induction hypothesis we have $\psi_4^p\psi_6^{q-2}\psi_{10}^r\psi_{12}^s \in \Theta(2, k-12)$ and by Lemma 3.9(i) $\psi_6^2 \in \Theta(2, 12)$. Hence in this case we have also $\psi_4^p\psi_6^q\psi_{10}^r\psi_{12}^s \in \Theta(2, k)$. In case of $r \equiv q \equiv 0 \pmod 2$ with $r > 0$, we rewrite $\psi_4^p\psi_6^q\psi_{10}^r\psi_{12}^s$ as $\psi_4^q\psi_6^q\psi_{10}^{r-2}\psi_{12}^s \cdot \psi_{10}^2$, then by induction hypothesis we have $\psi_4^p\psi_6^q\psi_{10}^{r-2}\psi_{12}^s \in \Theta(2, k-20)$ and by Lemma 3.9(iii) $\psi_{10}^2 \in \Theta(2, 20)$. Hence this time we have $\psi_4^p\psi_6^q\psi_{10}^r\psi_{12}^s \in \Theta(2, k)$. In case of $q = r = 0$ and p or $s > 0$, we can easily see that $\psi_4^p\psi_{12}^s \in \Theta(2, k)$ by using Lemma 3.9(i) and Proposition 3.4. We have thus proved our theorem.

References

[1] F. van der Blij, *Even quadratic forms with determinant unity*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 5 (1954), pp. 297–300.

[2] H. S. M. Coxeter, *Extreme forms*, Canad. J. Math. 3 (1951), pp. 391–441.

[3] M. Eichler, "*The Basis Problem for Modular Forms and the Traces of the Hecke Operators*" in *Modular Functions of One Variable I*, Lecture Notes in Mathematics, 320, Springer, 1973.

[4] — *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952.

[5] J.-I. Igusa, *On Siegel modular forms of genus two*, Amer. J. Math. 84 (1962), pp. 175–200.

[6] M. Kneser, *Lineare Relationen zwischen Darstellungsanzahlen quadratischer Formen*, Math. Ann. 168 (1967), pp. 31–39.

[7] H. Maass, *Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades*, Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 34, Nr. 7 (1964).

[8] H.-V. Niemeier, *Definite quadratische Formen der Diskriminante* 1 *und Dimension* 24, J. Number Theory 5 (1973), pp. 142–178.

[9] M. Ozeki, *On modular forms whose Fourier coefficients are non-negative integers with the constant term unity*, Math. Ann. 206 (1973), pp. 187–203.

[10] C. L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Ann. of Math. 36 (1935), pp. 527–606.

[11] — *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades*, Math. Ann. 116 (1939), pp. 617–657.

[12] E. Witt, *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 14 (1941), pp. 323–337.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
RYUKYU UNIVERSITY
Okinawa, Japan

Received on 23. 1. 1975 (665

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

Об одной сумме в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

Прежде чем сформулируем соответствующую теорему, введем нужные обозначения. Положим ([4], стр. 94)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it), \tag{1}$$

где ([4], стр. 383)

$$\vartheta(t) = \tfrac{1}{2}t\ln t - \tfrac{1}{2}t(\ln 2\pi+1) - \tfrac{1}{8}\pi + O(1/t), \tag{2}$$

и, ([4], стр. 260)

$$\vartheta'(t) = \tfrac{1}{2}\ln t - \tfrac{1}{2}\ln 2\pi + O(1/t). \tag{3}$$

Пусть $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением (так как, в силу (3), функция $\vartheta(t)$ — возрастающая)

$$\vartheta(t_\nu) = \pi\nu, \tag{4}$$

где ν — целое положительное (ср. [4], стр. 261).

Пусть, наконец,

$$S(a, b) = \sum_{0<a\leqslant n<b\leqslant 2a} e^{it\ln n}, \quad b \leqslant \sqrt{t/2\pi}, \tag{5}$$

обозначает элементарную тригонометрическую сумму.

В этой работе покажем, что имеет место следующая

Теорема. *Если*

$$|S(a, b)| < A\sqrt{a}\,t^{\Delta}, \quad 0 < \Delta < \tfrac{1}{4}, \tag{6}$$

то

$$\Big|\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H} Z(t_\nu)\Big| < A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}\ln T, \tag{7}$$

где

$$0 < H \leqslant \sqrt[4]{T}. \tag{8}$$

В I главе этой работы покажем, какое ограничение на совокупность значений $Z(t_\nu)$ получается, если предположить, что промежуток „малой” длины (по отношению к $\sqrt[4]{T}$) не содержит нечетного нуля функции $Z(t)$. В следующих главах (II, III) помещено доказательство оценки (7).

