ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

Approximations diophantiennes et eutaxie

par

MARC REVERSAT (Talence)

I. Introduction. Les problèmes d'eutaxie consistent en l'étude de l'ensemble des éléments x, de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ par exemple, pour lesquels il existe une infinité de solutions n à l'inéquation:

$$(1) \qquad \|u_n - x\|_q < \varepsilon_n$$

(où $\|\cdot\|_q$ désigne la norme de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$:

$$\|(x_1, \ldots, x_q)\|_q = \sup_{i=1,\ldots,q} \|x_i\|_1),$$

$(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ étant une suite donnée d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite donnée de nombres réels positifs, décroissante, telle que la série $\sum\varepsilon_n^q$ soit divergente.

Si l'ensemble des éléments x de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ pour lesquels l'inéquation (1) admet une infinité de solutions est de complémentaire négligeable relativement à la mesure de Haar, la suite $(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est dite *eutaxique relativement à la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est dite *eutaxique* si elle est eutaxique relativement à toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ décroissante, telle que la série $\sum\varepsilon_n^q$ soit divergente. Cette notion a été introduite par J. Lesca ([2]).

Le plus ancien résultat d'eutaxie est le théorème métrique de Khintchine (Khinčin). De nombreux auteurs ont étudié le problème d'eutaxie suivant ([8]): soit $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $(\varphi_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite d'applications d'un pavé S de $\boldsymbol{R}^p$, à valeurs dans $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ (p et q entiers positifs). Soit $\theta\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Quelle est la mesure de l'ensemble des éléments x de S pour lesquels

$$(2) \qquad \|\varphi_n(x) - \theta\|_q < \varepsilon_n$$

(où l'inconnue est l'entier n) possède une infinité de solutions?

Les cas suivants ont été étudiés:

— Par W. M. Schmidt lorsque la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est décroissante et (φ_n) l'application de $\boldsymbol{R}^q$ dans $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ définie par: $\varphi_n(x) = P(n)x \pmod{\boldsymbol{Z}^q}$, P étant un polynôme à coefficients entiers ([9]).

— Par W. Philipp lorsque φ_n est l'application de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ définie par: $\varphi_n(x) = x\alpha^n \pmod 1$, α étant un réel supérieur à 1 ([5]).

— Par B. de Mathan pour les applications φ_n: $x \to \alpha x^n \pmod 1$ (α étant un réel positif) définies dans l'intervalle $]1, +\infty[$ ([3]).

Dans ces trois exemples il est montré que tout $\theta \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, l'inéquation (2) possède pour presque tout $x \in S$ une infinité de solutions lorsque la série $\sum_n \varepsilon_n^q$ diverge.

Ce type résultat implique que pour une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ donnée, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\boldsymbol{N}}$ est eutaxique pour presque tout x, *relativement à la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$. Mais cela n'implique pas que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\boldsymbol{N}}$ soit eutaxique pour presque tout x, car l'ensemble de complémentaire négligeable formé des éléments x pour lesquels la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\boldsymbol{N}}$ est eutaxique par rapport à une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ donnée dépend de cette suite $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$. Ainsi il a été démontré par J. Lesca ([2]) que la suite $(nx)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est eutaxique dans $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ si et seulement si x est de constante de Markov finie, i.e. pour presque aucun x.

Ce résultat avait conduit J. Lesca et B. de Mathan à conjecturer que presque aucune suite (relativement à la mesure de Haar du groupe compact $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{N}}$) ne serait eutaxique. Dans cet article nous démontrons qu'il n'en est rien et qu'en fait presque toute suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ est eutaxique. Pour cela nous établissons un critère *suffisant* d'eutaxie à l'aide de certaines fonctions λ définies sur l'ensemble des suites d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Ce critère permet également d'étudier l'eutaxie de la suite $(nx)_{n\in\boldsymbol{N}}$ en dimension q. Cette suite est eutaxique si et seulement si

$$M_q(x) = \limsup_{n>0} (1/n^{1/q} \|nx\|_q)$$

est finie. En dimension 1, J. Lesca démontrait ce théorème en utilisant le développement de x en fractions continues, permettant d'obtenir des propriétés très fortes de répartition sur la suite $(nx)_{n\in\boldsymbol{N}}$, propriétés qui ne peuvent s'étendre aux dimensions supérieures à 1. Notre critère permet également d'étudier l'eutaxie des suites $(a_n x)_{n\in\boldsymbol{N}}$, soit lorsque la suite $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ croît „très lentement", soit lorsqu'elle croît „très vite".

Notations. Si x est un nombre réel, $[x]$ désigne la partie entière de x, et $\{x\}$ l'élément de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ associé à x par la surjection canonique $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$.

Nous appelons intervalle de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ l'image canonique d'un intervalle réel. Le centre d'un intervalle I de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ ($I \neq \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$) est le point de I dont la distance au complémentaire de I est maximale, cette distance est le rayon de l'intervalle et est égale à la moitié de sa mesure (pour la mesure normalisée de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$).

Nous désignons par q un entier positif et par $\|\cdot\|_q$ la norme de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ ($\|x_1, \ldots, x_q\|_q = \sup_{i=1,\ldots,q} \|x_i\|_1$). Un pavé (resp. un hypercube) de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ est un produit d'intervalles de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ (resp. d'intervalles de même mesures), chacun des intervalles s'appelle un côté du pavé (resp. de l'hypercube). Un sommet d'un pavé $K = \prod_{j=1}^{q} I_j$ de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ est un élément $(x_1, \ldots, x_q)$ de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ tel que x_j soit une extrémité de I_j ($j = 1, \ldots, q$). Nous désignons par μ_q la mesure de Haar normalisée de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Nous dirons qu'un élément $(x_1, \ldots, x_q)$ de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ est rationnel s'il appartient à $(\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z})^q$.

Nous ferons souvent l'abus de notations consistant à confondre un intervalle de $\boldsymbol{R}$ inclus dans $[0, 1[$ et son image canonique dans $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$. Ainsi, si N est un entier positif et si $k = (k_1, \ldots, k_q)$ est un q-uplet d'entiers tels que $0 \leqslant k_i < [N^{1/q}]$, nous désignons par $P(k; N)$ l'hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ défini par:

$$P(k; N) = P(k_1, \ldots, k_q; N) = \prod_{i=1}^{q} \left[\frac{k_i}{[N^{1/q}]}, \frac{k_i+1}{[N^{1/q}]}\right[.$$

II. Eutaxie et repartition. Soient $u = (u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ et K un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, de mesure non nulle. Soit N un entier positif. Désignons par $\lambda(K, u, N)$ le nombre de q-uplets d'entiers $k = (k_1, \ldots, k_q)$ tels que $0 \leqslant k_i < [N^{1/q}]$ pour $i = 1, \ldots, q$ et tels que le pavé $K \cap P(k; N)$ contienne au moins un point u_n avec $1 \leqslant n \leqslant N$. On pose:

$$\lambda(K, u) = \liminf_N \frac{\lambda(K, u, N)}{N\mu_q(K)}, \qquad \chi(u) = \inf_K \lambda(K, u)$$

(K décrivant la famille des hypercubes de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesures non nulles et à sommets rationnels).

