References

[1] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines surfaces cubiques*, Coll. Int. CNRS, Clermont-Ferrand (1964), pp. 67–75.
[2] Cl. Chevalley, *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable*, Amer. Math. Soc. 1951.
[3] D. F. Coray, *Arithmetic on cubic surfaces*, thesis; Trinity Coll., Cambridge 1974.
[4] (V. B. Dem'janov) В. Б. Демьянов, *О кубических формах в дискретно нормированных полях*, Докл. АН СССР 74 (1950), pp. 889–891.
[5] D. Hilbert and A. Hurwitz, *Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null*, Acta Math. 14 (1891), pp. 217–224.
[6] H. Hironaka, *On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves*, Memoirs Coll. of Sc. Univ. Kyoto 30 (1956), pp. 177–195.
[7] S. Lang, *Diophantine Geometry*, Interscience 1962.
[8] — *Algebra*, New York, London 1965.
[9] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton 1966.
[10] M. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Abh. Akad. Wissenschaften zu Berlin (1882), 120 p. [also: J. Crelle 93 (1882), pp. 271–318 (extract)].
[11] H. Poincaré, *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, J. Math. Pures Appl. 7 (1901), pp. 161–233.
[12] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves*, Ann. of Math. 56 (1952), pp. 169–191.
[13] I. R. Šafarevič, *Basic Algebraic Geometry*, Berlin 1974.
[14] B. Segre, *On arithmetical properties of singular cubic surfaces*, J. London Math. Soc. 19 (1944), pp. 84–91.
[15] — *On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables*, Math. Notae Univ. Rosario 11 (1951), pp. 1–68.
[16] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Paris 1959.
[17] — *Corps locaux*, Paris 1962.
[18] Th. Skolem, *Einige Bemerkungen über die Auffindung der rationalen Punkte auf gewissen algebraischen Gebilden*, Math. Zeitschr. 63 (1955), pp. 295–312.
[19] T. A. Springer, *Some properties of cubic forms over fields with a discrete valuation*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. (1955), pp. 512–516.
[20] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *The birationality of cubic surfaces over a given field*, Michigan Math. Journ. 17 (1970), pp. 289–295.
[21] — *Applications of Algebraic Geometry to Number Theory*, Proc. Symp. AMS, 20 (1971), pp. 1–52.
[22] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, 2nd ed., Amer. Math. Soc. 1962.
[23] — *Courbes algébriques et variétés abéliennes*, Paris 1971 (= 1948).
[24] O. Zariski, *Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, Publ. Math. Soc. of Japan, 1958.
[25] — *An Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces*, Springer Lect. Not. 83, 1969.
[26] — *Collected Papers I*, Cambridge 1972.

Received on 18. 1. 1975 (662)

ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

Comportement local des fonctions à série de Fourier lacunaire

par

Michel Bruneau (Le Belvedere, Tunis)

En hommage au professeur A. Zygmund

La propriété la plus remarquable des fonctions à série de Fourier lacunaire est qu'il suffit de connaître leur comportement au voisinage de l'origine pour en déduire leur comportement au voisinage de chaque point. Mais si l'on s'interesse non plus à leur „nature", mais plus précisément à leur „allure", il est nécessaire, pour obtenir une propriété de cet ordre, d'adjoindre à la notion de „lacunarité" celle „d'équilibre".

I. Séries de Fourier lacunaires et équilibrées.

(a) Suites équilibrées. $\boldsymbol{T}$ désigne le tore $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ identifié à $[0, 1[$. $\{\cdot\}$ est la partie fractionnaire. Une suite (μ_n) de nombres réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$, est dite *équilibrée* si, pour presque tout $0 \leqslant x < 1$, la suite à valeurs dans $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{N}}$

$$n \to (\{\mu_n x\}, \{\mu_{n+1} x\}, \ldots, \{\mu_{n+k} x\}, \ldots) \tag{1}$$

admet 0 pour valeur d'adhérence; par ailleurs elle est dite *lacunaire* si

$$\inf_{n\in N} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} > 1 \tag{2}$$

et *à rapports bornés* si

$$\sup_{n\in N} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} < +\infty. \tag{2'}$$

Pour tout nombre réel $\theta > 1$, la suite (θ^n) est équilibrée (voir [5]). En revanche il existe des suites lacunaires et à rapports bornés qui ne sont pas équilibrées; c'est ainsi le cas de la suite (2^n+1).

(b) Fonctions à série de Fourier équilibrée. Une fonction $f\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$, admettant un développement en série de Fourier

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos 2\pi n_k x + \beta_k \sin 2\pi n_k x)$$

est dite *à série de Fourier lacunaire* (resp. *équilibrée*) si la suite (n_k) est lacunaire (resp. équilibrée).

