2T+Q^{\frac{2r}{n}}T^rM^{1-\frac{r}{n}}(\log M)^{3r}\right)(1+\delta^{-1}\log M)\sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2(N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0},$$

wobei $1\leqslant r\leqslant n$ eine beliebige reelle Zahl ist.

3. Fall:

$$2^nQ^2 \geqslant \frac{(2\pi)^n}{d}(6n)^{-n}2M(\log 2M)^{-3n}.$$

Man unterteile das Intervall $I=(\min t_{\chi,l}, \max t_{\chi,l})$ in $\ll T\varrho^{-1}$ Teilintervalle I_h der Länge

$$\leqslant \varrho = \min(1, \delta/2).$$

Für jeden primitiven Charakter $\chi \bmod \mathfrak{q}$ liegt bei festem $\mathfrak{q}$ wegen

$$\delta = \min_{\mathfrak{q},\chi,j\neq k} |t_{\chi,j}-t_{\chi,k}|$$

in jedem Teilintervall I_h höchstens ein $t_{\chi,l}$ und außerdem existiert wegen $\varrho\leqslant 1$ eine Zahl b mit

$$b\leqslant t_{\chi,l}\leqslant b+1 \quad \text{für alle } t_{\chi,l}\in I_h.$$

Es gilt:

$$\varrho^{-1} \ll 1+\delta^{-1}.$$

Nach Lemma 2.4 folgt somit

$$S \ll Q^2T(\log M)^{3n}(1+\delta^{-1})\sum_{M\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2M} |c(\mathfrak{a})|^2(N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2 lassen sich auch andere Abschätzungen für Ausdrücke der Form (2.1) beweisen. Sie liefern obere Schranken für die Anzahl der Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, s)$, für die

$$\Big|\sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}\Big| \geqslant V$$

gilt.

Zum Beweis der Hauptsätze benötigt man die folgenden Lemmata.

Lemma 2.5. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$, der nicht der Hauptcharakter ist.*

Dann gilt:

$$\zeta_K(1+it,\chi) \ll \log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\}.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch partielle Summation unter Benutzung eines von Landau [9] auf Zahlkörper verallgemeinerten Lemmas von Pólya–Vinogradov.

LEMMA 2.6. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ und $s = \sigma + it$ eine komplexe Zahl.*

Dann gilt im Streifen $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$:

$$\zeta_K(s,\chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)} \ll (N\mathfrak{q})^{1/2}(|t|+1)^{n/2+\varepsilon(\chi)}\log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\},$$

wobei

$$\varepsilon(\chi) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \chi = \chi_0 \textit{ Hauptcharakter} \bmod \mathfrak{q}, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die Funktion $\zeta_K(s,\chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)}$ ist im Streifen $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ regulär und auf der Geraden $\sigma = 2$ gilt:

$$\zeta_K(s,\chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)} \ll (|t|+1)^{\varepsilon(\chi)}.$$

Es sei zunächst $\chi = \chi_0$; dann erhält man für $\sigma = 0$ unter Benutzung der Funktionalgleichung für $\zeta_K(s)$ und ([6], 34.):

$$\zeta_K(it,\chi_0) \ll (N\mathfrak{q})^{1/2}|t|^{n/2}\log(|t|+2).$$

Falls $\chi \neq \chi_0$ ist, dann verfährt man wie im Beweis zu Lemma 2.3. Es ergibt sich mit Lemma 2.5:

$$\zeta_K(it,\chi) \ll (N\mathfrak{q})^{1/2}(|t|+1)^{n/2}\log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\}.$$

Schließlich gilt im Streifen $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$

$$|\zeta_K(s,\chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)}| \leqslant c_1 e^{c_2|t|},$$

wobei c_1, c_2 von t und σ unabhängige positive Konstanten sind.

Nach einem Satz von Phragmén–Lindelöf ([14], Anhang, Satz 7.2) folgt die Behauptung.

LEMMA 2.7. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ und $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 0$, eine komplexe Zahl.*

Dann gilt:

$$S_1 := \sum_{\mathfrak{a}} e^{-N\mathfrak{a}/N}\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}$$
$$\ll \{N\mathfrak{q}(|t|+1)^n\}^{1/2}\log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\} + \varepsilon(\chi)Ne^{-|t|}.$$

Beweis. 1) Für $\sigma \geqslant 2$ folgt $S_1 \ll 1$.

2) Es sei $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$; dann gilt zunächst:

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K(s+w,\chi)\Gamma(w)N^w\,dw.$$

a) Falls $|t| \leqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $\chi = \chi_0$, dann folgt nach dem Residuensatz

$$S_1 \ll Ne^{-|t|}.$$

b) Andernfalls wende man den Residuensatz auf das Rechteck R mit den Ecken $2 \pm iT$ und $\pm iT$ an. Man ändere den geradlinigen Integrationsweg von iT bis $-iT$ ab durch einen kleinen Halbkreis um $w = 0$ und, falls $\operatorname{Re} s = 1$ und $\chi = \chi_0$, durch einen kleinen Halbkreis um die Singularität bei $w = 1-s$ und lasse deren Radien gegen Null streben.