Remarquons que les fonctions $\lambda(K, \cdot)$ et χ sont invariantes par l'application de $((\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q)^{\boldsymbol{N}}$ dans lui-même qui a la suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par: $v_n = u_{n+1}$ (shift-endomorphism).

Théorème I. *Soit u une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Si $\chi(u)$ est strictement positif, alors la suite u est eutaxique.*

Nous démontrons d'abord le lemme suivant: Soit t un entier positif. Pour tout pavé K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ désignons par $N_q(K, t)$ le nombre de q-uplets d'entiers $k = (k_1, \ldots, k_q)$ tels que $0 \leqslant k_i < t$ pour $i = 1, \ldots, q$ et tels que l'hypercube $P(k; t^q)$ rencontre K sans être inclus dans K. Si α désigne un nombre réel positif, soit: $N_q(\alpha, t) = \sup_K N_q(K, t)$ (K décrivant la famille des pavés de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ dont chaque côté est de mesure au plus α).

Lemme I.1.

$$N_q(\alpha, t) \leqslant 2^{q+1}(\max(\alpha t, 2))^{q-1}.$$

Preuve. Pour $i = 1, \dots, q$, soit I_i un intervalle de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ de mesure $a_i \leqslant a$ et soit $K = \prod_{i=1}^{q} I_i$.

Le nombre $N_q(K, t)$ est majoré par la différence du nombre de pavés de forme $P(k_1, \dots, k_q; t^q)$ ($k_i \in \boldsymbol{N}$, $0 \leqslant k_i < t$ pour $i = 1, \dots, q$) qui rencontrent K et du nombre de ceux qui sont contenus dans K. Le nombre d'intervalles de la forme $[k/t, (k+1)/t[$ ($k \in \boldsymbol{N}$, $0 \leqslant k < t$) rencontrant l'intervalle I_i est au plus $[a_i t]+2 \leqslant a_i t + 2$, et le nombre de ceux inclus dans I_i est au moins $\max(a_i t - 2, 0)$. Donc:

$$N_q(K, t) \leqslant \prod_{i=1}^{q} (a_i t + 2) - \prod_{i=1}^{q} \max(a_i t - 2, 0).$$

Pour $j = 1, \dots, q$, la fonction

$$a_j \to \prod_{i=1}^{q} (a_i t + 2) - \prod_{i=1}^{q} \max(a_i t - 2, 0) \qquad (a_i \text{ fixé pour } i \neq j)$$

est croissante, par conséquent:

$$N_q(K, t) \leqslant (at+2)^q - \big(\max(at-2, 0)\big)^q$$

d'où il résulte la majoration cherchée.

Démonstration du théorème I. Posons

$$u = (u_n)_{n \in \boldsymbol{N}} = \big((u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(q)})\big)_{n \in \boldsymbol{N}}.$$

Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs. Soit V_n l'hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ obtenu comme produit des intervalles ouverts de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ de centres $u_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, q$) et de rayons ε_n, et soit $V = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}^*} V_n$. Il suffit de montrer que si la série $\sum_n \varepsilon_n^q$ est divergente, on a $\mu_q(V) = 1$. En effet la fonction $\lambda(K, \cdot)$ étant invariante par le shift-endomorphism, on aura alors $\mu_q\big(\bigcup_{n \geqslant N} V_n\big) = 1$ pour tout entier positif N et par suite $\mu_q\big(\bigcap_{N>0} \bigcup_{n \geqslant N} V_n\big) = 1$.

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \chi(u)$. Le fait que $\mu_q(V) = 1$ résultera des lemmes suivants:

LEMME I.2. *Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs. S'il existe un hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure non nulle et à sommets rationnels tel que*

$$\mu_q(K \cap V) \leqslant \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K),$$

alors, pour toute suite $(t_s)_{s \in \boldsymbol{N}}$ d'entiers positifs telle que $t_s/t_{s-1} > \big(2/a\mu_q(K)\big)^{1/q}$, il existe un entier s_0 tel que $\varepsilon_{t_s^q} < 1/2t_s$ pour $s > s_0$.

Preuve. Soit $(t_s)_{s \in \boldsymbol{N}}$ une suite d'entiers positifs tels que

$$t_s/t_{s-1} > \big(2/a\mu_q(K)\big)^{1/q}$$

et soit s_1 tel que

$$\lambda(K, u, t_s^q) > a\mu_q(K) t_s^q \qquad \text{pour tout } s > s_1.$$

Soit $s > s_1$ et supposons que $\varepsilon_{t_s^q} \geqslant 1/2t_s$. Soit

$$U_s = \bigcup_{t_{s-1}^q < n \leqslant t_s^q} V_n.$$

Le nombre d'hypercubes $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$ ($k_i \in \boldsymbol{N}$ et $0 \leqslant k_i < t_s$ pour $i = 1, \dots, q$) tels que $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q) \cap K$ contienne au moins un point u_n avec $t_{s-1}^q < n \leqslant t_s^q$ est au moins $\big(a\mu_q(K) t_s^q - t_{s-1}^q\big)$. Le nombre de ces hypercubes contenus dans K est donc au moins $\big(a\mu_q(K) t_s^q - t_{s-1}^q - 2^{q+1} t_s^{q-1}\big)$, puisque, d'après le lemme I.1, le nombre d'hypercubes $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$ qui rencontrent K sans être contenus dans K est majoré par

$$2^{q+1}\big(\max\big(\mu_q(K)^{1/q} t_s, 2\big)\big)^{q-1} \leqslant 2^{q+1} t_s^{q-1}.$$

Pour chaque hypercube $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$ ($k_i \in \boldsymbol{N}$ et $0 \leqslant k_i < t_s$ pour $i = 1, \dots, q$) tel que $P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)$ soit inclus dans K et tel qu'il existe un entier n avec

$$t_{s-1}^q < n \leqslant t_s^q \quad \text{et} \quad u_n \in P(k_1, \dots, k_q; t_s^q),$$

on a:

$$\mu_q\big(U_s \cap P(k_1, \dots, k_q; t_s^q)\big) \geqslant \frac{1}{2^q t_s^q}$$

puisque $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_{t_s^q} \geqslant 1/2t_s$ et que pour chaque indice $i = 1, \dots, q$ l'un au moins des deux intervalles $]u_n^{(i)}, u_n^{(i)} + 1/2t_s[$ ou $]u_n^{(i)} - 1/2t_s, u_n^{(i)}[$ est contenu dans $[k_i/t_s, (k_i+1)/t_s[$. On a donc:

$$\mu_q(U_s \cap K) \geqslant \frac{1}{2^q t_s^q}\big(a\mu_q(K) t_s^q - t_{s-1}^q - 2^{q+1} t_s^{q-1}\big) \geqslant \frac{a}{2^{q+1}} \mu_q(K) - \frac{2}{t_s}.$$

On aura donc $\mu_q(U_s \cap K) > (a/2^{q+2}) \mu_q(K)$ pour s suffisamment grand.