Напомним что подобную сумму, а именно,

$$\sum_{\nu=M}^{N}(-1)^\nu Z(t_\nu), \tag{9}$$

(при постоянном M) в связи с законом Грама, изучал в работе [5], Е. К. Титчмарш. Им получен следующий результат:

$$\sum_{\nu=M}^{N}(-1)^\nu Z(t_\nu) = 2N+O(N^{3/4}\ln^{1/4}N), \tag{10}$$

(см. [5], стр. 101).

[Заметим что в соотношении (2) работы [5], а именно,

$$f(t) = e^{i\vartheta}\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \sum_{n=1}^{k}\frac{\cos(\vartheta-t\ln n)}{\sqrt{n}}+O(t^{-1/4}),$$

где $k=[\sqrt{t/2\pi}]$, есть опечатка. Должно быть

$$f(t) = e^{i\vartheta}\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = 2\sum_{n=1}^{k}\frac{\cos(\vartheta-t\ln n)}{\sqrt{n}}+O(t^{-1/4}).$$

Однако, все результаты (так как они касаются лишь сохранения или перемены знака) сохраняют силу, если положить

$$f(t) = \tfrac{1}{2}e^{i\vartheta}\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \tfrac{1}{2}Z(t).]$$

Е. К. Титчмарш, для изучения суммы (10), применил следующий способ: оценку суммы

$$\sum_{\nu=M}^{N}\cos(t_\nu\ln n), \tag{11}$$

методом ван дер Корпута, сводит к оценке соответствующего интеграла.

Однако, этот способ, для наших целей, оказывается недостаточно точным. Поэтому, в этой работе, для оценки суммы

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H} Z(t_\nu), \tag{12}$$

использован новый способ, состоящий в следующем.

(а) Сумму (играющую в нашем случае роль суммы (11))

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n), \tag{13}$$

выразим в замкнутом виде (используя надлежащим способом свойства последовательности $\{t_\nu\}$).

(в) Пункт (а) открывает возможность свести задачу оценки суммы (12) к задаче об оценке элементарной тригонометрической суммы, и, следовательно, использовать результат Ханеке, [1].

I. Следствия из теоремы

1. Дабы получить промежуток изменения H, относительно которого оценка (7) является нетривиальной, получим оценку сверху для величины $|Z(t_\nu)|$, используя предположение (6).

Прежде всего, ([4], стр. 94),

$$Z(t) = 2\sum_{1\leqslant n\leqslant\sqrt{t/2\pi}}\frac{\cos(\vartheta(t)-t\ln n)}{\sqrt{n}}+O(t^{-1/4}), \tag{14}$$

и, в силу (4), (ср. [4], стр. 261),

$$Z(t_\nu) = 2(-1)^\nu\sum_{1\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{\cos(t_\nu\ln n)}{\sqrt{n}}+O(t^{-1/4}). \tag{15}$$

Значит, достаточно оценить сумму

$$A(t_\nu) = \sum_{2\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}e^{it_\nu\ln n}. \tag{16}$$

Пусть $K_0(t_\nu)$ определено согласно условию

$$2^{K_0}\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}<2^{K_0+1}, \tag{17}$$

из чего, очевидно,

$$K_0<A\ln t_\nu. \tag{18}$$

Дальше,

$$A(t_\nu) = \sum_{k=1}^{K_0-1}\sum_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}\frac{e^{it_\nu\ln n}}{\sqrt{n}}+\sum_{2^{K_0}\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{e^{it_\nu\ln n}}{\sqrt{n}}. \tag{19}$$

Применяя преобразование Абеля ([4], стр. 98), в силу (5), (6),

$$\Big|\sum_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}\frac{e^{it_\nu\ln n}}{\sqrt{n}}\Big|<\frac{1}{2^{k/2}}\max_{2^k\leqslant c<2^{k+1}}|S(2^k,c)|<At_\nu^{\Delta}, \tag{20}$$

и, подобным способом,

$$(21)\qquad \Big|\sum_{2K_0\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{e^{it_\nu\ln n}}{\sqrt{n}}\Big|<At_\nu^{\Delta}.$$