Der Integrand $\zeta_K(s+w,\chi)\Gamma(w)N^w$ ist in R regulär bis auf einfache Pole bei $w = 0$ und, falls χ Hauptcharakter $\bmod\, \mathfrak{q}$ ist, bei $w = 1-s$ mit den Residuen

$$\ll |\zeta_K(s,\chi)|$$

und

$$\ll \frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}N|\Gamma(1-s)| \ll Ne^{-|t|}.$$

Man erhält mit Lemma 2.6:

$$S_1 \ll (N\mathfrak{q})^{1/2}(|t|+1)^{n/2}\log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\} + \varepsilon(\chi)Ne^{-|t|} +$$
$$+ (N\mathfrak{q})^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(|t+u|+1)^{n/2}\log\{N\mathfrak{q}(|t+u|+2)\}|\Gamma(iu)|\,du$$
$$\ll (N\mathfrak{q})^{1/2}(|t|+1)^{n/2}\log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\} + \varepsilon(\chi)Ne^{-|t|}.$$

LEMMA 2.8. *Es sei $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion und*

$$m(a,T) = \max_{\substack{\sigma \geqslant a \\ |t| \leqslant T \\ |s-1| \geqslant 1}} |\zeta_K(s)|, \quad s = \sigma + it.$$

Dann gilt:

$$\sum_{\mathfrak{a}}\left(e^{-\frac{N\mathfrak{a}}{2N}} - e^{-\frac{N\mathfrak{a}}{N}}\right)(N\mathfrak{a})^{-it} \ll N^r m(r, 2|t|) + Ne^{-|t|},$$

wobei $0 \leqslant r \leqslant 1$ eine beliebige reelle Zahl ist.

Beweis. Zunächst gilt:

$$\sum_{\mathfrak{a}}\left(e^{-\frac{N\mathfrak{a}}{2N}} - e^{-\frac{N\mathfrak{a}}{N}}\right)(N\mathfrak{a})^{-it} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\zeta_K(w+it)\Gamma(w)\left((2N)^w - N^w\right)dw.$$

Die Behauptung ergibt sich, wenn man den Residuensatz auf das Rechteck mit den Ecken $2 \pm iT$ und $r \pm iT$ anwendet.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich jetzt die von Montgomery in [13], Chapter 8, für den Körper der rationalen Zahlen bewiesenen Sätze unmittelbar auf Zahlkörper übertragen.

SATZ 2.2. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge von Tripeln $(\mathfrak{q}, \chi, s) = (\mathfrak{q}, \chi \bmod \mathfrak{q}, s)$, wobei χ primitive Charaktere der engeren Idealklassengruppen modulo $\mathfrak{q}$, $N\mathfrak{q} \leqslant Q$, sind. $|\mathfrak{M}|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}$. Ferner sei*

$$\sigma_0 = \min_{(\mathfrak{q},\chi,s)\in\mathfrak{M}} \sigma, \quad s = \sigma + it,$$

und $|t-t'| \geqslant \delta > 0$ für verschiedene Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, \sigma+it)$ und $(\mathfrak{q}, \chi, \sigma'+it')$ aus $\mathfrak{M}$.

Schließlich seien $T_0, T \geqslant 2$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + T$$

für alle Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, \sigma+it) \in \mathfrak{M}$.

Dann gilt:

$$S_2 := \sum_{(\mathfrak{q},\chi,s)\in\mathfrak{M}} \Big| \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}\Big|^2$$
$$\ll \{(1+\delta^{-1})N + |\mathfrak{M}|QT^{n/2}\log QT\} \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}.$$

Beweis. Man wende Lemma 2.2 an mit

$$a = \sigma_0, \quad l(\mathfrak{a}) = e^{-N\mathfrak{a}/N}.$$

Es folgt:

$$S_2 \ll \Big(\sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}\Big) \max_{(\mathfrak{q},\chi,s)\in\mathfrak{M}} \sum_{(\mathfrak{q}',\chi',s')\in\mathfrak{M}} |K(\bar{s}+s'-2\sigma_0, \bar{\chi}\chi')|,$$

wobei

$$K(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} e^{-N\mathfrak{a}/N}\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}.$$

Verfährt man wie im Beweis zu Satz 2.1, dann ergibt sich mit Lemma 2.7 die Behauptung.

KOROLLAR. *Die Voraussetzungen von Satz 2.2 seien erfüllt; dann gilt:*

$$S_2 \ll (1+\delta^{-1})(Q^3T^{n/2+1}\log QT + N) \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.2 wegen

$$|\mathfrak{M}| \ll Q^2T(1+\delta^{-1}).$$

SATZ 2.3. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge von komplexen Zahlen $s = \sigma+it$; $|\mathfrak{M}|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}$. Ferner sei*

$$\sigma_0 = \min_{s\in\mathfrak{M}} \sigma$$

und $|t-t'| \geqslant \delta > 0$ für verschiedene Elemente $s = \sigma+it$ und $s' = \sigma'+it'$ aus $\mathfrak{M}$.

Schließlich seien $T_0, T \geqslant 2$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + T$$

für alle $s = \sigma+it$ aus $\mathfrak{M}$.

Dann gilt:

$$\sum_{s\in\mathfrak{M}} \Big| \sum_{N\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2N} c(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}\Big|^2$$
$$\ll \{N(1+\delta^{-1}) + |\mathfrak{M}|N^r m(r, 4T)\} \sum_{N\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant 2N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0},$$

wobei

$$m(a,T) = \max_{\substack{\sigma\geqslant a\\ |t|\leqslant T\\ |s-1|\geqslant 1}} |\zeta_K(s)| \quad \textit{und} \quad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Beweis. Man setze

$$l(\mathfrak{a}) = e^{-N\mathfrak{a}/2N} - e^{-N\mathfrak{a}/N};$$

dann ergibt sich die Behauptung mit Lemma 2.2, Lemma 2.8 und partieller Summation.

