ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

Харди и Литтлвуд, в работе [2], стр. 177–184, показали, что имеет место теорема: отрезок

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{1/4+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0,\ T\geqslant T_0(\varepsilon),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

В предлагаемой теперь работе мы заменим показатель $\frac{1}{4}$ меньшим положительным числом. А именно, пусть

(1) $$S(a,b)=\sum_{0<a<n\leqslant b<2a} e^{it\ln n},\quad b\leqslant\sqrt{t/2\pi},$$

обозначает элементарную тригонометрическую сумму. Покажем, что имеет место

Теорема. *Если*

(2) $$|S(a,b)|<A\sqrt{a}\,t^{\Delta},\quad 0<\Delta<\tfrac{1}{4},$$

то отрезок

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i\big(T+T^{1/8+\Delta/2}\psi(T)\big),\quad T\geqslant T_0(\psi),$$

где $\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция, содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

Содержание этой теоремы выразим еще так. Пусть $\frac{1}{2}+i\bar\gamma'$, $\frac{1}{2}+i\bar\gamma''$ — соседние нечетные нули функции $\zeta(s)$, лежащие на критической прямой. Тогда

(3) $$\bar\gamma''-\bar\gamma'<A(\bar\gamma')^{1/8+\Delta/2}\psi(\bar\gamma'),\quad \bar\gamma'\geqslant T_0(\psi).$$

Или, наконец, используя результат Ханеке ([1], стр. 429, 430)

(4) $$\Delta=6/37,$$

из теоремы получается

Следствие.

$$\bar{\gamma}''-\bar{\gamma}' < A(\bar{\gamma}')^{61/296}\psi(\bar{\gamma}'). \tag{5}$$

1. В этой части приведем несколько замечаний о способе доказательства теоремы, и, наконец, докажем упоминавшуюся теорему.

(a) Мы отказываемся от основ первоначального доказательства Харди–Литтлвуда, [2], которое, в свою очередь, опирается на идею Э. Ландау, ([4], стр. 258), о различии в асимптотическом поведении интегралов

$$\int\limits_T^{2T} Z(t)\,dt, \qquad \int\limits_T^{2T} |Z(t)|\,dt. \tag{6}$$

(b) Используем метод Е. К. Титчмарша, ([4], стр. 260–262), который характеризуют асимптотические соотношения

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{N} Z(t_{2\nu}) \sim 2N, \qquad \sum_{\nu=\nu_0}^{N} Z(t_{2\nu+1}) \sim -2N, \tag{7}$$

при $N \to +\infty$.

(c) Однако, в то время как Е. К. Титчмарш получает каждое из соотношений (7), в отдельности, в этой работе используем оценку суммы $(0 < H \leqslant \sqrt[4]{T})$

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} Z(t_\nu), \tag{8}$$

(см. [3]), и, для суммы

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu), \tag{9}$$

получим асимптотическое соотношение. Дело в том, что для сумм (7), способ предложенный в работе [3], не срабатывает.

(d) В способах доказательства, родственных способу Харди–Литтлвуда, действуют от обратного. В то время как способ Е. К. Титчмарша представляет собой прямое доказательство.

Теперь приведем

Доказательство теоремы. Прежде всего, в работе [3] была получена оценка

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} Z(t_\nu) = O(T^{1/8+\Delta/2}\ln T). \tag{10}$$

В этой работе покажем (см. (52)) что имеет место соотношение

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/8+\Delta/2}\ln T), \tag{11}$$

являющееся асимптотическим, при соблюдении условия

$$T^{1/8+\Delta/2} = o(H). \tag{12}$$

Дальше, соотношения (10), (11), символически запишем так

$$\sum Z(t_{2k}) + \sum Z(t_{2k+1}) = O(\ldots), \tag{13}$$

$$\sum Z(t_{2k}) - \sum Z(t_{2k+1}) = \frac{1}{\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(\ldots). \tag{14}$$

Значит,

$$\sum Z(t_{2k}) = \frac{1}{2\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(\ldots), \tag{15}$$

$$\sum Z(t_{2k+1}) = -\frac{1}{2\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(\ldots). \tag{16}$$