Следовательно, из (15), в силу (18), (19), (20), (21), получается

$$(22)\qquad |Z(t_\nu)|<At_\nu^{\Delta}\ln t_\nu.$$

Ниже (см. (46)) покажем, что

$$(23)\qquad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}1\sim\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}.$$

Значит, в силу (22), (23),

$$(24)\qquad \Big|\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}Z(t_\nu)\Big|<AHT^{\Delta}\ln^2T.$$

Теперь, из (7), в силу (24), получается

Примечание. *Оценка (7) является нетривиальной, если H удовлетворяет условию*

$$(25)\qquad \frac{T^{1/8-\Delta/2}}{\ln T}=o(H),\qquad T\to+\infty.$$

Дальше, принимая во внимание оценку Ханеке ([1], стр. 429, 430)

$$(26)\qquad |S(a,b)|<A\sqrt{a}\,t^{6/37},$$

т.е. случай

$$(27)\qquad \Delta=6/37,$$

из теоремы, в силу (25), получается

Следствие 1. *Имеет место оценка*

$$(28)\qquad \Big|\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}Z(t_\nu)\Big|<AT^{61/296}\ln T,$$

нетривиальная при соблюдении условия

$$(29)\qquad \frac{T^{13/296}}{\ln T}=o(H).$$

2. В работе [2], стр. 177–184, Харди и Литтлвуд доказали, что имеет место теорема: отрезок

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{1/4+\varepsilon}),\qquad \varepsilon>0,\ T\geqslant T_0(\varepsilon),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

Положим

$$(30)\qquad H=T^{\bar{\Delta}},\qquad 61/296<\bar{\Delta}\leqslant 1/4.$$

Возникает следующий

Вопрос. *Какая информация о распределении малых значений модуля функции $\zeta(s)$, на отрезке*

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{\bar{\Delta}}),$$

получается из оценки (28)?

Пусть

$$31)\qquad I(\bar{\Delta})=\langle T,T+T^{\bar{\Delta}}\rangle.$$

Покажем что имеет место

Следствие 2. *Если промежуток $I(\bar{\Delta})$ не содержит нечетного нуля функции*

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it),$$

то существует

$$(32)\qquad AT^{\bar{\Delta}}\ln T$$

значений $\bar{t}_\nu\in I(\bar{\Delta})$, для которых

$$(33)\qquad |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\bar{t}_\nu)|<\frac{A}{T^{\bar{\Delta}-61/296}}.$$

Это следствие показывает, что отсутствие нечетного нуля функции

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)$$

в промежутке $I(\bar{\Delta})$, искупается тяжелым ограничением, налагаемым на совокупность значений

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it_\nu),\qquad t_\nu\in I(\bar{\Delta}).$$

Проверим упоминавшееся следствие.

(A) Прежде всего положим

$$(34)\qquad n(\bar{\Delta})=\frac{\sum_{t_\nu\in I(\bar{\Delta})}Z(t_\nu)}{\sum_{t_\nu\in I(\bar{\Delta})}1},$$

т.е., $n(\bar{\Delta})$ обозначает среднее арифметическое соответствующих значений $Z(t_\nu)$. Так как, в силу (23),

$$(35)\qquad \sum_{t_\nu\in I(\bar{\Delta})}1\sim\frac{1}{2\pi}T^{\bar{\Delta}}\ln T,$$

то, из (34), в силу (28) (при $H=T^{\bar{\Delta}}$) и (35), получается

$$|n(\Delta)|<\frac{A}{T^{\bar{\Delta}-61/296}}. \tag{36}$$

(B) Если промежуток $I(\Delta)$ не содержит нечетного нуля функции

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it),$$

то (см. (1)), функция $Z(t)$ сохраняет знак на промежутке $I(\Delta)$. Пусть, например,

$$Z(t)\geqslant 0,\quad t\in I(\Delta). \tag{37}$$

В этом случае, из (36), получается

$$0\leqslant n(\Delta)<\frac{A}{T^{\bar{\Delta}-61/296}}. \tag{38}$$

Теперь соотношения (32), (33) следуют из простого свойства среднего арифметического.