3. Es sollen in diesem Paragraphen erste Anwendungen der Sätze 2.2 und 2.3 angegeben werden.

Die Resultate werden später benutzt, um Abschätzungen für die Anzahl der Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen in gewissen Bereichen zu beweisen.

SATZ 3.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt. Außerdem sei V eine reelle Zahl mit*

$$V^2 \geqslant AQT^{n/2}\log QT \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}, \tag{3.1}$$

wobei A eine genügend große, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es sei ferner

$$\Big| \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}\Big| \geqslant V$$

für alle Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, s) \in \mathfrak{M}$.

Dann gilt:

$$|\mathfrak{M}| \ll (1+\delta^{-1})NV^{-2} \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}. \tag{3.2}$$

Beweis. Aus Satz 2.2 erhält man zunächst

$$V^2|\mathfrak{M}| \ll \{(1+\delta^{-1})N + |\mathfrak{M}|QT^{n/2}\log QT\} \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}$$

und somit

$$V^2|\mathfrak{M}| \leqslant c\{(1+\delta^{-1})N + |\mathfrak{M}|QT^{n/2}\log QT\} \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0},$$

wobei c eine nur vom Körper K abhängige Konstante ist. Man wähle $A \geqslant 2c$; dann folgt wegen (3.1):

$$V^2|\mathfrak{M}| \leqslant c(1+\delta^{-1})N \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0} + \tfrac{1}{2} V^2|\mathfrak{M}|.$$

Unter Verwendung von Satz 2.3 kann man ebenfalls die Abschätzung (3.2) beweisen. Hierbei lautet die zusätzliche Voraussetzung

$$V^2 \geqslant BN^r m(r, 4T) \sum_{N<N\mathfrak{a}\leqslant 2N} |c(\mathfrak{a})|^2 (N\mathfrak{a})^{-2\sigma_0}, \tag{3.3}$$

wobei B eine hinreichend große, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Für den Körper der rationalen Zahlen wurde mit den entsprechenden Resultaten die Abschätzung (1.2) von Montgomery in [12] hergeleitet.

4. In diesem Paragraphen wird eine Abschätzung für den Ausdruck

$$S := \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{R_\chi} |\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\chi,l}, \chi)|$$

bewiesen. Man benötigt dazu die approximative Funktionalgleichung für die Heckesche Zetafunktion, die Huxley in [3] beweist.

Satz 4.1. *Es seien $Q \geqslant 1$, $T \geqslant 2$ reelle Zahlen. Für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppen modulo $\mathfrak{q}$, $N\mathfrak{q} \leqslant Q$, seien $t_{\chi,l}$, $l = 1, \ldots, R_\chi$, reelle Zahlen mit der Eigenschaft*

$$-T \leqslant t_{\chi,1} < t_{\chi,2} < \ldots < t_{\chi,R_\chi} \leqslant T,$$

wobei $t_{\chi,l+1} - t_{\chi,l} \geqslant \delta > 0$ für $l = 1, \ldots, R_\chi - 1$.

Dann gilt:

$$S \ll Q^2 T^n (1+\delta^{-1}\log QT)(\log QT)^{3n+5}.$$

Beweis. Es gilt folgende Ungleichung, die aus der approximativen Funktionalgleichung für die Heckesche Zetafunktion folgt ([3]; 3.1):

$$|\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\chi,l}, \chi)| \leqslant 6\left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eX} \frac{D(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^{1/2+it_{\chi,l}}}\, c\left(\frac{N\mathfrak{a}}{X}\right)\right|^2 + 6\left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eY} \frac{D(\mathfrak{a})\bar{\chi}(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^{1/2-it_{\chi,l}}}\, c'\left(\frac{N\mathfrak{a}}{Y}\right)\right|^2 |G(\tfrac{1}{2}-it_{\chi,l})|^4 + 6\sum_{i=1}^{4} |I_i|^2, \tag{4.1}$$

wobei I_1, I_2, I_3 und I_4 gewisse Integrale bezeichnen. Die Größen $c(u)$, $c'(u)$ und $G(u)$ werden bei Huxley definiert und hier übernommen. $D(\mathfrak{a})$ bezeichnet die Teilerfunktion. Ferner sind X und Y reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$XY = d^2(N\mathfrak{q})^2\left(\frac{|t_{\chi,l}|}{2\pi}\right)^{2n}. \tag{4.2}$$

Die Integrale I_i, $i = 1, \ldots, 4$, lassen sich nach Huxley ([3]; 2.48, 2.49, 2.50) wie folgt abschätzen:

$$|I_i| \ll N\mathfrak{q}X^{-1/2}|t_{\chi,l}|^{-n-1}\log Y \quad \text{für} \quad |t_{\chi,l}| \geqslant t_0,$$

$$|I_i| \ll N\mathfrak{q}X^{-1/2}\log(Y+2) \quad \text{für} \quad |t_{\chi,l}| < t_0,$$

wobei $t_0 = 4n+2$ ist.

1. Fall: Man fasse alle Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, l)$ zusammen, für die $|t_{\chi,l}| < t_0$ gilt.