(c) Comportement local des fonctions et équilibre. Soit $f\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{R}$ une fonction lipschitzienne d'ordre α $(0<\alpha<1)$, telle que $f(0)=0$. En tout point $x\in\boldsymbol{T}$

$$|f(x+h)-f(x)-f(h)| = O(h^\alpha) \qquad (h\to 0). \tag{3}$$

Nous dirons que la fonction f a „même allure" au point x qu'à l'origine pour exprimer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $0<\eta\leqslant 1$ tel que

$$|f(x+h)-f(x)-f(h)| \leqslant \varepsilon\eta^\alpha \qquad (|h|\leqslant\eta). \tag{4}$$

Notre but est de prouver que si la fonction f est à série de Fourier lacunaire et équilibrée, elle a en presque tout point „même allure" qu'à l'origine et que d'une certaine façon la notion d'équilibre est ici à la fois nécessaire et suffisante. Nous obtenons plus précisément:

THÉORÈME 1. *Pour une suite lacunaire d'entiers naturels (n_k) les conditions suivantes sont équivalentes.*

(α) *La suite (n_k) est équilibrée ou n'est pas à rapports bornés.*

(β) *En presque tout point $x\in\boldsymbol{T}$, pour toute fonction $f\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{R}$, lipschitzienne d'ordre α $(0<\alpha<1)$, ayant un développement en série de Fourier, de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2\pi n_k x \qquad (x\in\boldsymbol{T}), \tag{5}$$

il existe, quel que soit $\varepsilon>0$, un nombre $0<\eta\leqslant 1$ tel que

$$|f(x+h)-f(x)-f(h)| \leqslant \varepsilon\eta^\alpha \qquad (|h|\leqslant\eta).$$

Pour établir le théorème 1 nous allons montrer que l'allure d'une fonction f en un point donné $x_0\in\boldsymbol{T}$ est lié à un problème d'approximation.

II. Approximation par une suite Λ.

(a) Suites $\Lambda(x)$. $\Lambda=(\lambda_k)$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels tels que $\lambda_0=0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty, \qquad \lim_{k\to+\infty} (\lambda_k-\lambda_{k-1}) = 0. \tag{6}$$

A tout point x de $\boldsymbol{T}=[0,1[$ est associée l'unique suite croissante d'indices (k_n) vérifiant

$$\lambda_{k_n} \leqslant x+n-1 < \lambda_{k_n+1} \qquad (n\in\boldsymbol{N}). \tag{7}$$

On désigne alors par $\Lambda(x)$ la suite, à valeurs dans $\boldsymbol{T}$,

$$n \to \frac{x+n-1-\lambda_{k_n}}{\lambda_{k_n+1}-\lambda_{k_n}} \qquad (n\in\boldsymbol{N}). \tag{8}$$

Comme nous l'avons prouvé dans [4], étant donnée une suite Λ, pour presque tout $x\in\boldsymbol{T}$, la suite $\Lambda(x)$ est dense.

(b) Suites $\Lambda_{(\mu_n)}$. On peut „enrouler 1" une suite $\Lambda=(\lambda_k)$ sur le tore, en le considérant „modulo 1". Elle décrit alors une infinité de „spires"

$$s_n = \{\lambda_k-n+1 \mid n-1\leqslant\lambda_k<n\} \qquad (n\in\boldsymbol{N}). \tag{9}$$

On dit alors que Λ est la suite de n-ième spire s_n.

Étant donnée une suite (μ_n) de nombres réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$, on désigne par $\Lambda_{(\mu_n)}$ la suite Λ dont la n-ième spire est

$$s_n = \left\{\frac{k}{\mu_n} \,\middle|\, 0\leqslant k\leqslant[\mu_n]\right\} \qquad (n\in\boldsymbol{N}), \tag{10}$$

où, pour tout $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $[\lambda]=\lambda-\{\lambda\}$ est la partie entière de λ.

Étant données deux suites (λ_n), (λ'_n) dans $\boldsymbol{T}$, convenons de poser $(\lambda_n)\sim(\lambda'_n)$ s'il existe $n_0\in\boldsymbol{N}$ tel que $\lambda_n=\lambda'_n$ $(n\geqslant n_0)$. De façon évidente pour toute suite (μ_n) de nombres réels, strictement positifs, convergeant vers $+\infty$

$$\Lambda_{(\mu_n)}(x) \sim (\{\mu_n x\}) \qquad (x\in\boldsymbol{T}^*). \tag{11}$$

(c) Points très bien approchés. Un point $x\in\boldsymbol{T}$ est dit *très bien approché* par une suite Λ si, pour tout $\varepsilon>0$, et tout entier $l\in\boldsymbol{N}$, il existe un indice n_0 tel que, pour tous les termes de la suite $\Lambda(x)$ d'indice $n_0\leqslant k\leqslant n_0+l$, la distance à l'origine soit inférieure à ε.

