Conspectus materiae tomi XXXI, fasciculi 1

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange — Address of the Editorial Board and of the exchange — Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches — Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Variation de la hauteur sur une famille de courbes elliptiques particulière

par

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE (Paris)

Soit $\mathscr{E}$ une courbe elliptique définie sur $\boldsymbol{Q}$, et φ un $\boldsymbol{Q}$-morphisme e $\mathscr{E}$ dans un espace projectif. Dans la démonstration du théorème de [ordell–Weil, le caractère quadratique de la hauteur associée h_φ joue n rôle très important: c'est ce qui permet de faire la descente infinie 3], p. 55). Cela permet aussi d'obtenir une estimation asymptotique u nombre de points rationnels de hauteur plus petite qu'un nombre onné ([8]). Sur les surfaces cubiques définies sur $\boldsymbol{Q}$, nous avons des roblèmes analogues. Segre ([9]) pose la question: Peut-on trouver un ombre fini de points rationnels sur une surface cubique donnée, tels u'à partir d'eux on puisse obtenir tous les autres points rationnels de surface par les procédés de la corde et du plan tangent? On aimerait ussi avoir une estimation du nombre de points rationnels de hauteur lus petite qu'un nombre donné sur une surface cubique donnée.

Il semble donc utile de voir comment se comporte la hauteur par s transformations rationnelles d'une surface cubique en elle-même. n particulier, on sait que si l'on coupe la surface par une droite rationelle passant par un point rationnel de la surface, droite n'étant pas tuée sur la surface, on obtient une famille rationnelle de courbes ellipiques; la multiplication par deux sur la fibre générique définit une appliation rationnelle θ de la surface en elle-même. Lang, dans [3], p. 90, ose le problème de savoir si la hauteur se comporte de façon quadratique uniformément" sur une famille de variétés abéliennes. Dans I nous ormulons cette question de manière précise et nous y répondons par a négative. Cependant, faute de quasi-égalités (égalités à des $O(1)$ près), ans le cas des surfaces du type $X^3+Y^3+Z^3+qT^3 = 0$, des calculs directs ous donnent des inégalités (I, c).

Monsieur Néron m'a fait remarquer que c'est la présence de points ixes dans le système linéaire inverse des sections hyperplanes, par θ, ui empêche d'appliquer [3], p. 64 pour obtenir des quasi-égalités. Dans II ous donnons, grâce à la théorie des systèmes linéaires à points bases, développée par Nagata et Manin ([5]), une méthode générale qui en III nous permet d'obtenir les inégalités de I, c. On voit aussi en quoi ces inégalités sont, en un certain sens, les meilleures possibles et pourquoi on ne pouvait pas obtenir de quasi-égalités. Enfin dans IV, on essaye de définir une hauteur de Tate sur une famille de courbes elliptiques du type indiqué plus haut, par le procédé de limite exposé dans [6]. On applique les inégalités de I, c pour obtenir un encadrement de la différence entre la hauteur naturelle et la hauteur limite.

Depuis la rédaction de cet article, j'ai eu connaissance d'un article de Zarhin et Manin ([11]) sur le problème de la variation de la hauteur sur une famille de variétés abéliennes. Ces auteurs obtiennent, dans un cadre „naturel", dû à Mumford, des encadrements pour la différence entre la hauteur de Tate et la hauteur naturelle, en fonction des paramètres.

La famille de courbes elliptiques ici considérée pourra paraître bien particulière en comparaison avec celles de [11]. Cependant, le présent article donne d'une part le premier exemple d'un encadrement optimal, d'autre part montre comment la théorie des systèmes linéaires à points bases permet d'obtenir des estimations fines pour les hauteurs. Il serait ntéressant de savoir si la même méthode peut être utilisée pour d'autres amilles de courbes elliptiques.

I. Une question de Lang

(a) Notations, et énoncé du problème. Par h_{P^n} on désigne la hauteur logarithmique naturelle sur $\boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$, le logarithme de la hauteur définie en [3], p. 45. Si X est une variété algébrique définie sur $\boldsymbol{Q}$, et φ un $\boldsymbol{Q}$-morphisme $X\to\boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$, on note h_φ la fonction sur $X(\boldsymbol{Q})$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^+$ définie par

$$P\in X(\boldsymbol{Q})\mapsto h_{P^n}(\varphi(P)).$$

Quand on ne précise pas sur quel corps est définie une variété ou une application rationnelle, il est entendu que ce corps est $\boldsymbol{Q}$ (sauf exceptions, évidentes d'après le contexte).

Par famille de courbes elliptiques, on entend ici la donnée d'un quadruplet (F, X, π, σ) où F est une surface complète non singulière, X une courbe ayant ces mêmes propriétés, π est un morphisme dominant dont les fibres sont toutes de dimension 1, σ est une section de π, et la fibre générique $Y = F\times_X \operatorname{Spec} K(X)$ est une courbe géométriquement intègre de genre 1 sur le corps des fonctions rationnelles $K(X)$ de X; cette courbe est munie grâce à σ d'une structure de courbe elliptique.

On sait qu'alors la multiplication par 2 de Y dans Y s'étend en une application rationnelle de F dans F, que nous notons θ. Cette application

est morphique sur $\pi^{-1}(X_S)$, où $X_S = X-S$, et S est l'ensemble fini des points fermés de X au-dessus desquels la fibre est dégénérée.

Etant donné a dans X, respectivement dans $X(\overline{\boldsymbol{Q}})$, on note F_a la courbe $F\times_X \operatorname{Spec}\varkappa(a)$ (on note $\varkappa(a)$ le corps résiduel de X en a), respectivement $F\times_X \operatorname{Spec}\overline{\boldsymbol{Q}}$, où les produits fibrés sont pris par rapport aux flèches définissant le point fermé a, respectivement le point géométrique.

Enfin étant donné ξ une application rationnelle d'une surface F non singulière dans une variété complète, on note Ω_ξ l'ouvert de définition de ξ. On sait qu'il est de la forme F moins un nombre fini de points fermés.

Soit Ω un ouvert inclus dans Ω_θ et stable par θ (par exemple $\Omega = \pi^{-1}(X_S)$), et soit f une fonction définie sur $\Omega(\boldsymbol{Q})$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}$. On dira que f satisfait la propriété (P) si l'on a:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists C\in\boldsymbol{R}\ \forall x\in\Omega(\boldsymbol{Q})\qquad (1-\varepsilon)4f(x)-C\leqslant f(\theta x)\leqslant(1+\varepsilon)4f(x)+C.$$

Problème. Etant donné une famille de courbes elliptiques $(F, \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}, \pi, \sigma)$ et un morphisme $\varphi\colon F\to\boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$, existe-t-il une constante $r\in\boldsymbol{R}$ telle que $h_\varphi - r(h_{P^1}\circ\pi)$ vérifie sur $\pi^{-1}(\boldsymbol{P}^1_S)$ la propriété (P)?