Es sei $(N\mathfrak{q})^2 \leqslant X \leqslant 2(N\mathfrak{q})^2$; dann folgt wegen (4.2):

$$\frac{1}{2}\, d^2\left(\frac{|t_{\chi,l}|}{2\pi}\right)^{2n} \leqslant Y \leqslant d^2\left(\frac{t_0}{2\pi}\right)^{2n}.$$

Man erhält also aus (4.1):

$$|\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\chi,l}, \chi)| \ll \left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eX} D(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-1/2-it_{\chi,l}} c\left(\frac{N\mathfrak{a}}{X}\right)\right|^2 + \left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eY} D(\mathfrak{a})\bar{\chi}(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-1/2+it_{\chi,l}} c'\left(\frac{N\mathfrak{a}}{Y}\right)\right|^2 |G(\tfrac{1}{2}-it_{\chi,l})|^4 + 1.$$

Hieraus folgt durch Integration nach X:

$$|\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\chi,l}, \chi)| \ll (N\mathfrak{q})^{-2}\int_{(N\mathfrak{q})^2}^{2(N\mathfrak{q})^2} \left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eX} D(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-1/2-it_{\chi,l}} c\left(\frac{N\mathfrak{a}}{X}\right)\right|^2 dX + \int_{e^{-1}}^{d^2\left(\frac{t_0}{2\pi}\right)^{2n}} \left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eY} D(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-1/2+it_{\chi,l}} c'\left(\frac{N\mathfrak{a}}{Y}\right)\right|^2 |G(\tfrac{1}{2}-it_{\chi,l})|^4\, dY + 1.$$

Man fasse die Ideale $\mathfrak{q}$ mit $q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2q$ zusammen und summiere über die Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, l)$.

Es ergibt sich

$$\sum_{q\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant 2q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod \mathfrak{q}\\ |t_{\chi,l}|<t_0}}\ \sum_{l=1}^{R_\chi}|\zeta_K^4(\tfrac12+it_{\chi,l},\chi)|$$

$$\leqslant q^{-2}\int\limits_{q^2}^{8q^2}\sum_{q\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant 2q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi\\ |t_{\chi,l}|<t_0}}\ \sum_{l=1}^{R_\chi}\Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eX}D(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-1/2-it_{\chi,l}}c\Big(\frac{N\mathfrak{a}}{X}\Big)\Big|^2 dX+$$

$$+\int\limits_{e^{-1}}^{d^2\left(\frac{t_0}{2\pi}\right)^{2n}}\sum_{q\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant 2q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi\\ |t_{\chi,l}|<t_0}}\ \sum_{l=1}^{R_\chi}\Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant eY}D(\mathfrak{a})\overline{\chi}(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-1/2+it_{\chi,l}}c'\Big(\frac{N\mathfrak{a}}{Y}\Big)\Big|^2\times$$

$$\times|G(\tfrac12-it_{\chi,l})|^4\,dY+$$

$$+q^2t_0(1+\delta^{-1}).$$

Es wird jetzt Satz 2.1 mit $r=n$ auf die beiden ersten Summanden angewendet.

Bei der Abschätzung des zweiten Summanden verfahre man wie Huxley ([3]; 3.4, 3.5, 3.8). Es ergibt sich

$$\sum_{q\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant 2q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sum_{l=1}^{R_\chi}|\zeta_K^4(\tfrac12+it_{\chi,l},\chi)|$$

$$\leqslant q^{-2}\int\limits_{q^2}^{8q^2}(q^2+X)(1+\delta^{-1}\log eX)(\log eX)^{3n+5}dX+$$

$$+\int\limits_{e^{-1}}^{d^2\left(\frac{t_0}{2\pi}\right)^{2n}}(q^2+Y)(1+\delta^{-1}\log eY)(\log eY)^{3n+5}dY+q^2t_0(1+\delta^{-1})$$

$$\leqslant q^2(1+\delta^{-1}\log 2q)(\log 2q)^{3n+5}.$$

Summiert man über Intervalle der Form

$$2^{-m-1}Q\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant 2^{-m}Q,\qquad m\geqslant 0;$$

dann folgt:

$$S\leqslant Q^2(1+\delta^{-1}\log Q)(\log Q)^{3n+5}.$$

2. Fall: Man betrachte jetzt die Tripel $(\mathfrak{q},\chi,l)$, für die $t_0\leqslant|t_{\chi,l}|\leqslant T$ gilt, und fasse diejenigen mit der Eigenschaft

$$q\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant 2q,\qquad 2\leqslant T_1\leqslant|t_{\chi,l}|\leqslant 2T_1$$

zusammen. Man wähle

$$(N\mathfrak{q})^2\Big(\frac{|t_{\chi,l}|}{2\pi}\Big)^n\leqslant X\leqslant 2(N\mathfrak{q})^2\Big(\frac{|t_{\chi,l}|}{2\pi}\Big)^n;$$

dann folgt wegen (4.2):

$$\frac12 d^2\Big(\frac{T_1}{2\pi}\Big)^n\leqslant Y\leqslant d^2\Big(\frac{T_1}{\pi}\Big)^n.$$

Die Behauptung von Satz 4.1 erhält man mit den gleichen Überlegungen wie im 1. Fall.

5. Es soll jetzt der Ausdruck

$$A:=\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}N(\sigma,T,\chi),\qquad \sigma\geqslant\tfrac12,\ T\geqslant 2$$

abgeschätzt werden. Dazu muß man zunächst Betrachtungen durchführen, die es ermöglichen, die Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome aus Paragraph 2 auf dieses Problem anzuwenden. Für den Körper der rationalen Zahlen findet man die entsprechenden Überlegungen bei Montgomery in [12] und [13].

Es seien X, Y reelle Parameter, deren Werte später angegeben werden, und es gelte

$$2\leqslant X\leqslant Y\leqslant(QT)^B,$$

wobei $B\leqslant 6n$ eine positive Konstante ist.