II. Простая сумма. В этой главе изучим сумму

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n). \tag{39}$$

1. Сначала сосредоточим внимание на расстоянии соседних членов последовательности $\{t_\nu\}$. Напомним ([5], стр. 102), что для величины $t_{\nu+1}-t_\nu$ имеет место следующая формула

$$t_{\nu+1}-t_\nu=\frac{\pi}{\frac{1}{2}\ln t_\nu-\frac{1}{2}\ln 2\pi+O(1/t_\nu)}+O\left(\frac{1}{t_\nu\ln^3 t_\nu}\right). \tag{40}$$

Если принять во внимание, что

$$\frac{1}{\ln(t_\nu/2\pi)}-\frac{1}{\ln(T/2\pi)}=O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \tag{41}$$

при $t_\nu\in\langle T,T+H\rangle$, то формулу (40) преобразуем так:

$$\begin{aligned} t_{\nu+1}-t_\nu&=\frac{\pi}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t_\nu}{2\pi}+O\left(\dfrac{1}{t_\nu}\right)}+O\left(\frac{1}{t_\nu\ln^3 t_\nu}\right)= \\ &=\frac{2\pi}{\ln\dfrac{t_\nu}{2\pi}}\,\frac{1}{1+O\left(\dfrac{1}{t_\nu\ln t_\nu}\right)}+O\left(\frac{1}{t_\nu\ln^3 t_\nu}\right)= \\ &=\frac{2\pi}{\ln\dfrac{t_\nu}{2\pi}}+O\left(\frac{1}{t_\nu\ln^2 t_\nu}\right)=\frac{2\pi}{\ln\dfrac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right). \end{aligned} \tag{42}$$

2. В этой части попробуем преобразовать сумму (39). Положим

$$t_{\bar\nu}=\min_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\{t_\nu\},\quad t_{\bar\nu+N}=\max_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\{t_\nu\}. \tag{43}$$

Следовательно, в силу (42),

$$t_{\bar\nu+k}-t_{\bar\nu+k-1}=\frac{2\pi}{\ln(T/2\pi)}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right)=A(T)+\delta,\qquad k=1,2,\dots,N, \tag{44}$$

и, складывая соотношения (44),

$$t_{\bar\nu+M}=t_{\bar\nu}+A(T)M+\delta M,\quad M=0,1,\dots,N. \tag{45}$$

Однако, в силу (42),

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}1\sim\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}, \tag{46}$$

значит, в силу (44), (45),

$$M\delta=O\left(\frac{H^2}{T\ln T}\right). \tag{47}$$

Теперь, в силу (45), (47), (применяя теорему Лагранжа)

$$\begin{aligned} \cos(t_{\bar\nu+M}\ln n)&=\cos\big(A(T)\ln n\cdot M+t_{\bar\nu}\ln n\big)+O\left(\frac{H^2\ln n}{T\ln T}\right)= \\ &=\cos\big(\omega(T,n)M+t_{\bar\nu}\ln n\big)+O\left(\frac{H^2\ln n}{T\ln T}\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Наконец, в силу (46), (48),

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)=(-1)^{\bar\nu}\sum_{M=0}^{N}(-1)^M\cos(\omega M+\varphi)+O\left(\frac{H^3\ln n}{T}\right), \tag{49}$$

где

$$\omega=\omega(T,n)=2\pi\frac{\ln n}{\ln(T/2\pi)},\quad \varphi=\varphi(n)=t_{\bar\nu}\ln n. \tag{50}$$

3. В этой части выразим сумму (39) посредством нескольких тригонометрических функций и остаточного члена.

Прежде всего

$$(51)\qquad \sum_{M=0}^{N}(-1)^M\cos(\omega M+\varphi)=$$

$$=\sum_{M=0}^{N}\cos\pi M\cdot\cos(\omega M+\varphi)=\sum_{M=0}^{N}\cos\big((\omega+\pi)M+\varphi\big)=\sum_{M=0}^{N}\cos(\varpi M+\varphi).$$

Дальше, (см. например [3], стр. 57)

$$(52)\qquad \sum_{M=0}^{N}\cos(\varpi M+\varphi)=\frac{\sin\big(\frac12\varpi(N+1)\big)\cos\big(\frac12\varpi N+\varphi\big)}{\sin\frac12\varpi},$$