Remarque. La question de [3] était, semble-t-il, la suivante: sous les mêmes hypothèses, h_φ vérifie-t-il la propriété (P)? Il est facile, en utilisant le produit d'une courbe elliptique par $\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$, de voir qu'il n'en est rien, et qu'il faut faire intervenir la hauteur du paramètre dans l'énoncé du problème.

(b) Le contre-exemple. Par Σ on désigne la surface cubique d'équation $X^3+Y^3+Z^3+3T^3=0$ dans $\boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}}$ avec coordonnées homogènes (X, Y, Z, T). Pour F on prend la surface éclatée de Σ aux points de Σ situés sur la droite $Z=T=0$, c'est-à-dire la surface donnée dans l'espace biprojectif $\boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}}\times_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$ avec coordonnées bihomogènes $(X, Y, Z, T; u, v)$ par les équations:

$$\begin{cases} X^3+Y^3+Z^3+3T^3=0,\\ Zv-Tu=0.\end{cases}$$

Pour courbe de base, on prend $\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$, et pour π on prend le morphisme induit sur F par la projection de $\boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}}\times_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$ sur le second facteur. Pour σ, on prend le morphisme décrit sur les points de $\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$ à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{Q}}$ par:

$$\sigma\colon (u, v)\mapsto(1, -1, 0, 0; u, v).$$

En termes usuels, on fibre la surface cubique Σ par le pinceau de plans passant par la droite $Z=T=0$.

LEMME 1. *Soit M dans $F(\boldsymbol{Q})$, de coordonnées bihomogènes $(X, Y, Z, T; u, v)$, et appartenant à la fibre non dégénérée F_a. Si $X = Y$, ce point est d'ordre 2 sur la courbe F_a.*

Ceci résulte du calcul de θ, donné sur les points à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{Q}}$ de Ω_θ par:

$$\theta\colon (X, Y, Z, T; u, v)$$
$$\mapsto \big(Y^4+2YX^3,\ -(X^4+2XY^3),\ Z(Y^3-X^3),\ T(Y^3-X^3);\ u,\ v\big)$$

(notons ici que Ω_θ qui est la réunion des ouverts $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ est stable par θ).

LEMME 2. *Il existe une infinité de points $x_a \in \Sigma(\boldsymbol{Q})$ indexés sur un ensemble infini $E \subset \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q})$, tels que pour $a \in E$ la fibre F_a est non dégénérée, et le point $(x_a, a) \in F_a(\boldsymbol{Q})$ est un point d'ordre 2 sur F_a.*

Démonstration. La courbe $\mathscr{C}$ définie dans $\boldsymbol{P}^2_{\boldsymbol{Q}}$ avec coordonnées homogènes (X, Z, T) par l'équation $2X^3+Z^3+3T^3 = 0$ a le point rationnel $(1, 1, -1)$. D'après un théorème de Hurwitz (cf. [7], p. 78), elle a donc une infinité de points rationnels sur $\boldsymbol{Q}$. La courbe $\mathscr{C}$ contient donc une infinité de points rationnels (X, Z, T) tels que $(Z, T) \neq (0, 0)$ et tels que de plus la fibre F_a de paramètre $a = (Z, T)$ soit non dégénérée. Par ailleurs pour $(Z, T) \in \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q})$ donné, il existe au plus trois points (X, Z, T) sur la courbe $\mathscr{C}$. Il existe donc un ensemble infini $E \subset \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q})$, et une infinité de points $(X_a, Z_a, T_a) \in \mathscr{C}(\boldsymbol{Q})$ où a varie dans E, tels que F_a est non dégénérée, et (Z_a, T_a) sont des coordonnées homogènes pour le point a. Ceci nous dit que les points $x_a = (X_a, X_a, Z_a, T_a)$ satisfont les conditions de l'énoncé, puisque, d'après le lemme 1, pour $a \in E$, le point (x_a, a) est un point de $F_a(\boldsymbol{Q})$ d'ordre deux.

Soit φ le plongement de F dans $\boldsymbol{P}^7_{\boldsymbol{Q}}$ obtenu via le plongement de Segre:

$$F \subset \boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}} \times_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \hookrightarrow \boldsymbol{P}^7_{\boldsymbol{Q}}.$$

Pour $(x, a) \in F(\boldsymbol{Q}) \subset \boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}) \times \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q})$, on a:

$$h_\varphi(x, a) = h_{\boldsymbol{P}^3}(x) + h_{\boldsymbol{P}^1}(a).$$

PROPOSITION. *Il n'existe aucun $r \in \boldsymbol{R}$ tel que $h_\varphi - r(h_{\boldsymbol{P}^1} \circ \pi)$ vérifie la propriété* (P).

Démonstration. Supposons qu'il existe un tel r, et appliquons (P) aux points (x_a, a) du lemme 2, qui appartiennent tous à $\Omega_\theta(\boldsymbol{Q})$. En utilisant l'égalité $\theta(x_a, a) = \sigma(a)$ point de coordonnées bihomogènes $(1, -1, 0, 0; a)$ on obtient $h_\varphi\big(\theta(x_a, a)\big) = h_{\boldsymbol{P}^1}(a)$. La propriété (P) s'écrit donc:

$$(*)\qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists C \in \boldsymbol{R}\ \forall a \in E$$
$$4(1-\varepsilon)[h_{\boldsymbol{P}^3}(x_a) + (1-r)h_{\boldsymbol{P}^1}(a)] - C \leqslant (1-r)h_{\boldsymbol{P}^1}(a)$$
$$\leqslant 4(1+\varepsilon)[h_{\boldsymbol{P}^3}(x_a) + (1-r)h_{\boldsymbol{P}^1}(a)] + C.$$

Montrons que ceci implique $r > 1$. De la première inégalité, on tire:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C \in \boldsymbol{R}\ \forall a \in E$$
$$4(1-\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^3}(x_a) \leqslant (r-1)(3-4\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^1}(a) + C.$$

Choisissons $\varepsilon \in]0, \frac{3}{4}[$. Si r était inférieur ou égal à 1, comme on a $h_{\boldsymbol{P}^1}(a) \geqslant 0$, on aurait $h_{\boldsymbol{P}^3}(x_a) \leqslant \dfrac{C}{4(1-\varepsilon)}$, ce qui contredit l'existence d'une infinité de points x_a.