Man setze

$$M(s,\chi)=\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant X}\mu(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}$$

und

$$f(s,\chi)=\zeta_K(s,\chi)M(s,\chi);$$

dann folgt:

$$f(s,\chi)=1+\sum_{N\mathfrak{a}>X}c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s},$$

wobei die Koeffizienten $c(\mathfrak{a})$ reell sind und $|c(\mathfrak{a})|\leqslant D(\mathfrak{a})$ gilt. Es sei $\frac12<\sigma\leqslant 1$ und $\varrho=\beta+i\gamma$, $\sigma\leqslant\beta<1$, eine Nullstelle von $\zeta_K(s,\chi)$; dann ergibt sich

$$e^{-1/Y}+\sum_{N\mathfrak{a}>X}c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}f(\varrho+w,\chi)Y^w\Gamma(w)\,dw.$$

Man wende den Residuensatz auf das Rechteck mit den Ecken $2\pm iT$ und $\frac12-\beta\pm iT$ an. Es folgt

(5.1)
$$e^{-1/Y}+\sum_{N\mathfrak{a}>X}c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y}$$

$$=\varepsilon(\chi)\frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}a_K M(1,\chi)Y^{1-\varrho}\Gamma(1-\varrho)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tfrac12+i\gamma+iu,\chi)Y^{1/2-\beta+iu}\Gamma(\tfrac12-\beta+iu)\,du,$$

wobei $\varepsilon(\chi)$ in Lemma 2.6 definiert und a_K das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ ist.

Zunächst soll der „$\varepsilon(\chi)$"-Term abgeschätzt werden.

Falls $|\gamma| \geqslant (\log QT)^2$ und $\varepsilon(\chi) = 1$, dann gilt:

$$\varepsilon(\chi)\frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}a_K M(1, \chi)Y^{1-\varrho}\Gamma(1-\varrho) = o(1) \quad \text{für} \quad Y \to \infty.$$

Die Abschätzung

$$N(\tfrac{1}{2}, T, \chi_0) \ll T\log T$$

von Landau ([7]; Satz 171) zeigt, daß die Zetafunktion $\zeta_K(s) \ll (\log QT)^3$ Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ mit $|\gamma| \leqslant (\log QT)^2$ besitzt.

(5.2) Der „$\varepsilon(\chi)$"-Term in (5.1) ist also $o(1)$ mit Ausnahme von $\ll (\log QT)^3$ Nullstellen.

Es gilt:

$$\sum_{N\mathfrak{a} > X} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y} = \sum_{X < N\mathfrak{a} \leqslant Y^2} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y} + o(1).$$

Ferner kann man das Integral in (5.1) auf

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\frac{1}{2}(\log QT)^2} \zeta_K(\tfrac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi)M(\tfrac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi)Y^{1/2-\beta+iu}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta+iu)\,du$$

beschränken mit einem Fehlerglied von $o(1)$.

Man erhält also

$$1 + \sum_{X < N\mathfrak{a} \leqslant Y^2} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\frac{1}{2}(\log QT)^2} f(\tfrac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi)Y^{1/2-\beta+iu}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta+iu)\,du + o(1).$$

Daraus folgt für $Y \geqslant Y_0$ entweder

$$\Big|\sum_{X < N\mathfrak{a} \leqslant Y^2} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y}\Big| \geqslant \tfrac{1}{3} \tag{5.3}$$

oder

$$\Big|\int\limits_{-\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\frac{1}{2}(\log QT)^2} f(\tfrac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi)Y^{1/2-\beta+iu}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta+iu)\,du\Big| \geqslant \tfrac{1}{3} \tag{5.4}$$

oder beide $\geqslant \frac{1}{3}$.

Man definiere die folgende Teilmenge der betrachteten Nullstellen:

(5.5) $\mathfrak{R} := \{\varrho = \beta + i\gamma,\ \beta \geqslant \sigma,\ |\gamma| \leqslant T;\ |\gamma_1 - \gamma_2| \geqslant 2(\log QT)^2$, falls $\varrho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$, $\varrho_2 = \beta_2 + i\gamma_2$ Nullstellen derselben ζ_K-Funktion sind$\}$.

$R = |\mathfrak{R}|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{R}$. Nach [1], Lemma 5, oder [4], Lemma 1, gilt für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$, $N\mathfrak{q} \leqslant Q$:

$$N(\tfrac{1}{2}, t+1, \chi) - N(\tfrac{1}{2}, t, \chi) \ll \log\{Q(|t|+1)\}.$$

Berücksichtigt man außerdem (5.2) und (5.5), dann ergibt sich:

$$A \ll (R+1)(\log QT)^3.$$

Schließlich bezeichne man mit $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die Menge der Nullstellen in $\mathfrak{R}$, für die (5.3) bzw. (5.4) gilt, und es sei $R_1 = |\mathfrak{R}_1|$ bzw. $R_2 = |\mathfrak{R}_2|$. Wegen $R \leqslant R_1 + R_2$ folgt

$$A \ll (R_1+R_2+1)(\log QT)^3. \tag{5.6}$$

Satz 5.1. *Es seien $Q \geqslant 1$, $T \geqslant 2$ reelle Zahlen. Dann gilt*

(a) *im Bereich $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1-1/2n$, $n \geqslant 2$*

$$A \ll \{Q^2T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)}(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^{10},$$