Il résulte de (11) qu'une suite (μ_n) est équilibrée si et seulement si presque tout point x de $\boldsymbol{T}$ est très bien approché par la suite $\Lambda(\mu_n)$.

III. Comportement local des fonctions et points très bien approchés.

Des remarques précédentes, il ressort que le théorème 1 est une conséquence des deux résultats suivants.

THÉORÈME 2. *Étant donnée une fonction $f\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{R}$ lipschitzienne d'ordre α $(0<\alpha<1)$, à série de Fourier lacunaire*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2\pi n_k x \qquad (x\in\boldsymbol{T}),$$

pour tout point $x_0\in\boldsymbol{T}$ très bien approché par la suite $\Lambda_{(n_k)}$, il existe, quel que soit $\varepsilon>0$, un nombre $0<\eta\leqslant 1$ tel que

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-f(h)| \leqslant \varepsilon\eta^\alpha \qquad (|h|\leqslant\eta).$$

THÉORÈME 3. *Étant donnés une suite lacunaire d'entiers naturels (n_k) et un point $x_0\in\boldsymbol{T}$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(α) *x_0 est très bien approché par la suite $\Lambda(n_k)$ ou la suite (n_k) n'est pas à rapports bornés.*

(β) *Pour toute fonction $f\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{R}$ lipschitzienne d'ordre α $(0<\alpha<1)$,* *ayant un développement en série de Fourier de la forme* (5), *il existe, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *un nombre* $0 < \eta < 1$ *tel que*

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-f(h)| \leqslant \varepsilon\eta^\alpha \qquad (|h| \leqslant \eta).$$

Naturellement le théorème 2 est un corollaire du théorème 3. Toutefois du point de vue méthodologique il nous semble préférable de donner de ces deux résultats des démonstrations séparées.

IV. Démonstration du théorème 2. Soient une fonction lipschitzienne d'ordre α $(0<\alpha<1)$, à série de Fourier lacunaire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2\pi n_k x \qquad (x \in \boldsymbol{T}),$$

et un point $x_0 \in \boldsymbol{T}$ très bien approché par la suite $\Lambda_{(n_k)}$. Donnons nous un nombre $\varepsilon > 0$. Nous voulons prouver l'existence d'un nombre $0<\eta\leqslant 1$ tel que l'on ait (4).

Il existe deux constantes réelles $c>0$, $\lambda>1$, pour lesquelles

$$n_{k+1} \geqslant \lambda n_k, \qquad |a_k| \leqslant c n_k^{-\alpha} \qquad (k \in \boldsymbol{N}). \tag{12}$$

Choisissons alors un entier $l \geqslant 1$ tel que

$$12\pi c\lambda^{(1-\alpha)(1-l)} \leqslant \varepsilon(\lambda^{1-\alpha}-1), \qquad 9c\lambda^{\alpha(1-l)} \leqslant \varepsilon(\lambda^\alpha-1); \tag{13}$$

puis un nombre $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel

$$24\pi l c \varepsilon_0^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon. \tag{14}$$

$\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche d'un nombre réel. Le point x_0 étant très bien approché par la suite $\Lambda_{(n_k)}$, il existe un indice $k_0 \in \boldsymbol{N}$ pour lequel

$$\|n_k x_0\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \qquad (k_0 - l \leqslant k \leqslant k_0 + l). \tag{15}$$

Dans ces conditions, nous allons établir que le nombre

$$\eta = \frac{1}{n_{k_0}} \tag{16}$$

convient. Posons

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{k_0-l} a_k \sin 2\pi n_k x, \qquad f_2(x) = \sum_{|k-k_0|<l} a_k \sin 2\pi n_k x \tag{17}$$

et

$$f_3 = f - (f_1+f_2). \tag{18}$$

Pour tout $x \in \boldsymbol{T}$, tout nombre h et tout indice $k \in \boldsymbol{N}$

$$|a_k|\,|\sin 2\pi n_k(x+h) - \sin 2\pi n_k x| \leqslant c n_k^{-\alpha} 2\pi n_k |h|;$$

donc, si $|h| \leqslant \eta$,

$$\mu_k = |a_k|\,|\sin 2\pi n_k(x+h) - \sin 2\pi n_k h|$$

est majoré par

$$2\pi c n_k^{1-\alpha}\eta.$$

Or, quel que soit $k \leqslant k_0$,

$$n_k\eta = n_k n_{k_0}^{-1} \leqslant \lambda^{k-k_0} n_{k_0} n_{k_0}^{-1} = \lambda^{k-k_0}$$

si bien que, pour $k \leqslant k_0$,

$$\mu_k \leqslant 2\pi c n_k^{1-\alpha}\eta^{1-\alpha}\eta^\alpha \leqslant 2\pi c \lambda^{(1-\alpha)(k-k_0)}\eta^\alpha.$$