LEMME I.3. *Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum_n \varepsilon_n^q$ soit divergente. Alors, pour tout hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})_q$ de mesure non nulle et à sommets rationnels, l'on a:*

$$\mu_q(K \cap V) > \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K).$$

Preuve. La démonstration se fait par l'absurde. Supposons qu'il existe un hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure non nulle et à sommets rationnels tel que $\mu_q(V\cap K)\leqslant (a/2^{q+2})\mu_q(K)$. Soit δ un entier positif tel que $\delta > (q2^{q+3}/a\mu_q(K))$ (donc $\delta > (2/a\mu_q(K))^{1/q}$). Soit (ν_n) la suite définie par:

$$\nu_n = \varepsilon_{\delta^{qs}} \quad \text{si} \quad \delta^{q(s-1)} < n \leqslant \delta^{qs} \quad (\nu_1 = \varepsilon_1).$$

Soit V'_n l'hypercube de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^q$ obtenu comme produit des intervalles de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ $]u_n^{(i)}-\nu_n,\ u_n^{(i)}+\nu_n[$ $(i=1,\dots,q)$ et pour tout entier positif s, soit $W_s = \bigcup_{n\leqslant\delta^s} V'_n$. Comme $V'_n\subset V_n$ on a

$$\mu_q(W_s\cap K)\leqslant \frac{a}{2^{q+2}}\mu_q(K)$$

pour tout entier s.

Evaluons $\mu_q(K\cap(W_s\setminus W_{s-1}))$: D'après le lemme I.2, on peut supposer s suffisamment grand pour que $\varepsilon_{\delta^{qs}} < 1/2\delta^s$. Le nombre d'hypercubes $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ $(k_i\in\mathbf{N},\ 0\leqslant k_i<\delta^s$ pour $i=1,\dots,q)$ contenus dans l'ensemble $K\cap W_{s-1}$ est au plus $((a/2^{q+2})\mu_q(K)\delta^{qs})$ puisque, par hypothèse,

$$\mu_q(K\cap W_{s-1})\leqslant\frac{a}{2^{q+2}}\mu_q(K).$$

Le nombre d'hypercubes $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ qui rencontrent $K\cap W_{s-1}$ sans être contenus dans cet ensemble est majoré par le nombre de ces hypercubes qui rencontrent les ensembles $K\cap V'_n$ $(0<n\leqslant\delta^{q(s-1)})$ et qui ne sont pas contenus dans ces ensembles. Donc, d'après le lemme I.1, le nombre d'hypercubes $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ qui rencontrent $K\cap W_{s-1}$ sans être contenus dans cet ensemble est majoré par

$$\sum_{0<n\leqslant\delta^{q(s-1)}} 2^{q+1}\left((2\nu_n\delta^s)^{q-1}+2^{q-1}\right)$$

puisque pour chaque n, $K\cap V'_n$ est contenu dans l'hypercube V'_n de mesure $(2\nu_n)^q$. On a:

$$\sum_{0<n\leqslant\delta^{q(s-1)}}(2\nu_n\delta^s)^{q-1} = \sum_{1\leqslant k\leqslant s-1}(2\varepsilon_{\delta^{qk}}\delta^s)^{q-1}(\delta^{qk}-\delta^{q(k-1)})+(2\varepsilon_1\delta^s)^{q-1}$$

$$\leqslant \delta^{s(q-1)}\frac{\delta^q-1}{\delta-1}\,\frac{\delta^s-1}{\delta^q}+O(\delta^{s(q-1)})$$

puisque pour k assez grand on a $\varepsilon_{\delta^{qk}}<1/2\delta^k$. On majore δ^s-1 par δ^s, $(\delta^q-1)/(\delta-1)$ par $q\delta^{q-1}$. Finalement: il existe une constante L (dépendant éventuellement de δ mais non de s) telle que le nombre d'hypercubes $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ $(k_i\in\mathbf{N}$ et $0\leqslant k_i<\delta^s$ pour $i=1,\dots,q)$ qui rencontrent $K\cap W_{s-1}$ soit majoré par:

$$\frac{a}{2^{q+2}}\mu_q(K)\delta^{qs}+q2^{q+1}\delta^{qs-1}+L\delta^{s(q-1)}+2^{2q}\delta^{q(s-1)}.$$

D'autre part les hypercubes $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ contenus dans K et contenant un point u_n avec $\delta^{q(s-1)}<n\leqslant\delta^{qs}$ sont pour s suffisamment grand, d'après les calculs du lemme I.2, au moins au nombre de

$$\left(a\mu_q(K)\delta^{qs}-\delta^{q(s-1)}-2^{q+1}\delta^{s(q-1)}\right).$$

Il existe donc au moins

$$\frac{2^{q+2}-1}{2^{q+2}}a\mu_q(K)\delta^{qs}-(1+2^{2q})\delta^{q(s-1)}-(2^{q+1}+L)\delta^{s(q-1)}-q2^{q+1}\delta^{sq-1}$$

hypercubes $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ contenus dans K disjoints de W_{s-1} et contenant un point u_n avec $\delta^{q(s-1)}<n\leqslant\delta^{qs}$. Or, pour un tel hypercube $P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})$ on a

$$\mu\left((W_s\setminus W_{s-1})\cap P(k_1,\dots,k_q;\ \delta^{qs})\right)\geqslant\varepsilon^q_{\delta^{qs}}$$

puisque, pour $\delta^{q(s-1)}<n\leqslant\delta^{qs}$, $\nu_n=\varepsilon_{\delta^{qs}}<1/2\delta^s$. On a donc:

$$\begin{aligned}&\mu_q\left(K\cap(W_s\setminus W_{s-1})\right)\\ &\geqslant\left(\frac{2^{q+2}-1}{2^{q+2}}a\mu_q(K)\delta^{qs}-(1+2^{2q})\delta^{q(s-1)}-(2^{q+1}+L)\delta^{s(q-1)}-q2^{q+1}\delta^{sq-1}\right)\varepsilon^q_{\delta^{qs}}\\ &\geqslant\left(\frac{2^q-1}{2^q}a\mu_q(K)-\frac{2^{q+1}+L}{\delta^s}\right)\delta^{qs}\varepsilon^q_{\delta^{qs}}\end{aligned}$$

puisque $\delta>q2^{2q+3}/a\mu_q(K)$. Donc, pour s suffisamment grand:

$$\mu_q\left(K\cap(W_s\setminus W_{s-1})\right)\geqslant\frac{2^q-1}{2^{q+1}}a\mu_q(K)\delta^{qs}\varepsilon^q_{\delta^{qs}}.$$