(b) *im Bereich $1-1/2n \leqslant \sigma \leqslant 1$, $n \geqslant 1$*

$$A \ll T^{\frac{n+2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\frac{a}{n}-b}\{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^{10}.$$

Die reellen Zahlen a und b unterliegen den Bedingungen

$$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$$

und für $n \geqslant 2$

$$1 - \frac{a}{n} + 2a - 2a\sigma - \frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma} = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\frac{a}{n} + \frac{2}{3} - b \geqslant 0.$$

Es ergeben sich z.B. die folgenden Abschätzungen im Bereich $1-1/2n \leqslant \sigma \leqslant 1$:

$$A \ll \{Q^2T^{b'}(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^{10}$$

mit

$$\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} \leqslant b' = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(n+1)\sigma - n}{4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2} \leqslant n, \quad n \geqslant 1;$$

$$A \ll T^{\frac{n+4}{3}-\frac{2}{3n}-b''}\{Q^2T^{b''}(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^{10}$$

mit

$$\frac{n}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \leqslant b'' = \frac{(2-\sigma)(n-5+6\sigma+n^{-1})}{6\sigma-3} \leqslant \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n}, \quad n \geqslant 2$$

und

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant \frac{n+4}{3}-\frac{2}{3n}-b'' \leqslant 1-\frac{1}{n}, \quad n \geqslant 2.$$

Beweis. Es existiert eine Zahl U, $X \leqslant U \leqslant Y^2$, so daß gilt:

$$\Big|\sum_{U<N\mathfrak{a}\leqslant 2U} c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y}\Big| \geqslant \frac{1}{9\log Y}$$

für $\geqslant R_1(\log Y)^{-1}$ Nullstellen $\varrho \in \mathfrak{R}_1$.

Somit folgt:

$$R_1(\log Y)^{-3} \ll \sum_{l=1}^{R_1}\Big|\sum_{U<N\mathfrak{a}\leqslant 2U} c(\mathfrak{a})\chi_l(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho_l}e^{-N\mathfrak{a}/Y}\Big|^2.$$

Auf diesen Ausdruck wende man Satz 2.1 mit $r = 1$ an und beachte (5.5) Es ergibt sich

$$(5.7)\quad R_1 \ll \{Q^2TU^{1-2\sigma}(\log U)^{3n}+Q^{2/n}TU^{2-1/n-2\sigma}(\log U)^3+U^{2-2\sigma}\}e^{-2U/Y}(\log QT)^7.$$

Für jede Nullstelle $\varrho = \beta+i\gamma \in \mathfrak{R}_2$ sei t_ϱ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft

$$|\gamma-t_\varrho| \leqslant \tfrac{1}{2}(\log QT)^2,$$

für die

$$|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it_\varrho, \chi)M(\tfrac{1}{2}+it_\varrho, \chi)|$$

maximal wird.

Man kann o.B.d.A. $\beta \geqslant \sigma \geqslant \frac{1}{2}+(\log QT)^{-1}$ annehmen.

Mit (5.4) ergibt sich dann

$$|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it_\varrho, \chi)M(\tfrac{1}{2}+it_\varrho, \chi)| \gg Y^{\sigma-1/2}(\log QT)^{-1}$$

und folglich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$(5.8)\quad R_2 Y^{\frac{4}{3}\sigma-\frac{2}{3}}(\log QT)^{-4/3} \ll \Big\{\sum_{\varrho_l\in\mathfrak{R}_2}|\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\varrho_l}, \chi_l)|\Big\}^{1/3}\Big\{\sum_{\varrho_l\in\mathfrak{R}_2}|M(\tfrac{1}{2}+it_{\varrho_l}, \chi_l)|^2\Big\}^{2/3}.$$

Man wende auf den ersten Faktor Satz 4.1 und auf den zweiten Faktor Satz 2.1 mit $r = 1$ an. Es folgt:

$$(5.9)\quad \Big\{\sum_{\varrho_l\in\mathfrak{R}_2}|\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\varrho_l}, \chi_l)|\Big\}^{1/3} \ll (Q^2T^n)^{1/3}(\log QT)^{n+5/3}$$

und

$$(5.10)\quad \Big\{\sum_{\varrho_l\in\mathfrak{R}_2}|M(\tfrac{1}{2}+it_{\varrho_l}, \chi_l)|^2\Big\}^{2/3} \ll \{Q^2T(\log X)^{3n}+Q^{2/n}TX^{1-1/n}(\log X)^3+X\}^{2/3}(\log X)^{4/3}.$$

Man wähle

$$(5.11)\quad X = Q^2T^a(\log QT)^{3n}, \quad Y = \{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3}{2(2-\sigma)}},$$

wobei $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ reelle Zahlen sind, die später angegeben werden.

1. Fall: $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1-1/2n$, $n \geqslant 2$. Aus (5.7) folgt unter Berücksichtigung von (5.11):

$$R_1 \ll \Big\{\{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}+T^{1-\frac{3b}{2n(2-\sigma)}}\{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}\Big\}(\log QT)^7.$$

Man wähle $b = \frac{2}{3}n(2-\sigma) \leqslant n$; dann ergibt sich

$$R_1 \ll \{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^7.$$

Die Abschätzung für R_2 erhält man aus (5.8), (5.9), (5.10) und (5.11):

$$(5.12)\quad R_2 \ll \{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}T^{\frac{n}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\frac{a}{n}-b}(\log QT)^{13/3}$$
$$\ll \{Q^2T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)}(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}T^{-n+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\frac{a}{n}+\frac{2}{3}n\sigma}(\log QT)^{13/3}.$$

Man wähle

$$a = \frac{3n-2-2n\sigma}{2-2/n} \quad \text{für} \quad n \geqslant 2;$$

dann folgt mit (5.6) wegen $1 \leqslant a \leqslant b = \frac{2}{3}n(2-\sigma)$ die Behauptung.