Posons $r-1 = a > 0$. Les inégalités $(*)$ donnent:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C \in \boldsymbol{R}\ \forall a \in E$$
$$4(1-\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^3}(x_a) \leqslant a(3-4\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^1}(a) + C,$$
$$a(3+4\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^1}(a) - C \leqslant 4(1+\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^3}(x_a).$$

Fixons $\varepsilon \in]0, 1[$, multiplions la première inégalité par $1+\varepsilon$, la seconde par $1-\varepsilon$, nous obtenons:

$$\exists C \in \boldsymbol{R}\ \forall a \in E$$
$$a(1-\varepsilon)(3+4\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^1}(a) - C(1-\varepsilon) \leqslant a(3-4\varepsilon)(1+\varepsilon)h_{\boldsymbol{P}^1}(a) + C(1+\varepsilon)$$

soit:

$$\forall a \in E \qquad a\varepsilon h_{\boldsymbol{P}^1}(a) \leqslant C$$

ce qui contredit le fait que E est infini [1].

(c) Inégalités sur les hauteurs. Prenons une surface cubique Σ dans $\boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}}$ d'équation $X^3+Y^3+Z^3+qT^3 = 0$ avec $q \in \boldsymbol{Q}$, $q \neq 0$, et fibrons-la par le pinceau des plans $\lambda Z + \mu T = 0$. Ceci définit une „famille" de courbes elliptiques ayant toutes pour zéro le point $(1, -1, 0, 0)$. La multiplication par 2 sur la fibre générique induit une application rationnelle de la surface cubique dans elle même:

$$\theta\colon (X, Y, Z, T) \mapsto \big(Y^4+2YX^3,\ -(X^4+2XY^3),\ Z(Y^3-X^3),\ T(Y^3-X^3)\big).$$

Les calculs de hauteurs sur la „vraie" famille définie au début de (b) se déduisent par des modifications évidentes des calculs de hauteurs sur la surface cubique ci-dessus. On fera donc les calculs sur la surface Σ.

Quand on cherche à évaluer la hauteur de θP, où $P \in \Omega_\theta(\boldsymbol{Q})$, relative au plongement naturel de Σ dans $\boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}}$, on est amené à introduire les applications rationnelles suivantes, de Σ dans $\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$:

$$\varphi\colon (X, Y, Z, T) \mapsto (X, Y),$$
$$\psi\colon (X, Y, Z, T) \mapsto (Z, T).$$

[1] Ce contre-exemple a été trouvé lors d'un séjour à l'université de Cambridge (Angleterre) que l'auteur remercie pour son hospitalité.

On établit, par des calculs de PGCD et des manipulations sur les polynômes, les inégalités suivantes, valables dès que les deux membres de chaque inégalité sont définis, c'est-à-dire valables pour $P \in \Sigma(\boldsymbol{Q})$ appartenant à l'ouvert de définition des applications rationnelles concernées:

(i) $h_{\boldsymbol{P}^3}\big(\theta(P)\big) \leqslant 3h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big) + h_{\boldsymbol{P}^3}(P) + C_1$,

(ii) $h_{\boldsymbol{P}^3}\big(\theta(P)\big) \geqslant 4h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big) + C_2$,

(iii) $h_{\boldsymbol{P}^3}(P) \leqslant h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big) + h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\psi(P)\big) + C_3$
valable si de plus P vérifie $Z^3 + qT^3 \neq 0$ (²),

(iv) $4h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big) - C_4 \leqslant h_{\boldsymbol{P}^1}\Big(\varphi\big(\theta(P)\big)\Big) \leqslant 4h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big) + C_4$

où les C_i sont des constantes réelles indépendantes du point P. Les calculs faits pour établir ces inégalités sont analogues à ceux de [1], pp. 260–261. En substance, ils consistent à écrire explicitement le Nullstellensatz. Ces calculs sont longs, car ils imposent la considération d'un assez grand nombre de cas. On n'y comprend pas très bien non plus comment s'introduisent φ et ψ ni pourquoi on ne peut pas trouver mieux que des inégalités pour estimer $h_{\boldsymbol{P}^3}\big(\theta(P)\big)$ — étant entendu que (iv) est considérée comme une égalité.

II. Hauteurs associées aux systèmes linéaires à points bases

(a) Rappels de géométrie des surfaces.

LEMME 1. (α) *Soit F une surface complète non singulière définie sur $\boldsymbol{Q}$. Soit $\varphi\colon F \to \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$ une application rationnelle. Il existe une surface F' complète non singulière définie sur $\boldsymbol{Q}$, un $\boldsymbol{Q}$-morphisme birationnel $p\colon F' \to F$, et un $\boldsymbol{Q}$-morphisme $h\colon F' \to \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$ tels que le diagramme d'applications rationnelles suivant soit commutatif:*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} F' \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "h"] & \\ F \arrow[r, "\varphi"'] & \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}. \end{tikzcd}$$

(β) *Etant donné deux tels diagrammes associés à un même (F, φ), il existe un autre diagramme associé à (F, φ), qui les coiffe (en un sens évident).*

(Cf. par exemple [4], § 0, lemmes 0.1 et 0.2 pour les références.)

Dans ce qui suit, on suppose connu le langage des „systèmes linéaires à points bases", tel qu'on le trouve exposé dans [5], § 5. En particulier, nous utilisons les objets $Z(F)$, $Z^+(F)$ et $Z^{++}(F)$ associés à une surface F complète non singulière définie sur $\boldsymbol{Q}$, ainsi que l'isomorphisme de $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$-modules $Z(F) \xrightarrow{\sim} N(F) \oplus Z_0(F)$. A toute $\boldsymbol{Q}$-application rationnelle $F \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$ est associé un élément $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$-invariant de $Z^{++}(F)$ de la manière suivante: un diagramme (*) définit l'élément $h^*\big(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}}(1)\big)$ dans $N^{++}(F')$,

(²) L'exemple des points $(m, -m, n, -n)$ où $(m, n) \in \boldsymbol{Z}^2$ sur $X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0$ montre la nécessité de cette condition.

cf. par exemple [2], pp. 14–15. Le lemme 1(β) montre que l'élément de $Z^{++}(F)$ associé est indépendant du choix du diagramme (*).

(b) Hauteurs. Etant donné une application rationnelle $\varphi\colon F \to \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$, et son ouvert de définition Ω_φ, on appelle, par abus de langage, hauteur sur F associée à φ, et on note encore h_φ, la hauteur logarithmique h_φ définie sur $\Omega_\varphi(\boldsymbol{Q})$.

Soit f une fonction à valeurs dans $\boldsymbol{R}$ définie sur $\Omega_1(\boldsymbol{Q})$, où Ω_1 est un ouvert de F; soit de même g une fonction à valeurs dans $\boldsymbol{R}$ définie sur $\Omega_2(\boldsymbol{Q})$, où Ω_2 est un ouvert de F.