Однако, из (15), (16), при соблюдении условия (12), следует, что существуют значения

$$\bar{t}_{2k} \in \langle T, T+H \rangle, \qquad Z(\bar{t}_{2k}) > 0, \tag{17}$$

$$\bar{\bar{t}}_{2k+1} \in \langle T, T+H \rangle, \qquad Z(\bar{\bar{t}}_{2k+1}) < 0. \tag{18}$$

Следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса, существует нечетный нуль функции $Z(t)$ попадающий в промежуток $\langle T, T+H \rangle$. Нечетный нуль функции $Z(t)$, в силу соотношения ([4], стр. 94)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it), \tag{19}$$

является нечетным нулем функции

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it).$$

Значит, отрезок

$$\tfrac{1}{2}+iT, \ \tfrac{1}{2}+i(T+H)$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$. Наконец, так как для

$$H = T^{1/8+\Delta/2}\psi(T), \tag{20}$$

условие (12) выполняется, то теорема доказана.

В следующих частях помещено доказательство соотношения (11) (при этом использованы обозначения введенные в работе [3]).

2. Так как ([3], (48))

$$\cos(t_{\bar{\nu}+M}\ln n) = \cos(\omega M+\varphi) + O\left(\frac{H^2\ln n}{T\ln T}\right), \tag{21}$$

где ([3], (50))

$$\omega = \omega(T, n) = 2\pi \frac{\ln n}{\ln(T/2\pi)}, \qquad \varphi = \varphi(n) = t_\nu \ln n, \tag{22}$$

и, дальше, ([3], (42), (46))

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} 1 = \frac{1}{2\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H^2}{T}\right), \tag{23}$$

то (принимая во внимание, что $\ln n < A \ln T$)

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} \cos(t_\nu \ln n) = \sum_{M=0}^{N} \cos(\omega M + \varphi) + O\left(\frac{H^3 \ln T}{T}\right). \tag{24}$$

Однако ([3], (53), $\overline{\omega} \to \omega$)

$$\sum_{M=0}^{N} \cos(\omega M + \varphi) = \tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos(\omega N + \varphi) - \tfrac{1}{2}\sin\varphi \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}\sin(\omega N + \varphi)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega. \tag{25}$$

Значит, имеет место

Лемма 1.

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} \cos(t_\nu \ln n) = \tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos(\omega N + \varphi) - \tfrac{1}{2}\sin\varphi \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}\sin(\omega N + \varphi)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega + O\left(\frac{H^3 \ln T}{T}\right).$$

3. Так как ([3], (59)), используя (23),

$$\begin{aligned}\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) &= 2 \sum_{1 \leqslant n < \sqrt{T/2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} \cos(t_\nu \ln n) = \\ &= \frac{1}{\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H^2}{T}\right) + 2 \sum_{2 \leqslant n < \sqrt{T/2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} \cos(t_\nu \ln n) = \\ &= \frac{1}{\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H^2}{T}\right) + \tilde{W}(T, H),\end{aligned} \tag{26}$$

и,

$$\sum_{2 \leqslant n < \sqrt{T/2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} < A \sqrt[4]{T}, \tag{27}$$

то, используя Лемму 1, (принимая во внимание, что $0 < H \leqslant \sqrt[4]{T}$) получается

Лемма 2.

$$\tilde{W}(T, H) = \sum \frac{\cos\varphi}{\sqrt{n}} + \sum \frac{\cos(\omega N + \varphi)}{\sqrt{n}} - \sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}} \sin\varphi + \sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}} \sin(\omega N + \varphi) + O(\ln T).$$

4. Так как, см. (22),

$$\frac{\omega}{2} = \pi \frac{\ln n}{\ln(T/2\pi)}, \tag{28}$$

то,

$$\frac{d}{dn} \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}} < 0, \qquad \frac{d}{dn} \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega < 0, \tag{29}$$

значит, последовательности

$$\left\{\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}}\right\}, \qquad \{\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega\}, \tag{30}$$

убывают для

$$n \in \langle 2, \sqrt{T/2\pi}). \tag{31}$$

Однако

$$\frac{\omega(T, 2)}{2} = \pi \frac{\ln 2}{\ln(T/2\pi)} \to 0, \qquad T \to +\infty, \tag{32}$$

и,

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega \sim \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\omega} \sim \frac{2}{\omega}. \tag{33}$$

Следовательно, в силу (28), (33),

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega < A \ln T, \qquad n \in \langle 2, \sqrt{T/2\pi}). \tag{34}$$