Mais ceci est contraire au lemme suivant:

LEMME I.4. *La série* $\sum_{s\geqslant0}\delta^{qs}\varepsilon^q_{\delta^{qs}}$ *est divergente.*

Preuve. On a:

$$\delta^{qs}\varepsilon^q_{\delta^{qs}}\geqslant\frac{1}{\delta^{q-1}}\sum_{\delta^{qs}<n\leqslant\delta^{q(s+1)}}\varepsilon^q_n$$

puisque la suite (ε_n) est décroissante. Donc

$$\sum_{s\geqslant0}\delta^{qs}\varepsilon^q_{\delta^{qs}}\geqslant\frac{1}{\delta^q-1}\sum_{n>\delta^q}\varepsilon^q_n$$

ce qui démontre le lemme puisque la série $\sum_{n\geqslant1}\varepsilon^q_n$ est divergente.

Fin de la démonstration du théorème I. Le lemme I.3 prouve que V a une densité positive en tout point de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^q$, par suite que V est de mesure 1. En effet, le complémentaire de V est négligeable puisqu'il admet la densité 1 en aucun point de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ et que, d'après un théorème de Lebesgue, tout sous-ensemble mesurable de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ a la densité 1 en presque tous ses points.

Remarques. Dans la démonstration du théorème I on n'utilise pas le fait que les hypercubes intervenant dans la définition de la fonction χ soient à sommets rationnels. Ce sont les théorèmes mesurant des ensembles de suites eutaxiques qui nécessitent la restriction à une famille dénombrable d'hypercubes.

Une autre modification de la fonction χ donne une condition suffisante d'eutaxie plus faible que celle du théorème I: Soit u une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Pour tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ soit $\chi_x(u) = \operatorname{Inf}_K \lambda(K, u)$ (K décrivant la famille des hypercubes de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, contenant x, de mesures non nulles et à sommets rationnels). La même démonstration que celle du théorème I permet de prouver le:

Théorème I bis. *Si $\chi_x(u) > 0$ pour presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, la suite u est eutaxique.*

La réciproque du théorème I est fausse ([1], [8]) et nous ne savons pas si celle du théorème I bis est vraie. Cependant:

Théorème II. *Soit u une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. S'il existe un hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure non nulle tel que $\lambda(K, u) = 0$, alors u n'est pas eutaxique.*

Preuve. Soit K un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, et soit $u = (u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Posons pour tout entier N

$$l(K, u, N) = \mu_q\Big(K\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{N} H(u_n, 1/N)\Big)\Big)$$

où $H(u_n, 1/N)$ désigne l'hypercube ouvert de centre u_n et de mesure $1/N$. Soit:

$$l(K, u) = \liminf_N \frac{l(K, u, N)}{\mu_q(K)}.$$

Remarquons que

$$l(K, u) \leqslant 2^q\lambda(K, u).$$

En effet, soit W_N (resp. W'_N) la réunion des hypercubes $H(u_n; 1/N)$, n parcourant l'ensemble des indices $1\leqslant n\leqslant N$ tels que $u_n\in K$ (resp. $u_n\notin K$ et $K\cap H(u_n, 1/N)\neq\emptyset$). Pour chaque hypercube $P(k; N)$, tous les ensembles $H(u_n, 1/N)$ pour lesquels $u_n\in P(k; N)$ sont contenus dans le pavé $\big(P(k; N)+H(0, 1/N)\big)$, de mesure $(1/[N^{1/q}]+1/N^{1/q})^q$, donc:

$$\mu_q(W_N) \leqslant \lambda(K, u, N)\left(\frac{1}{[N^{1/q}]}+\frac{1}{N^{1/q}}\right)^q.$$

D'autre part, pour tout indice n tel que $u_n\notin K$ et que

$$K\cap H(u_n, 1/N)\neq\emptyset,$$

l'ensemble $H(u_n, 1/N)$ rencontre la frontière de K, et par suite, est contenu dans l'ensemble $F+2H(0, 1/N)$, de mesure $O(1/N^{1/q})$. Donc:

$$\mu(W'_N) = O\left(\frac{1}{N^{1/q}}\right)$$

et

$$l(K, u, N) \leqslant \lambda(K, u, N)\left(\frac{1}{[N^{1/q}]}+\frac{1}{N^{1/q}}\right)^q + O\left(\frac{1}{N^{1/q}}\right)$$

d'où:

$$l(K, u) \leqslant 2^q\lambda(K, u).$$

Si $\lambda(K, u) = 0$, on peut alors construire par récurrence une suite croissante d'entiers positifs $(N_s)_{s\in\boldsymbol{N}^*}$ telle que, en posant $M_s = \sum_{0<t\leqslant s} N_t$ (et $M_0 = 0$), on ait pour tout $s\geqslant 0$

$$l\big(K, T^{M_s}(u), N_{s+1}\big) \leqslant \frac{1}{2^{s+1}}$$

où T^{M_s} désigne le M_s-ième itéré de shift-endomorphism.

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ la suite de nombres réels positifs définie par:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2N_{s+1}^{1/q}} \quad \text{si} \quad M_s < n \leqslant M_{s+1}.$$

Cette suite est décroissante et la série $\sum_{n\in\boldsymbol{N}^*}\varepsilon_n^q$ est divergente puisque

$$\sum_{M_s<n\leqslant M_{s+1}} \varepsilon_n^q = \frac{1}{2^q}.$$

Pour $n\in\boldsymbol{N}^*$, soit V_n l'hypercube de centre u_n et de côté de mesure $2\varepsilon_n$. On a:

$$\mu_q\Big(K\cap\Big(\bigcup_{M_s<n\leqslant M_{s+1}} V_n\Big)\Big) = l\big(K, T^{M_s}(u), N_{s+1}\big) \leqslant \frac{1}{2^{s+1}}.$$

Donc:

$$\mu_q\Big(K\cap\Big(\bigcup_{n>M_s} V_n\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{2^s}$$

d'où:

$$\mu_q\Big(K\cap\Big(\bigcap_{N\in\boldsymbol{N}}\bigcup_{n>N} V_n\Big)\Big) = 0.$$

La suite u n'est donc pas eutaxique.