On dit que f est quasi-inférieure à g (noté $f \dashv g$) s'il existe un ouvert $\Omega \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ et une constante $C \in \boldsymbol{R}$ tels que l'on ait:

$$\forall P \in \Omega(\boldsymbol{Q}) \qquad f(P) \leqslant g(P) + C.$$

On dit que f et g sont équivalentes (noté $f \sim g$) si l'on a simultanément $f \dashv g$ et $g \dashv f$.

On appelle S-ouvert (ouvert spécial) un ouvert de F de la forme F moins un nombre fini de points. Si f et g sont telles que Ω_1 et Ω_2 soient des S-ouverts, on dit que f est S-quasi-inférieure à g (noté $f \underset{S}{\dashv} g$) si l'on peut prendre pour Ω dans la définition ci-dessus un S-ouvert, et on dit que f et g sont S-équivalentes (noté $f \underset{S}{\sim} g$) si l'on a simultanément $f \underset{S}{\dashv} g$ et $g \underset{S}{\dashv} f$.

PROPOSITION 1. *Si $\varphi_1\colon F \to \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}}$ et $\varphi_2\colon F \to \boldsymbol{P}^m_{\boldsymbol{Q}}$ sont deux applications rationnelles telles que les éléments de $Z^{++}(F)$ associés soient les mêmes, h_{φ_1} est S-équivalente à h_{φ_2}.*

PROPOSITION 2. *Soient φ, ψ, χ des applications rationnelles de F dans des espaces projectifs, de systèmes respectifs associés λ, μ, ν dans $Z^{++}(F)$. Si l'on a $\lambda + \mu = \nu$, on a $h_\varphi + h_\psi \underset{S}{\sim} h_\chi$.*

PROPOSITION 3. *Soient φ, ψ deux applications rationnelles de F dans des espaces projectifs, de systèmes respectifs associés λ et μ. Si l'on a $\lambda - \mu \in Z^+(F)$, on a $h_\psi \dashv h_\varphi$.*

COROLLAIRE. *Soient φ et ψ deux applications comme ci-dessus, de systèmes associés λ et μ. S'il existe un entier n strictement positif tel que: $n(\lambda - \mu) \in Z^+(F)$, on a $h_\psi \dashv h_\varphi$.*

Démonstration de la proposition 1. Soient deux diagrammes (*) associés respectivement à (F, φ_1) et (F, φ_2):

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "h_1"] & \\ F \arrow[r, "\varphi_1"'] & \boldsymbol{P}^n_{\boldsymbol{Q}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_2 \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "h_2"] & \\ F \arrow[r, "\varphi_2"'] & \boldsymbol{P}^m_{\boldsymbol{Q}}. \end{tikzcd}$$

Il existe par hypothèse F' complète, non singulière, définie sur $\boldsymbol{Q}$, et des $\boldsymbol{Q}$-morphismes birationnels r_1, r_2, p, tels que le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] \arrow[dd, "p"] & \\ F_1 \arrow[dr, "p_1"'] & & F_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

commute, et tels que, dans $N^{++}(F')$, on ait:

$$r_2^*\big(h_2^*(O_{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^m}(1))\big) = r_1^*\big(h_1^*(O_{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^n}(1))\big).$$

Sur F', $h_1 \circ r_1$ et $h_2 \circ r_2$ sont deux morphismes dans des espaces projectifs tels que les systèmes linéaires associés soient formés de diviseurs deux à deux équivalents. D'après un théorème de Weil ([3], chap. IV, property 3), ceci implique que $h_{h_1 \circ r_1}$ et $h_{h_2 \circ r_2}$ sont équivalentes au sens de [3], p. 61 (version logarithmique):

$$\exists C \in \boldsymbol{R}\ \ \forall P \in F'(\boldsymbol{Q}) \qquad |h_{h_1 \circ r_1}(P) - h_{h_2 \circ r_2}(P)| \leqslant C.$$

Des égalités $\varphi_i = h_i \circ r_i \circ p^{-1}$ $(i = 1, 2)$ résulte que le S-ouvert $\Omega_{p^{-1}}$ est inclus dans $\Omega_{\varphi_1} \cap \Omega_{\varphi_2}$. En transcrivant au moyen de p^{-1} l'inégalité ci-dessus, on obtient le résultat annoncé.

Démonstration de la proposition 2. Elle est analogue: on utilise un morphisme birationnel $p\colon F' \to F$ tel que $\varphi \circ p$, $\psi \circ p$, et $\chi \circ p$ s'étendent en des morphismes, définissant des systèmes linéaires sans points fixes, de classes respectives L, M, N dans $N^{++}(F')$, avec $L + M = N$. En utilisant, sur F', les propriétés 1 et 3 du chapitre IV de [3], et en transcrivant sur F au moyen de p^{-1}, on obtient:

$$\exists C \in \boldsymbol{R}\ \ \forall P \in \Omega_{p^{-1}}(\boldsymbol{Q}) \qquad |h_\varphi(P) + h_\psi(P) - h_\chi(P)| \leqslant C.$$

Démonstration de la proposition 3. Soit F' et $p\colon F' \to F$ vérifiant: p birationnel, λ, μ proviennent de (on dira abusivement „sont dans") $N^{++}(F')$ et $\nu = \lambda - \mu$ est dans $N^{+}(F')$. Soit D un diviseur de F' positif ou nul dont la classe est ν dans $N(F')$. Soit E un diviseur positif ou nul de F' de classe μ. Soit $K(F')$ le corps des fractions rationnelles du $\boldsymbol{Q}$-schéma F'. On considère l'espace vectoriel de dimension finie:

$$\mathscr{L}(E) = \{f \in K(F')\ \ (f) + E \geqslant 0\}$$

où (f) dénote le diviseur de f. Si $(1, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de cet espace vectoriel, l'hypothèse $\mu \in N^{++}(F')$ dit que l'élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,\boldsymbol{Q}}\big(\mathrm{Spec}\,K(F'), \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^n\big)$$

ainsi défini, c'est-à-dire l'application rationnelle de F' dans $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^n$ définie par la donnée de la base ci-dessus, s'étend en un morphisme ψ_1 de F' dans $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^n$, dont le système linéaire associé a pour classe μ dans $N^{++}(F')$.

Le diviseur $E + D$ a pour classe $\mu + \nu = \lambda$. De $D \geqslant 0$, il résulte:

$$\forall f \in K(F') \qquad (f) + E \geqslant 0 \Rightarrow (f) + E + D \geqslant 0$$

soit $\mathscr{L}(E) \subset \mathscr{L}(E+D)$. On peut donc choisir pour base de $\mathscr{L}(E+D)$ une base de la forme $(1, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+r})$ où les f_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont les mêmes que ci-dessus. De même que précédemment, cette base définit une application rationnelle de F' dans $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^{n+r}$ qui s'étend en un morphisme φ_1 de F' dans $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^{n+r}$ dont le système linéaire associé a pour classe λ dans $N^{++}(F')$.