Дальше, пусть

$$\overline{n} = \left[\sqrt[4]{\frac{T}{2\pi}}\right] \sim \sqrt[4]{\frac{T}{2\pi}}, \tag{35}$$

т.е.

$$\ln \overline{n} \sim \frac{1}{4} \ln \frac{T}{2\pi}. \tag{36}$$

Значит,

$$\overline{\omega} = \omega(T, \overline{n}) = 2\pi \frac{\ln \overline{n}}{\ln(T/2\pi)} > \frac{\pi}{2}(1 - 0.01), \tag{37}$$

и, в силу (29),

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}(1-0.01) = \operatorname{ctg}\left(0.99\,\frac{\pi}{4}\right), \qquad n\in\langle\bar{n}, \sqrt{T/2\pi}). \tag{38}$$

5. В этой части попробуем оценить сумму

$$\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}}\sin\varphi. \tag{39}$$

Прежде всего положим

$$\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} = \sum_{2\leqslant n<\bar{n}} + \sum_{\bar{n}\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} = S_1+S_2. \tag{40}$$

(A) Сначала получим оценку для S_1. В силу (34), (35),

$$|S_1| < A\ln T\sum_{2\leqslant n<\bar{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} < A\sqrt{\bar{n}}\ln T < A\sqrt[8]{T}\ln T. \tag{41}$$

(B) Теперь получим оценку для S_2. Достаточно дать оценку суммы (см. (22))

$$\tilde{C}(t_{\bar{\nu}}) = \sum_{\bar{n}\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}}\, e^{it_{\bar{\nu}}\ln n}. \tag{42}$$

Прежде всего определим целые положительные числа K_0, L_0, согласно условиям

$$2^{K_0} < \sqrt{T/2\pi} \leqslant 2^{K_0+1}, \qquad 2^{K_0-L_0-1} \leqslant \bar{n} < 2^{K_0-L_0}, \tag{43}$$

очевидно,

$$K_0 < A\ln T, \qquad L_0 < A\ln T. \tag{44}$$

Дальше, подразделим сумму (42) на $O(\ln T)$ слагаемых

$$\tilde{C}(t_{\bar{\nu}}) = \sum_{\bar{n}\leqslant n<2^{K_0-L_0}} + \sum_{2^{K_0}\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} + \sum_{l=0}^{L_0-1}\ \sum_{2^{K_0-L_0+l}\leqslant n<2^{K_0-L_0+l+1}}. \tag{45}$$

Применяя к каждой из $O(\ln T)$ сумм (45), преобразование Абеля, используя (2), принимая во внимание (38), получается

$$|\tilde{C}(t_{\bar{\nu}})| < AT^{\Delta}\ln T. \tag{46}$$

Наконец, принимая во внимание что

$$\max\{\tfrac{1}{8}, \Delta\} < \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2}\Delta, \qquad 0<\Delta<\tfrac{1}{4}, \tag{47}$$

из (40), в силу (41), (46), получается

Лемма 3.

$$\left|\sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}}\sin\varphi\right| < AT^{1/8+\Delta/2}\ln T.$$

6. Действуя аналогично изложенному в предшествующей части (ср. [3], (64), (66)) получается

$$\left|\sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{n}}\sin(\omega N+\varphi)\right| < AT^{1/8+\Delta/2}\ln T. \tag{48}$$

Дальше, ([3], (70), (71)) имеют место оценки

$$\left|\sum\frac{\cos\varphi}{\sqrt{n}}\right| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T, \tag{49}$$

$$\left|\sum\frac{\cos(\omega N+\varphi)}{\sqrt{n}}\right| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T. \tag{50}$$

Теперь, из Леммы 2, в силу Леммы 3, (48), (49), (50), получается

$$|\tilde{W}(T,H)| < A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}\ln T. \tag{51}$$

Наконец, из (26), в силу (51), получается

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi}H\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/8+\Delta/2}\ln T), \tag{52}$$

т.е. (11).

Литература

[1] W. Haneke, *Verschärfung der Abschätzung von* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Arith. 8 (1963), стр. 357–430.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.

[3] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. тот том, стр. 31–43.

[4] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Поступило 1. 2. 1975
и в исправленной форме 1. 4. 1975 (671)