2. Fall: $1-1/2n \leqslant \sigma \leqslant 1$, $n \geqslant 1$. Aus (5.7) ergibt sich mit (5.11)

$$R_1 \ll \{Q^2T(\log QT)^{3n}X^{1-2\sigma}+Q^{2/n}TX^{2-1/n-2\sigma}(\log QT)^3+Y^{2-2\sigma}\}(\log QT)^7$$
$$\ll T^{1-\frac{a}{n}+2a-2a\sigma-\frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma}}\{Q^2T^b(\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^7,$$

falls $1-a/n+2a-2a\sigma-3b(1-\sigma)/(2-\sigma) \geqslant 0$ ist.

Falls $n = 1$ ist, wähle man $a = b = 1$. Für $n \geqslant 2$ setze man

$$a = \frac{(n+1)\sigma-n}{4\sigma+\dfrac{\sigma}{n}-2-2\sigma^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{n+2}{3}+\frac{2}{3}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)a.$$

Nach kurzer Rechnung folgt dann die Behauptung, wenn man (5.12) beachtet.

Eine andere Abschätzung ergibt sich im Bereich

$$1-\frac{1}{2n}\leqslant\sigma\leqslant 1,\qquad n\geqslant 2,$$

wenn man

$$1-\frac{a}{n}+2a-2a\sigma-\frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma}=\frac{n}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\frac{a}{n}+\frac{2}{3}-b\geqslant 0$$

setzt.

Man wähle $a=1$, dann folgt $b=(2-\sigma)(n-5+6\sigma+n^{-1})/(6\sigma-3)$.

Ein anderes Resultat erhält man, wenn Satz 2.2 anstelle von Satz 2.1 im vorigen Beweis benutzt wird.

Satz 5.2. *Es seien $Q\geqslant 1$, $T\geqslant 2$ reelle Zahlen. Dann gilt im Bereich $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$, $n\geqslant 1$:*

$$A\ll\{Q^{8/3}T^{n/2+1}\log QT(Q+T^{n/2-1})^{1/3}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^9$$
$$\ll\{Q^3T^{\frac{2}{3}(n+1)}\log QT\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log QT)^9.$$

Beweis. Zunächst ergibt sich

$$\sum_{\varrho_l\in\mathfrak{R}_2}|\zeta_K^4(\tfrac{1}{2}+it_{\varrho_l},\chi_l)|\ll\{Q^3T^{n/2+1}\log QT+Q^2T^n\}(\log QT)^4.$$

Man verfährt dabei wie im Beweis zu Satz 4.1. Allerdings wird anstelle von Satz 2.1 jetzt das Korollar zu Satz 2.2 verwendet.

Ebenfalls unter Benutzung von Satz 2.2 ergeben sich mit denselben Überlegungen wie im vorigen Beweis folgende Abschätzungen für R_1 und R_2:

$$R_1\ll(\log QT)^6\{Q^3T^{n/2+1}\log QT\cdot X^{1-2\sigma}+Y^{2-2\sigma}\},$$

$$R_2\ll Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\sigma}(\log QT)^{10/3}\{Q^3T^{n/2+1}\log QT+Q^2T^n\}^{1/3}\{Q^3T^{n/2+1}\log QT+X\}^{2/3}.$$

Man wähle

$$X=Q^3T^{n/2+1}\log QT,$$

$$Y=\{Q^{8/3}T^{n/2+1}\log QT(Q+T^{n/2-1})^{1/3}\}^{\frac{3}{2(2-\sigma)}},$$

dann folgt die Behauptung.

Unter Verwendung der Ergebnisse von Paragraph 3 ergibt sich die folgende Verallgemeinerung von (1.2).

Satz 5.3. *$Q\geqslant 1$, $T\geqslant 2$ seien reelle Zahlen. Es gilt im Bereich $\frac{3}{4}\leqslant\sigma\leqslant 1$, $n\geqslant 1$:*

$$A\ll(Q^2T^n)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}}(\log QT)^c,$$

wobei

$$c=\max\left\{\frac{4(\sigma+1)}{2\sigma-1},\ \frac{3n-\sigma(3n-2)+7}{\sigma}\right\}.$$

Beweis. Nach (5.6) gilt:

$$A\ll(R_1+R_2+1)(\log QT)^3.$$

Zunächst soll R_1 abgeschätzt werden. Es existiert eine Zahl U, $X\leqslant U\leqslant Y^2$, so daß gilt

$$\Big|\sum_{U<N\mathfrak{a}\leqslant 2U}c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-\varrho}e^{-N\mathfrak{a}/Y}\Big|\geqslant(9\log Y)^{-1}\tag{5.13}$$

für $\gg R_1(\log Y)^{-1}$ Nullstellen $\varrho\in\mathfrak{R}_1$.