Soit Ω l'ouvert complémentaire des pôles des f_i $(i = 1, \ldots, n+r)$. Pour tout P dans $\Omega(\boldsymbol{Q})$, on a:

$$h_{\psi_1}(P) = h_{\boldsymbol{P}^n}\big(1, f_1(P), \ldots, f_n(P)\big) \leqslant h_{\boldsymbol{P}^{n+r}}\big(1, \ldots, f_{n+r}(P)\big) = h_{\varphi_1}(P).$$

En utilisant maintenant p^{-1}, on trouve dans F un ouvert $\Omega' \subset \Omega_{\varphi_1 \circ p^{-1}} \cap \Omega_{\psi_1 \circ p^{-1}}$ satisfaisant:

$$\forall P \in \Omega'(\boldsymbol{Q}) \qquad h_{\psi_1 \circ p^{-1}}(P) \leqslant h_{\varphi_1 \circ p^{-1}}(P).$$

Soit maintenant φ et ψ deux applications rationnelles de F' dans des espaces projectifs, de systèmes associés λ et μ. Comme $\varphi_1 \circ p^{-1}$ et $\psi_1 \circ p^{-1}$ ont aussi comme systèmes associés λ et μ, la proposition 1 et l'inégalité ci-dessus nous donnent $h_\psi \dashv h_\varphi$.

Dans la pratique, la connaissance explicite de F' et de $p\colon F' \to F$ permet de préciser les ouverts de validité des inégalités; on ne peut cependant pas toujours obtenir des S-ouverts, comme on le verra à la fin de la démonstration de la proposition de III.

Démonstration du corollaire. Il suffit d'appliquer la proposition 3 à $n\lambda$ et $n\mu$, et d'utiliser la proposition 2 pour revenir à λ et μ.

III. Démonstration des inégalités de I, c avec la méthode de II. Soit Σ la surface d'équation $X^3 + Y^3 + Z^3 + qT^3 = 0$ $(q \in \boldsymbol{Q},\ q \neq 0)$ dans $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^3$. Rappelons que θ est l'application rationnelle de Σ dans elle-même définie par:

$$\theta\colon (X, Y, Z, T) \mapsto \big(Y^4 + 2YX^3,\ -(X^4 + 2XY^3),\ Z(Y^3 - X^3),\ T(Y^3 - X^3)\big).$$

Les points où θ n'est pas définie sont les points P_i $(i = 1, 2, 3)$ de coordonnées $(0, 0, a_i, 1)$ avec $a_i^3 + q = 0$ (par point de Σ on entend désormais point à valeur dans $\bar{\boldsymbol{Q}}$). Ce sont d'ailleurs les points multiples des fibres dégénérées. On note $\Sigma_{\bar{\boldsymbol{Q}}} = \Sigma \times_{\mathrm{Spec}\,\boldsymbol{Q}} \mathrm{Spec}\,\bar{\boldsymbol{Q}}$. Appelons D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les diviseurs $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$-invariants sur $\Sigma_{\bar{\boldsymbol{Q}}}$ induits au moyen du plongement $\Sigma_{\bar{\boldsymbol{Q}}} \hookrightarrow \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{Q}}}^3$ par les diviseurs de $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{Q}}}^3$ d'équations respectives:

$$D_1 \quad 0 = Y^4+2YX^3 = Y\prod_{i=1}^{3}(Y+\beta_i X),$$
$$D_2 \quad 0 = -(X^4+2XY^3) = -X\prod_{i=1}^{3}(X+\beta_i Y),$$
$$D_3 \quad 0 = Z(Y^3-X^3) = Z(Y-X)(Y-jX)(Y-j^2X),$$
$$D_4 \quad 0 = T(Y^3-X^3) = T(Y-X)(Y-jX)(Y-j^2X).$$

Soit $p\colon \Sigma_1 \to \Sigma$ l'éclatement de Σ en les points P_1, P_2, P_3. Cet éclatement peut se faire sur $\boldsymbol{Q}$, puisque les trois points sont globalement rationnels. Soient $l_{P_1}, l_{P_2}, l_{P_3}$, les courbes exceptionnelles de première espèce obtenues sur $\Sigma_{1\overline{\boldsymbol{Q}}}$. Le diviseur $l_{P_1}+l_{P_2}+l_{P_3}$ est $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$-invariant. Soient D_1', D_2' les transformés propres respectifs de D_1 et D_2, et soit Δ le transformé propre du diviseur induit sur $\Sigma_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ par le diviseur de $\boldsymbol{P}^3_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ d'équation $Y^3-X^3=0$. On a les égalités suivantes dans le groupe des diviseurs de $\Sigma_{1\overline{\boldsymbol{Q}}}$:

$$p^*(D_1) = D_1'+4l_{P_1}+4l_{P_2}+4l_{P_3},$$
$$p^*(D_2) = D_2'+4l_{P_1}+4l_{P_2}+4l_{P_3},$$
$$p^*(D_3) = p^*(Z)+\Delta+3l_{P_1}+3l_{P_2}+3l_{P_3},$$
$$p^*(D_4) = p^*(T)+\Delta+3l_{P_1}+3l_{P_2}+3l_{P_3}$$

où l'on note abusivement Z et T les diviseurs de $\Sigma_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ découpés par $Z=0$ et $T=0$.

Pour démontrer la première égalité, il suffit de voir que la multiplicité de chaque diviseur $uY+vX$ intervenant dans D_1 est, en chaque point P_i, exactement égale à 1. Si cette multiplicité, qui est au moins égale à 1, était supérieure à 1, le plan $uY+vX=0$ serait tangent au point P_i. Or l'équation du plan tangent en P_i est $\alpha_i^2 Z+qT=0$. La démonstration des autres égalités est analogue.

Les diviseurs obtenus en enlevant $3l_{P_1}+3l_{P_2}+3l_{P_3}$ à chacun des $p^*(D_i)$ sont encore $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$-invariants:

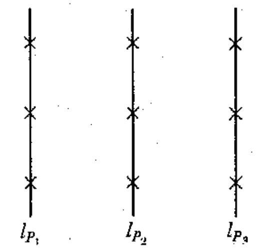
$$(*)\qquad \begin{cases} D_1'+l_{P_1}+l_{P_2}+l_{P_3},\\ D_2'+l_{P_1}+l_{P_2}+l_{P_3},\\ p^*(Z)+\Delta,\\ p^*(T)+\Delta.\end{cases}$$

Ils sont linéairement équivalents entre eux et le faisceau inversible qui leur est associé est

$$p^*\big(i^*(O_{\boldsymbol{P}^3}(4))\big)\otimes_{O_{\Sigma_1}} O_{\Sigma_1}(-3l_{P_1}-3l_{P_2}-3l_{P_3})$$

où i désigne le plongement de Σ dans $\boldsymbol{P}^3$.