и, если принять во внимание очевидные соотношения

$$\sin\left(\tfrac12\varpi N+\tfrac12\varpi\right)=\sin\tfrac12\varpi N\cos\tfrac12\varpi+\cos\tfrac12\varpi N\sin\tfrac12\varpi,$$
$$2\cos\left(\tfrac12\varpi N+\varphi\right)\cos\tfrac12\varpi N=\cos(\varpi N+\varphi)+\cos\varphi,$$
$$2\cos\left(\tfrac12\varpi N+\varphi\right)\sin\tfrac12\varpi N=\sin(\varpi N+\varphi)-\sin\varphi,$$

то,

$$(53)\qquad \sum_{M=0}^{N}\cos(\varpi M+\varphi)=\tfrac12\cos\varphi+\tfrac12\cos(\varpi N+\varphi)-$$
$$-\tfrac12\sin\varphi\operatorname{ctg}\tfrac12\varpi+\tfrac12\sin(\varpi N+\varphi)\operatorname{ctg}\tfrac12\varpi.$$

Наконец, из (39), в силу (49), (53) (принимая во внимание, что $\varpi=\omega+\pi$), получается

$$(54)\qquad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)=\frac{(-1)^{\bar\nu}}{2}\cos\varphi+\frac{(-1)^{N+\bar\nu}}{2}\cos(\omega N+\varphi)+$$
$$+\frac{(-1)^{\bar\nu}}{2}\sin\varphi\operatorname{tg}\tfrac12\omega+\frac{(-1)^{N+\bar\nu+1}}{2}\sin(\omega N+\varphi)\operatorname{tg}\tfrac12\omega+O\left(\frac{H^3\ln n}{T}\right).$$

III. Двойная сумма. Прежде всего, из (15), получается

$$(55)\qquad Z(t_\nu)=2(-1)^\nu\sum_{2\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{\cos(t_\nu\ln n)}{\sqrt n}+2(-1)^\nu+O(t_\nu^{-1/4}).$$

Дальше, в силу (23),

$$(56)\qquad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}Z(t_\nu)=$$
$$=2\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\ \sum_{2\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)}{\sqrt n}+O(1)+O\left(\frac{H\ln T}{\sqrt[4]{T}}\right).$$

Однако (напомним, что $0<H\leqslant\sqrt[4]{T}$)

$$(57)\qquad \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}-\sqrt{\frac{T}{2\pi}}=\frac{\dfrac{H}{2\pi}}{\sqrt{\dfrac{T+H}{2\pi}}+\sqrt{\dfrac{T}{2\pi}}}<A\frac{H}{\sqrt T}=o(1),$$

и, следовательно, в промежуток

$$\left\langle\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\ \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}\right\rangle$$

попадает не более одного целого положительного числа. Значит

$$(58)\qquad \sum_{2\leqslant n\leqslant\sqrt{t_\nu/2\pi}}\frac{(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)}{\sqrt n}=\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}}\frac{(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)}{\sqrt n}+O(T^{-1/4}).$$

Теперь, из (56), в силу (23), (58),

$$(59)\qquad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}Z(t_\nu)=$$
$$=2\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\ \sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}}\frac{(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)}{\sqrt n}+O\left(\frac{H\ln T}{\sqrt[4]{T}}\right)+O(1)=$$
$$=2\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}}\frac{1}{\sqrt n}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n)+O(\ln T),$$

(при перемене порядка суммирования учтено, что границы переменных суммирования — постоянные). Величина

$$(60)\qquad W(T,H)=\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}}\frac{1}{\sqrt n}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos(t_\nu\ln n),$$

это двойная сумма, которую нам нужно оценить.

Из (60), в силу (54), получается

$$(61)\qquad W(T,H)=$$
$$=\frac{(-1)^{\bar\nu}}{2}\sum\frac{\cos\varphi}{\sqrt n}+\frac{(-1)^{N+\bar\nu}}{2}\sum\frac{\cos(\omega N+\varphi)}{\sqrt n}+\frac{(-1)^{\bar\nu}}{2}\sum\frac{\operatorname{tg}\frac12\omega}{\sqrt n}\sin\varphi+$$
$$+\frac{(-1)^{N+\bar\nu+1}}{2}\sum\frac{\operatorname{tg}\frac12\omega}{\sqrt n}\sin(\omega N+\varphi)+O\left(\frac{H^3}{T}\sum_{2\leqslant n\leqslant\sqrt{T/2\pi}}\frac{\ln n}{\sqrt n}\right).$$