III. Mesure de certains ensembles de suites eutaxiques. Soit π la mesure de Haar normalisée du groupe $((\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q)^{\boldsymbol{N}}$. Le théorème I permet de mesurer l'ensemble des suites eutaxiques:

THÉORÈME III. *Presque toute suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ (relativement à la mesure π) est eutaxique.*

Preuve. Nous allons montrer par une méthode analogue à celle du théorème 2 de [4] que pour π-presque toute suite u, on a $\chi(u)\geqslant t$, où t est le nombre de l'intervalle $]0,1[$ tel que: $t^t\big(e(1-t)\big)^{1-t}=1$. La conclusion viendra alors du théorème I.

Soit K un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, posons $\alpha=\mu_q(K)$. Soient $\varrho\in]0,1[$, N un entier positif et $L_N(K,\varrho)$ l'ensemble des éléments u de $((\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q)^{\boldsymbol{N}}$ tels que $\lambda(K,u,N)\leqslant\varrho N\alpha$. Soit $E(K,N)$ l'ensemble des q-uplets d'entiers $k=(k_1,\ldots,k_q)$ tels que $0\leqslant k_i<[N^{1/q}]$ pour $i=1,\ldots,q$ et $P(k;N)\cap\cap K\neq\emptyset$. Soit T le cardinal de $E(K,N)$ et posons $M=[\varrho N\alpha]$.

Soit H une partie à M éléments de $E(K,N)$ et soit V_H l'ensemble des suites $u=(u_n)$ telles que $u_n\in\big((\complement K)\cup\big(\bigcup_{k\in H}P(k;N)\big)\big)$ pour tout n tel que $1\leqslant n\leqslant N$. On a:

$$\pi(V_H)\leqslant\left(\frac{M}{[N^{1/q}]^q}+1-\alpha\right)^N$$

et comme $L_N(K,\varrho)=\bigcup_H V_H$, il vient:

$$\pi\big(L_N(K,\varrho)\big)\leqslant\binom{T}{M}\left(\frac{M}{[N^{1/q}]^q}+1-\alpha\right)^N.$$

Soient (ϱ_N), (α_N) et (β_N) les suites définies par:

$$\alpha\varrho_N=\frac{M}{[N^{1/q}]^q},\qquad T=\alpha_N\cdot N,\qquad [N^{1/q}]^q=\beta_N\cdot N.$$

La suite (ϱ_N) tend vers ϱ, (α_N) vers α et (β_N) vers 1. La formule de Stirling montre alors que:

$$\binom{T}{M}\left(\frac{M}{[N^{1/q}]^q}+1-\alpha\right)^N$$
$$\sim\left(\frac{\alpha_N}{2\pi\alpha\beta_N\varrho_N(\alpha_N-\alpha\beta_N\varrho_N)N}\right)^{1/2}\left(\frac{\alpha_N^{\alpha_N}(\alpha\varrho_N+1-\alpha)}{(\alpha\beta_N\varrho_N)^{\alpha\beta_N\varrho_N}(\alpha_N-\alpha\beta_N\varrho_N)^{(\alpha_N-\alpha\beta_N\varrho_N)}}\right)^N$$

et quand N tend vers l'infini, la suite

$$\left(\frac{\alpha_N^{\alpha_N}(\alpha\varrho_N+1-\alpha)}{(\alpha\beta_N\varrho_N)^{\alpha\beta_N\varrho_N}(\alpha_N-\alpha\beta_N\varrho_N)^{\alpha_N-\alpha\beta_N\varrho_N}}\right)_{N\in\boldsymbol{N}}$$

converge vers $\big(1-(1-\varrho)\alpha\big)/\varrho^{\alpha\varrho}(1-\varrho)^{\alpha(1-\varrho)}$. Donc la série $\sum_N\pi\big(L_N(K,\varrho)\big)$ sera convergente si $\big(1-(1-\varrho)\alpha\big)/\varrho^{\alpha\varrho}(1-\varrho)^{\alpha(1-\varrho)}<1$, donc si

$$\big(1-(1-\varrho)\alpha\big)^{1/\alpha}/\varrho^{\varrho}(1-\varrho)^{1-\varrho}<1.$$

La fonction $\alpha\to\big(1-(1-\varrho)\alpha\big)^{1/\alpha}$, définie sur $]0,1[$, est majorée par sa limite en 0: $e^{\varrho-1}$. D'autre part, si t est le nombre de l'intervalle $]0,1[$ tel que $t^t\big(e(1-t)\big)^{1-t}=1$, on a pour $\varrho<t$:

$$\varrho^{\varrho}(1-\varrho)^{1-\varrho}e^{1-\varrho}>1.$$

Donc la série $\sum_N\pi\big(L_N(K,\varrho)\big)$ est convergente si $\varrho<t$. Il en résulte que pour $\varrho<t$, $\lambda(K,u)\geqslant\varrho$ pour π-presque toute suite. On voit alors que $\chi(u)\geqslant t$ pour π-presque toute suite, en appliquant ce résultat à chaque terme ϱ d'une suite d'éléments de l'intervalle $]0,t[$ tendant vers t, puis à la famille dénombrable des hypercubes à sommets rationnels.

Les méthodes du chapitre 3 de [3] permettent de préciser dans certains cas le théorème III. Elles permettent en effet de la mesurer de l'ensemble des x pour lesquels la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\boldsymbol{N}}$ est eutaxique modulo 1, où $(\varphi_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est une suite de fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant certaines conditions — essentiellement de croissance suffisamment rapide — ([7]). En particulier, on a le résultat suivant:

THÉORÈME IV. *Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs. Alors, si la série $\sum_n\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est convergente, la suite $a(x)=(\{a_nx\})_{n\in\boldsymbol{N}}$ d'éléments de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ est eutaxique pour presque tout $x\in\boldsymbol{R}$.*

Démonstration. Nous allons montrer que si t désigne le nombre de l'intervalle $]0,1[$ tel que $t^t\big(e(1-t)\big)^{1-t}=1$, alors $\chi\big(a(x)\big)\geqslant t$ pour presque tout $x\in\boldsymbol{R}$. Le théorème I permettra de conclure.