Cherchons les points communs aux diviseurs de $(*)$. Comme D_1 et D_2 n'ont pas d'autres points communs que les P_i, les points communs de D_1' et D_2' sont à chercher sur les l_{P_i}. Au point P_i, il est facile de voir que $x = X/T$ et $y = Y/T$ sont des paramètres locaux. Donc donnés $(u,v)\in\overline{\boldsymbol{Q}}^2$ et $(u',v')\in\overline{\boldsymbol{Q}}^2$ tels que $uv'-u'v\neq 0$, $ux+vy$ et $u'x+v'y$ sont encore des paramètres locaux. En particulier, il est impossible de trouver $g\in O^*_{\Sigma_{\overline{\boldsymbol{Q}}},P_i}$ (éléments inversibles de l'anneau local de $\Sigma_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ en P_i) tel que $(ux+vy)-g(u'x+v'y)$ appartienne à $m_{P_i}^2$ (où m_{P_i} est l'idéal maximal de $O_{\Sigma_{\overline{\boldsymbol{Q}}},P_i}$). Ceci montre (cf. par exemple [10], p. 20) que l'éclatement en P_i sépare $uX+vY=0$ et $u'X+v'Y=0$. Appliquant ceci à chacune des composantes de D_1 et D_2, deux à deux, on obtient que D_1' et D_2' ne se rencontrent pas. On voit de même que D_1' et Δ, respectivement D_2' et Δ n'ont pas de point commun. Par ailleurs $Z=0$ ne passe pas par P_i, donc $p^*(Z)$ et l_{P_i} n'ont pas de point commun; de même pour $T=0$ et l_{P_i}. Il résulte de ceci que les seuls points communs aux diviseurs de $(*)$ sont les points de $l_{P_i}\cap\Delta$ $(i=1,2,3)$; on voit facilement que ces points sont simples sur Δ, qu'ils sont globalement rationnels et ont la configuration:



soit neuf points P_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$. Faisons éclater ces points: $q\colon \Sigma_2\to\Sigma_1$ avec q défini sur $\boldsymbol{Q}$. Notons $l_{P_{ij}}$ la courbe exceptionnelle de première espèce introduite par l'éclatement de P_{ij}, et notons $q'(D)$ le transformé propre du diviseur D. Ecrivons les transformés totaux des diviseurs de $(*)$:

$$q^*(D_1'+l_{P_1}+l_{P_2}+l_{P_3}) = q^*(D_1')+\sum_i q'(l_{P_i})+\sum_{i,j} l_{P_{ij}},$$
$$q^*(D_2'+l_{P_1}+l_{P_2}+l_{P_3}) = q^*(D_2')+\sum_i q'(l_{P_i})+\sum_{i,j} l_{P_{ij}},$$
$$q^*\big(p^*(Z)+\Delta\big) = q^*\big(p^*(Z)\big)+q'(\Delta)+\sum_{i,j} l_{P_{ij}},$$
$$q^*\big(p^*(T)+\Delta\big) = q^*\big(p^*(T)\big)+q'(\Delta)+\sum_{i,j} l_{P_{ij}}.$$

Si maintenant on enlève $\sum_{i,j} l_{P_{ij}}$ à chacun des diviseurs ci-dessus, on vérifie que les diviseurs obtenus, qui sont $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$-invariants, n'ont aucun point commun.

L'application $\theta\circ p\circ q$ est donc morphique, et l'élément de $Z^{++}(\Sigma)$ associé à l'application rationnelle θ est

$$4\lambda_0-3\sum_i P_i-\sum_{i,j}P_{ij},$$

où λ_0 désigne la classe des sections planes de Σ dans $N(\Sigma)$.

Par la même méthode, on voit que le système associé à l'application φ (notation de I, c) est $\lambda_0-\sum_i P_i$. On voit aussi que le système associé à ψ est $\lambda_0-\sum_i Q_i$, où Q_i $(i=1,2,3)$ sont les points de $\Sigma(\overline{\boldsymbol{Q}})$ tels que $Z=T=0$.

Proposition. 1) *Il existe un ouvert Ω de Σ, inclus dans $\Omega_\theta\cap\Omega_\varphi$, et une constante réelle C, tels que:*

$$\forall P\in\Omega(\boldsymbol{Q})\qquad h_{\boldsymbol{P}^3}\big(\theta(P)\big)\leqslant 3h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big)+h_{\boldsymbol{P}^3}(P)+C.$$

2) *Il existe un ouvert Ω de Σ, inclus dans $\Omega_\theta\cap\Omega_\varphi$, et une constante réelle C, tels que:*

$$\forall P\in\Omega(\boldsymbol{Q})\qquad h_{\boldsymbol{P}^3}\big(\theta(P)\big)\geqslant 4h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big)+C.$$

3) *Il existe un ouvert Ω de Σ, inclus dans $\Omega_\varphi\cap\Omega_\psi$, et C dans $\boldsymbol{R}$, tels que:*

$$\forall P\in\Omega(\boldsymbol{Q})\qquad h_{\boldsymbol{P}^3}(P)\leqslant h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big)+h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\psi(P)\big)+C.$$

4) *Il existe un ouvert Ω de Σ, inclus dans $\Omega_\theta\cap\Omega_\varphi$, et C dans $\boldsymbol{R}$, tels que:*

$$\forall P\in\Omega(\boldsymbol{Q})\qquad 4h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big)-C\leqslant h_{\boldsymbol{P}^1}\Big(\varphi\big(\theta(P)\big)\Big)\leqslant 4h_{\boldsymbol{P}^1}\big(\varphi(P)\big)+C.$$

Démonstration. 1) On a:

$$4\lambda_0-3\sum_i P_i-\sum_{i,j}P_{ij}=\Big[3\Big(\lambda_0-\sum_i P_i\Big)+\lambda_0\Big]-\sum_{i,j}P_{ij}.$$

Posons

$$\mu=4\lambda_0-3\sum_i P_i-\sum_{i,j}P_{ij}\quad\text{ et }\quad\lambda=3\Big(\lambda_0-\sum_i P_i\Big)+\lambda_0.$$

Les systèmes λ et μ sont dans $Z^{++}(\Sigma)$, et $\lambda-\mu=\sum_{i,j}P_{ij}$ est dans $Z^+(\Sigma)$, comme on le voit dans $N(\Sigma_2)$, où par l'isomorphisme de II, a, l'élément $\sum_{i,j}P_{ij}$ de $Z_0(\Sigma)$ est identifié à $\sum_{i,j}l_{P_{ij}}\geqslant 0$. Appliquant les propositions 2 et 3 de II, on obtient l'inégalité annoncée.