Man setze $V=(9\log Y)^{-1}$ und wende Satz 3.1 an. $\mathfrak{M}$ ist dabei die Menge aller $\varrho\in\mathfrak{R}_1$, für die (5.13) gilt. Die Voraussetzungen von Satz 3.1 sind erfüllt für

$$X^{2\sigma-1}\geqslant B_1(\log QT)^6QT^{n/2},\tag{5.14}$$

wobei B_1 eine genügend große, nur vom Körper K abhängige Konstante ist. Es folgt:

$$R_1\ll Y^{2-2\sigma}(\log QT)^6.$$

Es wird jetzt eine Abschätzung für R_2 bewiesen. Man wähle zu jeder Nullstelle $\varrho=\beta+i\gamma\in\mathfrak{R}_2$ die reelle Zahl t_ϱ so wie im Beweis zu Satz 5.1. Dann folgt:

$$|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it_\varrho,\chi)M(\tfrac{1}{2}+it_\varrho,\chi)|\gg Y^{\sigma-1/2}(\log QT)^{-1}.\tag{5.15}$$

V_1 sei ein positiver Parameter, dessen Wert später angegeben wird. Man setze

$$\mathfrak{Z}_1=\{\varrho\in\mathfrak{R}_2;\ |\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it_\varrho,\chi)|\geqslant V_1\},$$
$$\mathfrak{Z}_2=\{\varrho\in\mathfrak{R}_2;\ |\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it_\varrho,\chi)|<V_1\}.$$

Nach Satz 4.1 ergibt sich

$$|\mathfrak{Z}_1|\ll Q^2T^nV_1^{-4}(\log QT)^{3n+5}.$$

Da für jede Nullstelle $\varrho\in\mathfrak{Z}_2$ nach (5.15)

$$|M(\tfrac{1}{2}+it_\varrho,\chi)|\gg Y^{\sigma-1/2}V_1^{-1}(\log QT)^{-1}$$

gilt, läßt sich $|\mathfrak{Z}_2|$ mit Satz 3.1 abschätzen. Die Voraussetzungen sind erfüllt für

$$Y^{2\sigma-1} \geqslant B_2 V_1^2 Q T^{n/2} (\log QT)^4, \tag{5.16}$$

wobei B_2 eine geeignete, nur vom Körper K abhängige Konstante ist. Es folgt:

$$|\mathfrak{Z}_2| \ll X V_1^2 Y^{1-2\sigma} (\log QT)^3.$$

Man wähle

$$X^{2\sigma-1} = B_1 (\log QT)^6 Q T^{n/2}, \qquad Y^{2\sigma-1} = B_2 V_1^2 Q T^{n/2} (\log QT)^4.$$

Die Bedingungen (5.14) und (5.16) sind dann erfüllt, und man erhält:

$$R_1 \ll (\log QT)^6 \{V_1^4 Q^2 T^n (\log QT)^8\}^{\frac{1-\sigma}{2\sigma-1}},$$

$$R_2 \ll Q^2 T^n V_1^{-4} (\log QT)^{3n+5} + (Q^2 T^n)^{\frac{1-\sigma}{2\sigma-1}} (\log QT)^{\frac{7-2\sigma}{2\sigma-1}}$$

Die Behauptung von Satz 5.3 folgt, wenn man

$$V_1^4 = (Q^2 T^n)^{\frac{3\sigma-2}{\sigma}} (\log QT)^{\frac{8\sigma-8}{\sigma} + (3n-1)\frac{2\sigma-1}{\sigma}}$$

setzt.

Es sei $N(\sigma, T)$ die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ im Bereich

$$\beta \geqslant \sigma, \qquad |\gamma| \leqslant T.$$

Mit Hilfe von Satz 2.3 ergibt sich

Satz 5.4. *Es sei $T \geqslant 2$ eine reelle Zahl und*

$$m(a, T) = \max_{\substack{\sigma \geqslant a \\ |t| \leqslant T \\ |s-1| \geqslant 1}} |\zeta_K(s)|.$$

Dann gilt für $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ und $\sigma \geqslant (1+a)/2$

$$N(\sigma, T) \ll \{B m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-2a)}{(2\sigma-1-a)(\sigma-a)}} (\log T)^9,$$

wobei B eine nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Beweis. Der Beweis des entsprechenden Satzes im rationalen Fall von Montgomery [13], Theorem 12.3, überträgt sich unmittelbar auf Zahlkörper.

Literaturverzeichnis

[1] E. Fogels, *On the zeros of Hecke's L-functions I*, Acta Arith. 7(1961–62), S. 87–106.

[2] E. Hecke, *Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper*, Göttinger Nachrichten, 1917, S. 299–318.

[3] M. N. Huxley, *The large sieve inequality for algebraic number fields II: Means of moments of Hecke zeta-functions*, Proc. London Math. Soc. (3), 21 (1970), S. 108–128.

[4] — *The large sieve inequality for algebraic number fields III: Zero-density results*, J. London Math. Soc. (2), 3 (1971), S. 233–240.

[5] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Chelsea Publishing Company, New York.

[6] — *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale*, J. Reine Angew. Math. 125 (1903), S. 64–188.

[7] — *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, B. G. Teubner Verlag, 1918.

[8] — *Über Ideale und Primideale in Idealklassen*, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 52–154.

[9] — *Verallgemeinerung eines Pólyaschen Satzes auf algebraische Zahlkörper*, Göttinger Nachrichten 1918, S. 478–488.

[10] T. Mitsui, *Generalized prime number theorem*, Jap. J. Math. 26 (1956), S. 1–42.

[11] H. L. Montgomery, *Means and large values of Dirichlet polynomials*, Inventiones Math. 8 (1969), S. 334–345.

[12] — *Zeros of L-functions*, ibid. 8 (1969), S. 346–354.

[13] — *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Band 227, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[14] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin 1957.

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT MARBURG

Eingegangen am 1. 4. 1975 (692)