Nous aurons besoin des lemmes suivants:

LEMME IV.1. *Soit a un nombre réel positif non nul, $[u,v]$ un intervalle compact de $\boldsymbol{R}$, et I un intervalle de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ de longueur ε et de fonction caractéristique δ. Alors:*

$$\int_u^v\delta(\{ax\})\,dx\leqslant\varepsilon(v-u)+2\varepsilon/a.$$

Preuve. On a:

$$\int_u^v\delta(\{ax\})\,dx=a^{-1}\int_{ua}^{va}\delta(\{x\})\,dx.$$

Soient j_0 et j_1 les entiers définis par: $j_0-1 < ua \leqslant j_0,\, j_1 \leqslant va < j_1+1$. Ecrivons:

$$\int_{ua}^{va} = \int_{ua}^{j_0} + \int_{j_0}^{j_1} + \int_{j_1}^{va}.$$

On a:

$$\int_{ua}^{j_0} \delta(\{x\})\,dx \leqslant \int_{j_0-1}^{j_0} \delta(\{x\})\,dx = \varepsilon$$

et de même:

$$\int_{j_1}^{va} \delta(\{x\})\,dx \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part:

$$\int_{j_0}^{j_1} \delta(\{x\})\,dx = \varepsilon(j_1-j_0).$$

Finalement:

$$\int_{u}^{v} \delta(\{ax\})\,dx \leqslant a^{-1}\big(2\varepsilon+\varepsilon(j_1-j_0)\big) \leqslant \varepsilon(v-u)+2\varepsilon/a.$$

LEMME IV.2. *Soient I un intervalle $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ de mesure non nulle α, (M, N) un couple d'entiers tels que $0 < M \leqslant N$ et $N \geqslant \alpha^{-1}$, et soit K un ensemble de M entiers k tels que $0 \leqslant k < N$. Soient δ la fonction caractéristique du sous-ensemble*

$$I \cup \Big(\bigcup_{k\in K}\Big[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\Big[\Big)$$

de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ et $a_1, \ldots, a_r$ une suite de r nombres réels positifs et non nuls. Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ posons

$$\delta_{a_1,\ldots,a_r}(x) = \prod_{1\leqslant s\leqslant r} \delta(\{a_s x\}).$$

On a alors, pour tout intervalle compact $[u, v]$ de $\boldsymbol{R}$:

$$\int_{u}^{v} \delta_{a_1,\ldots,a_r}(x)\,dx \leqslant \Big(\frac{M}{N}+\alpha\Big)^r \Big((v-u)+\frac{2}{a_1}\Big) \prod_{2\leqslant s\leqslant r}\Big(1+\frac{2Na_{s-1}}{a_s}\Big).$$

Preuve. Pour $k \in K$ soit γ_k (resp. ε_k) la fonction caractéristique (resp. la mesure) de $[k/N, (k+1)/N[$ et appelons γ_I (resp. ε_I) la fonction caractéristique (resp. la mesure) de l'intervalle I. Posons $K_1 = K \cup \{I\}$. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier r.

Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ on a:

$$\delta_{a_1}(x) = \delta(\{ax\}) \leqslant \sum_{k\in K_1} \gamma_k(\{ax\}).$$

Donc pour tout intervalle borné $[u, v] \subset \boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}\int_{u}^{v} \delta_{a_1}(x)\,dx &\leqslant \sum_{k\in K_1} \int_{u}^{v} \gamma_k(\{ax\})\,dx \\ &\leqslant \sum_{k\in K_1}\Big(\varepsilon_k(v-u)+\frac{2\varepsilon_k}{a_1}\Big) \quad \text{d'après le lemme IV.1} \\ &= \Big(\frac{M}{N}+\alpha\Big)\Big(v-u+\frac{2}{a_1}\Big) \quad \text{puisque } \sum_{k\in K_1}\varepsilon_k = \frac{M}{N}+\alpha.\end{aligned}$$

Supposons que le lemme IV.2 soit vrai pour toute suite $a_1, \ldots, a_r$ de r réels strictement positifs. Soit alors $a_1, \ldots, a_{r+1}$ une suite de $(r+1)$ réels strictement positifs. On a pour tout intervalle borné $[u, v] \subset \boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}\int_{u}^{v} \delta_{a_1,\ldots,a_{r+1}}(x)\,dx &\leqslant \sum_{k\in K_1} \int_{u}^{v} \delta_{a_2,\ldots,a_{r+1}}(x)\,\gamma_k(\{a_1 x\})\,dx \\ &= \sum_{k\in K_1} a_1^{-1} \int_{a_1u}^{a_1v} \delta_{a_2a_1^{-1},\ldots,a_{r+1}a_1^{-1}}(x)\,\gamma_k(\{x\})\,dx.\end{aligned}$$

Soient j_0 et j_1 les entiers définis par: $j_0-1 < a_1u \leqslant j_0,\, j_1 \leqslant a_1v < j_1+1$. On a:

$$\int_{a_1u}^{a_1v} = \int_{a_1u}^{j_0} + \sum_{j=j_0}^{j_1-1}\int_{j}^{j+1} + \int_{j_1}^{a_1v}.$$

Pour $x \in [a_1u, j_0]$, $\gamma_k(\{x\}) = 1$ entraîne que x appartient a un intervalle de longueur au plus ε_k, donc, l'hypothèse de récurrence montre que:

$$\int_{a_1u}^{j_0} \delta_{a_2a_1^{-1},\ldots,a_{r+1}a_1^{-1}}(x)\,\gamma_k(\{x\})\,dx \leqslant \Big(\frac{M}{N}+\alpha\Big)^r\Big(\varepsilon_k+\frac{2a_1}{a_2}\Big)\prod_{3\leqslant s\leqslant r+1}\Big(1+\frac{2Na_{s-1}}{a_s}\Big)$$

et la même majoration s'applique aux intégrales:

$$\int_{j_1}^{a_1v} \delta_{a_2a_1^{-1},\ldots,a_{r+1}a_1^{-1}}(x)\,\gamma_k(\{x\})\,dx$$

et

$$\int_{j}^{j+1} \delta_{a_2a_1^{-1},\ldots,a_{r+1}a_1^{-1}}(x)\,\gamma_k(\{x\})\,dx.$$

Finalement:

$$\int_u^v \delta_{a_1,\ldots,a_{r+1}}(x)\,dx$$

$$\leqslant \sum_{k\in K_1} a_1^{-1}\left(\frac{M}{N}+\alpha\right)(j_1-j_0+2)\left(\varepsilon_k+\frac{2a_1}{a_2}\right)\prod_{3\leqslant s\leqslant r+1}\left(1+\frac{2Na_{s-1}}{a_s}\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{M}{N}+\alpha\right)^{r+1}\left(v-u+\frac{2}{a_1}\right)\prod_{2\leqslant s\leqslant r+1}\left(1+\frac{2Na_{s-1}}{a_s}\right).$$

Fin de la démonstration du théorème IV. Soient N un entier positif, I un intervalle de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ ($I\neq\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$) de mesure non nulle α, et ϱ un élément de $]0,1[$. Désignons par $L_N(I,\varrho)$ l'ensemble des $x\in\boldsymbol{R}$ tels que $\lambda(I,a(x),N)\leqslant\varrho N\alpha$ et par $E(I,N)$ l'ensemble des entiers k tels que $0\leqslant k<N$ et que $[k/N,(k+1)/N[\,\cap I\neq\emptyset$. Posons $M=[\varrho N\alpha]$ et soit K une partie à M éléments de $E(I,N)$. Soit V_K l'ensemble des éléments x de $\boldsymbol{R}$ tels que pour $1\leqslant n\leqslant N$,

$$\{a_nx\}\in \complement I\cup\left(\bigcup_{k\in K}\left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right[\right).$$