2) De même

$$4\lambda_0-3\sum_i P_i-\sum_{i,j}P_{ij}=4\lambda_0-4\sum_i P_i+\sum_i\Big(P_i-\sum_j P_{ij}\Big).$$

Ici $P_i-\sum_j P_{ij}$ est dans $Z^+(\Sigma)$ car son image dans $N(\Sigma_2)$ est le transformé propre de l_{P_i} par q, lequel est positif. On a bien:

$$\Big(4\lambda_0-3\sum_i P_i-\sum_{i,j}P_{ij}\Big)-4\Big(\lambda_0-\sum_i P_i\Big)\in Z^+(\Sigma),$$

et ceci démontre 2).

3) Le diviseur D induit sur Σ par le diviseur de $\boldsymbol{P}^3$ d'équation $X^3+Y^3=0$ est aussi le diviseur induit par $Z^3+qT^3=0$. D'après la première équation, la multiplicité de D en un point P_i est supérieure ou égale à 3. De même, d'après la deuxième équation, la multiplicité de D en un point Q_i est supérieure ou égale à 3. Introduisons l'éclatement de Σ aux points P_i et Q_i, soit $r\colon F\to\Sigma$. On a:

$$r^*(D)-3\sum_i l_{P_i}-3\sum_i l_{Q_i}\geqslant 0,$$

où l_{P_i} et l_{Q_i} sont les diviseurs exceptionnels introduits par l'éclatement. Ceci montre que l'on a:

$$3\lambda_0-3\sum_i P_i-3\sum_i Q_i\in Z^+(\Sigma).$$

On a:

$$\Big(\lambda_0-\sum_i P_i\Big)+\Big(\lambda_0-\sum_i Q_i\Big)=\lambda_0+\mu,$$

où

$$\mu=\lambda_0-\sum_i P_i-\sum_i Q_i,\quad\text{ et }\quad 3\mu\in Z^+(\Sigma).$$

Appliquant la proposition 2 et le corollaire de II, nous obtenons le résultat annoncé.

4) Il suffit de considérer l'application rationnelle, morphique, de $\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$ dans $\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$, donnée par:

$$(X,\,Y)\mapsto\big(Y^4+2YX^3,\,-(X^4+2XY^3)\big)$$

et d'appliquer [3], p. 64. Ceci montre que l'on peut prendre ici

$$\Omega=\Omega_\varphi=\Sigma-\{P_1,P_2,P_3\}.$$

En fait, l'analyse des démonstrations des propositions de II permet de montrer que les inégalités obtenues ci-dessus sont valables dans les ouverts indiqués en I, c. Le fait que (i) et (ii) soient valables sur des S-ouverts provient de ce que le $\lambda-\mu$ correspondant est dans $Z^+(\Sigma)\cap Z_0(\Sigma)$, ce qui n'est pas le cas pour (iii). La note (1) de I, c montre ainsi que l'on ne peut pas, dans II, Proposition 3, remplacer $h_\psi \dashv h_\varphi$ par $h_\psi \underset{S}{\dashv} h_\varphi$.

En conclusion, on voit que les inégalités (i), (ii), (iii), (iv) sont, dans un sens, les meilleures possibles. Pour obtenir une estimation „exacte" de $h_{P^3}(\theta(P))$, il faudrait introduire une application rationnelle dont le système associé comporte les points P_{ij}.

IV. Recherche d'une hauteur de Tate. Les notations sont les mêmes qu'en I, c. On note Ω l'ouvert de Σ complémentaire des points multiples des fibres dégénérées. L'application rationnelle θ définit un morphisme de Ω dans Ω, et φ est morphique sur Ω. Ceci permet de parler de $\theta^n P$ et de $\varphi(\theta^n P)$ pour P dans $\Omega(\boldsymbol{Q})$ et n entier positif.

PROPOSITION 1. a) *Pour tout P dans $\Omega(\boldsymbol{Q})$ la suite $4^{-n}h_{P^3}(\theta^n P)$ tend vers une limite $\Phi(P)$. Cette limite satisfait:*

$$\Phi(\theta P) = 4\Phi(P).$$

b) *Il existe une constante réelle C telle que, pour tout P dans $\Omega(\boldsymbol{Q})$, on ait:*

$$\Phi(P)-C \leqslant h_{P^3}(P).$$

Démonstration. Posons

$$u_n(P) = 4^{-n}h_{P^1}(\varphi(\theta^n P)) \quad \text{et} \quad v_n(P) = 4^{-n}h_{P^3}(\theta^n P).$$

Fixons P, et posons $u_n = u_n(P)$ et $v_n = v_n(P)$. En appliquant (iv) à $\theta^{n-1}P$, on obtient $|u_n-u_{n-1}| \leqslant C_4/4^n$, ce qui montre que la suite u_n converge. Appelons sa limite $\Phi(P)$.

En appliquant (ii) à $\theta^{n-1}P$, on obtient:

$$(1) \qquad \forall n \geqslant 1 \quad v_n \geqslant u_{n-1}+C_2/4^n.$$

En appliquant (i) à $\theta^{n-1}P$, on obtient:

$$(2) \qquad \forall n \geqslant 1 \quad v_n - \frac{1}{4}v_{n-1} \leqslant \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{C_1}{4^n}.$$

Des deux dernières inégalités résulte:

$$\forall n \geqslant 2 \quad v_n - v_{n-1} \leqslant \frac{3}{4}(u_{n-1}-v_{n-1}) + \frac{C_1}{4^n}$$
$$\leqslant \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{3}{4}\left(-u_{n-2} - \frac{C_2}{4^{n-1}}\right) + \frac{C_1}{4^n}$$

soit:

$$\exists C_5 \in \boldsymbol{R} \ \forall n \geqslant 2 \quad v_n - v_{n-1} \leqslant \tfrac{3}{4}(u_{n-1}-u_{n-2}) + C_5/4^{n-1}$$

ce qui implique:

$$\exists C_6 \in \boldsymbol{R} \ \forall n \geqslant 2 \quad v_n - v_{n-1} \leqslant \frac{3C_4}{4^n} + \frac{C_5}{4^{n-1}} = \frac{C_6}{4^n}.$$

La suite $w_n = v_n + \dfrac{C_6}{3\cdot 4^n}$ est donc décroissante. Comme la suite v_n est minorée par zéro, la suite w_n est minorée, donc convergente. Appelons sa limite l. La suite $v_n = w_n - \dfrac{C_6}{3\cdot 4^n}$ converge aussi vers l. De (1) résulte $l \geqslant \Phi(P)$. De (2) résulte $l \leqslant \Phi(P)$. Faisons maintenant varier P. De

$$v_{n+1}(P) = 4^{-n-1}h_{P^3}(\theta^n\theta P) = \tfrac{1}{4}v_n(\theta P)$$

résulte $\Phi(\theta P) = 4\Phi(P)$. Ceci achève de démontrer a).