1. В этой части получим оценки для следующих сумм

(62)
$$\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{n}},$$

(63)
$$\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\cos(\omega N+\varphi)}{\sqrt{n}}.$$

Так как, см. (50),

(64)
$$\begin{cases}\varphi = t_{\nu}\ln n,\\ \omega N+\varphi = \left(\dfrac{2\pi N}{\ln(T/2\pi)}+t_{\bar\nu}\right)\ln n = T_{\bar\nu}\ln n\end{cases}$$

и, в силу (43), (46),

(65)
$$\frac{2\pi N}{\ln(T/2\pi)} = O(H) = O(\sqrt[4]{T}),$$

то

(66)
$$t_{\bar\nu}\sim T,\quad T_{\bar\nu}\sim T,\quad T\to+\infty.$$

В силу этого достаточно оценить, например, сумму (62), или,

(67)
$$B(t_{\bar\nu}) = \sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{e^{it_{\bar\nu}\ln n}}{\sqrt{n}}.$$

Однако, к этой сумме применим способ (16)–(21), так что (используя также (66))

(68)
$$|B(t_{\bar\nu})| < At_{\bar\nu}^{\Delta}\ln t_{\bar\nu} < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T.$$

Подобным способом получается

(69)
$$|B(T_{\bar\nu})| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T.$$

Значит, имеет место

Лемма 1.

(70)
$$\left|\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{n}}\right| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T,$$

(71)
$$\left|\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\cos(\omega N+\varphi)}{\sqrt{n}}\right| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T.$$

2. В этой части (имея в виду применение преобразования Абеля) изучим последовательность

(72)
$$\left\{\frac{\operatorname{tg}\frac12\omega}{\sqrt{n}}\right\},$$

где, см. (50),

(73)
$$\frac{\omega}{2} = \pi\frac{\ln n}{\ln(T/2\pi)}.$$

Очевидно,

(74)
$$\frac{d}{dn}\,\frac{\operatorname{tg}\frac12\omega}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{n^{3/2}\cos^2\dfrac{\omega}{2}\cdot\ln\dfrac{T}{2\pi}} - \frac{\operatorname{tg}\frac12\omega}{2n^{3/2}} = \frac{\dfrac{4\pi}{\ln(T/2\pi)}-\sin\omega}{4n^{3/2}\cos^2\frac12\omega},$$

и производная обращается в нуль для значения

(75)
$$\omega^* = \arcsin\frac{4\pi}{\ln(T/2\pi)} = \frac{4\pi}{\ln(T/2\pi)} + O\left(\frac{1}{\ln^3 T}\right).$$

Однако, в силу (73),

(76)
$$\ln n^* = 2+O\left(\frac{1}{\ln^2 T}\right),$$

т.е.

(77)
$$n^*\sim e^2,\quad T\to+\infty.$$

Значит, последовательность (72) убывает при $n\geqslant 8$.

3. В этой части попробуем оценить сумму

(78)
$$C(t_{\bar\nu}) = \sum_{8\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\operatorname{tg}\frac12\omega}{\sqrt{n}}\,e^{it_{\bar\nu}\ln n}.$$

Пусть $0<\varepsilon<\frac12$. Положим

(79)
$$\sum_{8\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} = \sum_{8\leqslant n\leqslant (T/2\pi)^{1/2-\varepsilon}} + \sum_{(T/2\pi)^{1/2-\varepsilon}<n<\sqrt{T/2\pi}} = S_1+S_2.$$

(A) Сначала получим оценку для S_1. Так как

(80)
$$\frac{d}{dn}\operatorname{tg}\tfrac12\omega = \frac{\pi}{n\cos^2\dfrac{\omega}{2}\cdot\ln\dfrac{T}{2\pi}} > 0,$$

то последовательность

(81)
$$\{\operatorname{tg}\tfrac12\omega\}$$

возрастает. Если положим

(82)
$$\bar n(\varepsilon) = \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/2-\varepsilon}\right] \sim \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/2-\varepsilon},$$

т.е.

$$\ln\bar n(\varepsilon) \sim (\tfrac12-\varepsilon)\ln\frac{T}{2\pi}, \tag{83}$$

то, в силу (73), (83),

$$\bar\omega = \omega(T, \bar n) < 2\pi(1+\varepsilon)(\tfrac12-\varepsilon) < \pi(1-\varepsilon). \tag{84}$$