Le lemme IV.2 montre que pour tout intervalle borné $[u,v]\subset\boldsymbol{R}$ (si ν désigne la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R}$):

$$\nu(V_k\cap[u,v])\leqslant\left(\frac{M}{N}+1-\alpha\right)^N\left(v-u+\frac{2}{a_1}\right)\prod_{1\leqslant n\leqslant N}\left(1+\frac{2Na_{n-1}}{a_n}\right).$$

Or:

$$\prod_{1\leqslant n\leqslant N}\left(1+\frac{2Na_{n-1}}{a_n}\right)^{1/N}\leqslant 1+2\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

(inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique), donc si

$$B=\limsup_N\left(1+2\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

l'on a:

$$\nu(V_K\cap[u,v])=O\left(B^N\left(\frac{M}{N}+1-\alpha\right)^N\right)$$

(non uniformément par rapport à $[u,v]$) et si T désigne le cardinal de $E(I,N)$, il vient puisque $L_N(I,\varrho)=\bigcup_K V_K$:

$$\nu\big(L_N(I,\varrho)\cap[u,v]\big)=O\left(B^N\left(\frac{M}{N}+1-\alpha\right)^N\binom{T}{M}\right).$$

La formule de Stirling montre que la série $\sum\nu\big(L_N(I,\varrho)\cap[u,v]\big)$ converge si:

$$B^{1/\alpha}\big(1-(1-\varrho)\alpha\big)^{1/\alpha}<\varrho^\varrho(1-\varrho)^{1-\varrho},$$

donc si:

$$B^{1/\alpha}<\varrho^\varrho\big(e(1-\varrho)\big)^{1-\varrho}.$$

Soit t le nombre de l'intervalle $]0,1[$ tel que $t^t\big(e(1-t)\big)^{1-t}=1$. Pour $\varrho\in]0,t[$, et α donné, comme $\varrho^\varrho\big(e(1-\varrho)\big)^{1-\varrho}>1$, on peut supposer, quitte à supprimer les premiers termes de la suite (a_n), que B est suffisamment proche de 1 pour que: $B^{1/\alpha}<\varrho^\varrho\big(e(1-\varrho)\big)^{1-\varrho}$. On aura donc $\lambda\big(I,a(x)\big)\geqslant\varrho$ pour presque tout $x\in[u,v]$ par suite $\chi\big(a(x)\big)\geqslant t$ pour presque tout $x\in\boldsymbol{R}$.

IV. La suite (nx) **en dimension** q. Si $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ nous désignons par $M_q(x)$ le nombre

$$1/(\liminf_n n^{1/q}\|nx\|_q)$$

si ce nombre est fini, sinon nous posons $M_q(x)=+\infty$.

THÉORÈME V. *Soit x un élément de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. La suite (nx) d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ est eutaxique si et seulement si $M_q(x)$ est fini.*

Cet ennoncé généralise le résultat analogue obtenu par J. Lesca en dimension 1 ([2]). La démonstration découle du résultat plus général suivant:

THÉORÈME VI. *Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs, de densité inférieure strictement positive, et soit x un élément de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$. Alors:*

— si la suite (a_nx) est eutaxique, $M_q(x)$ est fini;

— réciproquement, si la suite (a_nx) est ν-répartie, où ν est une mesure sur $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ telle que

$$\inf\frac{\nu(K)}{\mu_q(K)}>0$$

(K décrivant la famille des hypercubes de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesures non nulles), et si $M_q(x)$ est fini, alors la suite (a_nx) est eutaxique.

Preuve. Désignons par $1/d$ la densité inférieure de la suite (a_n) et soit $\varrho>0$ une constante telle que: $\inf\nu(K)/\mu_q(K)\geqslant\varrho$ (K décrivant la famille des hypercubes de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesures non nulles). Nous allons montrer que pour tout hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure non nulle:

$$\frac{\varrho}{\big(1+d^{1/q}M_q(x)\big)^q}\leqslant\lambda\big(K,(a_nx)\big)\leqslant\frac{(5d)^q}{M_q(x)^{q/(q+1)}}$$

l'inégalité de gauche étant vraie sous réserve que la suite (a_nx) soit ν-répartie (cet encadrement n'est pas le meilleur possible: [6], [7]). La conclusion de la démonstration viendra alors des théorèmes I et II.

Posons $x = (x_1, \ldots, x_q)$. Si $\{x_1, \ldots, x_q\}$ est $\boldsymbol{Z}$-lié, les inégalités précédantes sont vraies. Nous supposerons donc $\{x_1, \ldots, x_q\}$ $\boldsymbol{Z}$-libre pour toute la suite de la démonstration.

Soit C une constante positive telle que l'inégalité

$$\|nx\|_q < \frac{1}{Cn^{1/q}}$$

ait une infinité de solutions. Soit n une solution et soit $\delta > d$. Posons

$$D = [(2C)^{q/(q+1)}]+1, \qquad N = Dn.$$

Pour m entier tel que $0 < m \leqslant N$ soit $a_m = hn+r$ la division de a_m par n avec $0 < r \leqslant n$. Pour n suffisamment grand on a $0 \leqslant h < \delta D$ puisque $a_m \leqslant \delta N$ pour n suffisamment grand. Si r est donné, tous les points $a_m x$ tels que $0 < m \leqslant N$ et $a_m \equiv r \pmod n$ appartiennent à un même hypercube K_r de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure au plus $(\delta D/Cn^{1/q})^q$ puisque si m et m' sont deux entiers tels que $0 < m < m' \leqslant N$, $a_m = hn+r$, $a_{m'} = h'n+r$, on a:

$$\|a_m x - a_{m'} x\|_q = \|(h-h')nx\|_q \leqslant |h-h'|\,\|nx\|_q \leqslant \frac{\delta D}{Cn^{1/q}}.$$

Or le nombre d'hypercubes $P(k_1, \ldots, k_q; N)$ rencontrant K_r est au plus

$$\left(\frac{\delta D}{Cn^{1/q}}[N^{1/q}]+2\right)^q.$$

D'autre part, si m est un entier tel que $0 < m \leqslant N$ et $a_m = hn+r$, et si $a_m x$ appartient à un hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, rx appartient à un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure au plus $\left(\mu_q(K)^{1/q}+2\delta D/Cn^{1/q}\right)^q$ puisque l'on a:

$$\|rx - a_m x\|_q \leqslant h\,\|nx\|_q \leqslant \frac{\delta D}{Cn^{1/q}}.$$

Le nombre de points rx $(1 \leqslant r \leqslant n)$ dans un hypercube de mesure

$$\left(\mu_q(K)^{1/q}+\frac{2\delta D}{Cn^{1/q}}\right)^q \quad \text{est} \quad \left(n\mu(K)+o(n)\right),$$

puisque $\{x_1, \ldots, x_q\}$ étant $\boldsymbol{Z}$-libre, la suite (rx) est équirépartie.