La majoration

$$|u_n(P) - u_{n-1}(P)| \leqslant \frac{C_4}{4^n}$$

est indépendante de P. Soit C la somme de la série $C_4/4^n$. On obtient:

$$(3) \qquad \forall P \in \Omega(\boldsymbol{Q}) \quad |\Phi(P) - h_{P^1}(\varphi(P))| \leqslant C.$$

Il est clair que l'on a $h_{P^1}(\varphi(P)) \leqslant h_{P^3}(P)$. Combiné avec (3), ceci donne:

$$\forall P \in \Omega(\boldsymbol{Q}) \quad h_{P^3}(P) \geqslant \Phi(P) - C. \ \blacksquare$$

Considérons maintenant la famille de courbes elliptiques $(F, \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}, \pi, \sigma)$ définie comme en I, c dans $\boldsymbol{P}^3_{\boldsymbol{Q}} \times_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$ par les équations:

$$\begin{cases} X^3+Y^3+Z^3+qT^3 = 0 \ (q \in \boldsymbol{Q},\ q \neq 0), \\ Zv - Tu = 0. \end{cases}$$

Notons $\iota\colon F \hookrightarrow \boldsymbol{P}^7_{\boldsymbol{Q}}$ le plongement obtenu en utilisant le plongement de Segre, et notons θ l'application rationnelle de F dans elle-même étendant la multiplication par deux sur la fibre générique. En utilisant la proposition 1 ci-dessus et le lemme 2 de I, b on obtient facilement:

PROPOSITION 2. 1) *Pour tout P dans $\Omega(\boldsymbol{Q})$ la suite $4^{-n}h_\iota(\theta^n P)$ tend vers une limite $\Phi(P)$, vérifiant $\Phi(\theta P) = 4\Phi(P)$.*

2) *Il existe une constante réelle C telle que:*

$$\forall P \in \Omega(\boldsymbol{Q}) \quad \Phi(P) + h_\pi(P) - C \leqslant h_\iota(P).$$

3) *Il existe une constante réelle C' telle que, pour tout P n'appartenant pas aux fibres dégénérées*:

$$h_\iota(P) \leqslant \Phi(P) + 2h_\pi(P) + C'.$$

4) *L'encadrement obtenu en 2) et 3) est le plus fin possible, en ce sens que, dans le cas $q = 3$, s'il existe r_1, r_2, C dans $\mathbf{R}$ tels que, sur le complémentaire Ω' des fibres dégénérées, on ait*:

$$\forall P \in \Omega'(\mathbf{Q}) \qquad \Phi(P) + r_1 h_\pi(P) - C \leqslant h_\iota(P) \leqslant \Phi(P) + r_2 h_\pi(P) + C$$

alors $r_1 \leqslant 1$ et $r_2 \geqslant 2$.

References

[1] J. W. S. Cassels, *Diophantine equations with special reference to elliptic curves*, Journ. London Math. Soc. 41 (1966), p. 193–291.

[2] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture notes, Springer Verlag.

[3] S. Lang, *Diophantine geometry*, Interscience tract, n° 11.

[4] Yu. I. Manin, *Rational surfaces over perfect fields I*, Publ. Math. IHES 1966. Traduction anglaise: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 84.

[5] — *Rational surfaces over perfect fields II*, Mat. Sb. 72 (1967). Traduction anglaise: Mat. USSR Sbornik 1 (1967), p. 141–168.

[6] — *The Tate height on an abelian variety, its variants and applications*, Izv. AN SSSR, Ser. mat. 28 (1964), p. 1363–1390. Traduction anglaise: Amer. Math. Soc. Transl.

[7] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press (1969).

[8] A. Néron, *Thèse*, Bull. Soc. Math. de France 80 (1952), p. 101–166.

[9] B. Segre, *On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables* (1951). Mathematicae Notae (Rosario Argentina) 11, p. 1–68.

[10] I. R. Shafarevitch, *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Tata Inst. (1966).

[11] Ju. G. Zarhin, Yu. I. Manin, *Height on families of abelian varieties*, Mat. Sb. 89 (131) (1972) n° 2; Mat. USSR Sbornik 18 (1972) n° 2.

Reçu le 6. 9. 1974
et dans la forme modifiée le 3. 4. 1975 (616)

ACTA ARITHMETICA
XXXI (1976)

On basis problem for Siegel modular forms of degree 2

by

Michio Ozeki (Okinawa)

1. Introduction. In the theory of modular forms of a complex variable there is a famous problem so called as "basis problem" (for the details see [3]). In [1] van der Blij treated the special case of the above problem. His main result can be stated as "the space of modular forms of level one and of weight k is spanned by the theta-series attached to positive definite even integral quadratic forms of determinant unity if and only if the weight k is a multiple of 4". In this paper we shall treat the corresponding problem in the case of Siegel modular forms of degree two. Our main result is the following:

Theorem. *Let $M(2, k)$ be the linear space of Siegel modular forms of degree 2 and of weight k (k is an even non-negative integer), then $M(2, k)$ is spanned by theta-series attached to positive definite even integral quadratic forms of determinant unity if and only if k is a multiple of 4.*

The proof of this theorem rests partly on equipment and precise observation of certain positive definite even integral quadratic lattices of determinant unity and partly on the work of Igusa [5] which determines the graded structure of Siegel modular forms of degree 2.

2. Some preliminaries. Let $\mathfrak{H}_2$ be Siegel upper-half space of degree 2 and $\varphi(\tau)$ be a Siegel modular form of degree 2 and of weight k, then $\varphi(\tau)$ can be expanded in a Fourier series

$$\varphi(\tau) = \sum_T a(T) e^{2\pi i \sigma(T\tau)}, \tag{1}$$

where T runs over the set $\mathfrak{T}$ of all positive semi-definite semi-integral matrices of size 2 and $\sigma(T\tau)$ means the trace of the matrix $T\tau$ ([11], [5]).

Proposition 2.1. *Let*

$$\varphi_1(\tau) = \sum_T a(T) e^{2\pi i \sigma(T\tau)} \quad \text{and} \quad \varphi_2(\tau) = \sum_T b(T) e^{2\pi i \sigma(T\tau)}$$