Следовательно,

$$\mathrm{tg}\tfrac12\omega \leqslant \mathrm{tg}\tfrac12\bar\omega < \mathrm{tg}(\tfrac12\pi-\tfrac12\pi\varepsilon) = \mathrm{ctg}\tfrac12\pi\varepsilon, \quad n \leqslant \bar n(\varepsilon). \tag{85}$$

Теперь,

$$|S_1| < \mathrm{ctg}\tfrac12\pi\varepsilon \sum_{8\leqslant n\leqslant (T/2\pi)^{1/2-\varepsilon}}{}' \frac{1}{\sqrt n} < A\,\mathrm{ctg}\tfrac12\pi\varepsilon\cdot T^{1/4-\varepsilon/2}. \tag{86}$$

(B) Дальше, получим оценку для S_2. Начнем с преобразования Абеля этой суммы:

$$|S_2| < \frac{\mathrm{tg}\frac12\omega(T, \bar n+1)}{\sqrt{\bar n+1}} \max_{(T/2\pi)^{1/2-\varepsilon}<c<\sqrt{T/2\pi}} D(\bar n+1, c) < \tag{87}$$
$$< \frac{\mathrm{tg}\frac12\bar\omega}{\sqrt{\bar n}} \max_{(T/2\pi)^{1/2-\varepsilon}<c<\sqrt{T/2\pi}} D(\bar n+1, c),$$

где

$$D(\bar n+1, c) = \sum_{\bar n+1\leqslant n\leqslant c} e^{it_\nu\ln n}. \tag{88}$$

Подразделяя сумму $D(\bar n+1, c)$ на $O(\ln T)$ элементарных тригонометрических сумм согласно (16)–(20), получается

$$|D(\bar n+1, c)| < A(\Delta)T^{1/4+\Delta}\ln T, \tag{89}$$

и, следовательно, из (87), в силу (82), (85), (89),

$$|S_2| < A\,\frac{\mathrm{ctg}\frac12\pi\varepsilon}{T^{1/4-\varepsilon/2}}\cdot T^{1/4+\Delta}\ln T = A\,\mathrm{ctg}\tfrac12\pi\varepsilon\cdot T^{\Delta+\varepsilon/2}\ln T. \tag{90}$$

(C) Наконец фиксируем ε согласно условию (см. (86), (90))

$$\tfrac14-\tfrac12\varepsilon = \Delta+\tfrac12\varepsilon,$$

т.е.

$$\varepsilon = \tfrac14-\Delta, \quad \Delta+\tfrac12\varepsilon = \tfrac18+\tfrac12\Delta. \tag{91}$$

Теперь, из (79), в силу (86), (90), (91),

$$|C(t_\nu)| < A\,\mathrm{ctg}\tfrac12\pi(\tfrac14-\Delta)\cdot T^{1/8+\Delta/2}\ln T = A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}\ln T. \tag{92}$$

Значит, имеет место

Лемма 2.

$$\Bigl|\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\mathrm{tg}\frac12\omega}{\sqrt n}\sin\varphi\Bigr| < A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}\ln T, \tag{93}$$

$$\Bigl|\sum_{2\leqslant n<\sqrt{T/2\pi}} \frac{\mathrm{tg}\frac12\omega}{\sqrt n}\sin(\omega N+\varphi)\Bigr| < A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}\ln T, \tag{94}$$

4. В этой части приведем

Доказательство теоремы. Прежде всего, из (61), в силу Лемм 1, 2 (напомним, что $0 < H \leqslant \sqrt[4]{T}$, $\ln n < A\ln T$), получается

$$|W(T, H)| < A(\Delta)(T^\Delta+T^{1/8+\Delta/2})\ln T + A\ln T < \tag{95}$$
$$< A(\Delta)(T^\Delta+T^{1/8+\Delta/2})\ln T.$$

Однако, при $0 < \Delta < \frac14$, имеет место

$$\Delta < 1/8+\Delta/2,$$

т.е.

$$|W(T, H)| < A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}\ln T. \tag{96}$$

Наконец, из (59), в силу (60), (96), получается (7).

Литература

[1] W. Haneke, *Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac12+it)$*, Acta Arith. 8 (1963), стр. 357–430.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.

[3] Р. В. Хемминг, *Численные методы*, Москва 1972.

[4] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[5] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 21. 1. 1975
и в исправленной форме 1. 4. 1975 (667)