On a donc, pour tout hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure non nulle:

$$\lambda\left(K, (a_n x), N\right) \leqslant \left(n\mu_q(K)+o(n)\right)\left(\frac{\delta D}{Cn^{1/q}}[N^{1/q}]+2\right)^q.$$

Par suite: $\lambda\left(K, (a_n x)\right) \leqslant (dD/C+2/D^{1/q})^q$ d'où résulte la majoration cherchée.

Supposons maintenant $(a_n x)$ ν-répartie et $M_q(x)$ fini car si $M_q(x)$ est infini la minoration cherchée est évidente. Soit $C > 0$ tel que l'inéquation $\|nx\|_q < 1/Cn^{1/q}$ n'ait qu'un nombre fini de solutions. Soit $\delta > d$. Pour N suffisamment grand, les entiers a_m tels que $1 \leqslant m \leqslant N$ sont dans l'intervalle entier $\left[1, [N\delta]\right]$ et pour tout couple d'entiers (m, s) tels que $0 < m < s \leqslant [\delta N]$, on a $\|mx - sx\|_q > 1/C[N\delta]^{1/q}$. Donc pour N suffisamment grand et pour tout couple d'entiers (m, s) tels que $0 < m < s \leqslant N$, on a $\|a_m x - a_s x\| > 1/C[\delta N]^{1/q}$.

Soit $k = (k_1, \ldots, k_q)$ un q-uplet d'entiers tels que $0 \leqslant k_i < [N^{1/q}]$ pour $i = 1, \ldots, q$ et soit $\beta(k; N)$ le nombre d'entiers m tels que $0 < m \leqslant N$ et $a_m x \in P(k; N)$. On a:

$$\beta(k; N) \leqslant \left(1+\frac{C(\delta N)^{1/q}}{[N^{1/q}]}\right)^q$$

car on peut recouvrir $P(k; N)$ pour au plus $\left(1+C(\delta N)^{1/q}/[N^{1/q}]\right)^q$ hypercubes de côtés $1/C[\delta N]^{1/q}$. Donc, si K désigne un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$, comme d'autre part la suite $(a_n x)$ étant ν-répartie, le nombre de points $a_m x$ tels que $1 \leqslant m \leqslant N$ et $a_m x \in K$ est au moins $\left(\varrho N\mu_q(K)+o(N)\right)$, il vient:

$$\lambda\left(K, (a_n x), N\right) \geqslant \frac{\varrho N\mu_q(K)+o(N)}{\left(1+\dfrac{C(\delta N)^{1/q}}{[N^{1/q}]}\right)^q}.$$

Par suite, pour tout hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ de mesure non nulle:

$$\lambda\left(K, (a_n x)\right) \geqslant \frac{\varrho}{(1+C\delta^{1/q})^q}$$

pour tout $C > M_q(x)$ et pour tout $\delta > d$.

Corollaire. *Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs, de densité inférieure strictement positive, alors la suite $(a_n x)$ d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$ n'est eutaxique pour presque aucun $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^q$.*

Preuve. En effet, $M_q(x)$ est infini pour presque tout x, comme il résulte du théorème métrique de Khintchine.

Bibliographie

[1] F. Delmer, *Une remarque sur l'eutaxie*, C. R. A. S. Paris, 279A, (1974), p. 395–397.

[2] J. Lesca, *Sur les approximations diophantiennes à une dimension*, Thèse Sc. Math. Grenoble (1968).

[3] B. de Mathan, *Approximations diophantiennes dans un corps local*, Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, (1970), 93 pages.

[4] — *Un critère de non-eutaxie*, C. R. A. S. Paris, 273 A, (1971), p. 433–436.

[5] W. Philipp, *Some metrical theorems in number theory*, Pacific J. Math. 20 (1) (1967), p. 109–127.
[6] M. Reversat, *Un critère d'eutaxie*, C. R. A. S. Paris, 277 A, 10 (1973), p. 405–408.
[7] — *Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites*, Thèse de spécialité, Math. Bordeaux (1973).
[8] — *Les suites eutaxiques*, Séminaire de Théorie des Nombres (Delange–Pisot–Poitou), 1973–1974.
[9] W. M. Schmidt, *Metricals theorems on fractional parts of sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (3) (1964).

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
Talence, France
CENTRE MATHÉMATIQUE DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE
Paris, France

Reçu le 7. 2. 1975 (672)

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

A note on a paper of Franklin

by

D. W. Masser (Nottingham)

1. Introduction. Let $\wp(z)$ be a Weierstrass elliptic function with complex multiplication and algebraic invariants. Denote by ω, ω' a fundamental pair of periods with $\mathrm{Im}(\omega'/\omega) > 0$, and suppose η, η' are the corresponding quasi-periods of the associated Weierstrass zeta function. Let $\log\sigma$ be an arbitrary determination of a non-zero algebraic number σ. In [2] Franklin attempted to prove that any non-zero linear combination of the numbers $\omega, \omega', \eta, \eta', 2\pi i, \log\sigma$ is transcendental. Unfortunately his proof appears to be invalidated ([1]) by an error on p. 205. While it is true that the exponential polynomial (23) possesses at least simple zeros at the appropriate points, it seems difficult to obtain information about its derivatives and hence about the multiplicities of these zeros. In this note we complete the proof by using the techniques of [3] (in fact all the ideas required can be found in early papers of Feldman).

The result of Coates in [1] shows that we forfeit no generality by assuming that σ is not a root of unity. Accordingly we shall prove the following theorem.

THEOREM. *If σ is not a root of unity the numbers $1, \omega, \eta, 2\pi i$ and $\log\sigma$ are linearly independent over the field A of algebraic numbers.*

This includes the assertion of Franklin, for it was shown in [3] that the vector space spanned over A by $\omega, \omega', \eta, \eta'$ is actually spanned by ω and η alone. At the same time it extends Theorem III of [3] by adjoining the number $\log\sigma$.

Thus we assume the existence of algebraic numbers $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0, \theta$ such that

$$\alpha\omega + \beta\eta + \gamma 2\pi i + \delta \log\sigma = \theta. \tag{1}$$

The extrapolation part of the transcendence proof works for any θ, but the particular determinant argument used depends on whether $\theta \neq 0$ or $\theta = 0$. Contrary to usual expectations in this type of work, the latter case is much easier.

([1]) This was first pointed out to me by D. Brownawell and P. Cijsouw.