On obtient donc, pour tout $x \in \boldsymbol{T}$ et tout nombre h inférieur à η en valeur absolue,

$$|f_1(x+h)-f_1(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{k_0-l} \mu_k \leqslant 2\pi c\eta^\alpha \lambda^{-(1-\alpha)l} \sum_{k=0}^{k_0-l} \lambda^{(1-\alpha)(k-k_0+l)}$$

$$\leqslant 2\pi c\eta^\alpha\lambda^{-(1-\alpha)l} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-(1-\alpha)j} = \frac{2\pi c\eta^\alpha \lambda^{(1-\alpha)(1-l)}}{\lambda^{1-\alpha}-1}.$$

Ainsi, compte tenu de (13), quels que soient x et h dans $\boldsymbol{T}$, avec $|h| \leqslant \eta$

$$|f_1(x+h)-f_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}\eta^\alpha.$$

En donnant à x les valeurs 0 et x_0 on prouve donc que

$$|f_1(x_0+h)-f_1(x_0)-f_1(h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\eta^\alpha \qquad (|h| \leqslant \eta). \tag{19}$$

Pour tout indice $k \geqslant k_0$

$$n_k \geqslant \lambda^{k-k_0} n_{k_0} = \lambda^{k-k_0}\eta^{-1},$$

donc

$$n_k^{-\alpha} \leqslant \lambda^{-\alpha(k-k_0)}\eta^\alpha.$$

Il résulte alors de (12) que

$$|a_k| \leqslant c\lambda^{-\alpha(k-k_0)}\eta^\alpha \qquad (k \geqslant k_0);$$

donc, d'après (13),

$$\sum_{k=k_0+l}^{+\infty} |a_k| \leqslant c\,\frac{\lambda^{-\alpha(l-1)}}{\lambda^\alpha-1}\,\eta^\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{9}\eta^\alpha. \tag{20}$$

On déduit de (20) que

(21) $$|f_3(x_0+h)-f_3(x_0)-f_3(h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\eta^a \quad (|h| \leqslant \eta).$$

Il reste à majorer

(22) $$|f_2(x_0+h)-f_2(x_0)-f_2(h)|,$$

pour $|h| \leqslant \eta$. Désignons par A l'ensemble des indices k vérifiant

(23) $$|k-k_0| < l \quad \text{et} \quad n_k \leqslant \varepsilon_0 n_{k_0}$$

et par B l'ensemble des indices k vérifiant

(24) $$|k-k_0| < l \quad \text{et} \quad n_k > \varepsilon_0 n_{k_0}.$$

Si $k \in A$, quels que soient x et h dans $\boldsymbol{T}$,

(25) $$|a_k|\,|\sin 2\pi n_k(x+h) - \sin 2\pi n_k x|$$

est majoré par

$$2\pi c n_k^{1-a} h = 2\pi c n_k^{1-a} h^{1-a} h^a.$$

Ainsi, pour $|h| \leqslant \eta$, (25) est majoré par

$$2\pi c n_k^{1-a}\left(\frac{1}{n_{k_0}}\right)^{1-a}\eta^a \leqslant 2\pi c\varepsilon_0^{1-a}\eta^a.$$

En choisissant $x = 0$ et $x = x_0$, on prouve donc que, pour $k \in A$,

(26) $$|a_k|\,|\sin 2\pi n_k(x_0+h) - \sin 2\pi n_k x_0 - \sin 2\pi n_k h|$$

est majoré par

(27) $$4\pi c\varepsilon_0^{1-a}\eta^a.$$

Supposons maintenant $k \in B$. On a

$$\|n_k x_0\| \leqslant \varepsilon_0/2\pi;$$

donc, pour tout h dans $\boldsymbol{T}$,

(28) $$|a_k|\,|\sin 2\pi n_k(x_0+h) - \sin 2\pi n_k h|$$

est majoré par $|a_k|\varepsilon_0$. Or

$$|a_k| \leqslant c n_k^{-a} \leqslant c\varepsilon_0^{-a} n_{k_0}^{-a} = c\varepsilon_0^{-a}\eta^a$$

si bien que (28) est majoré par

(29) $$c\varepsilon_0^{1-a}\eta^a.$$

Ainsi pour $k \in B$, (26) est toujours majoré par (27). En définitive, compte tenu de (14),

(30) $$|f_2(x_0+h)-f_2(x_0)-f_2(h)| \leqslant 8\pi l c\varepsilon_0^{1-a}\eta^a \leqslant \tfrac{1}{3}\varepsilon\eta^a.$$

Il résulte alors de (19), (21) et (30) que la condition (4) est réalisée.

V. Démonstration du théorème 3. On se donne une suite lacunaire d'entiers naturels (n_k) et un point $x_0 \in \boldsymbol{T}$. Le fait que (α) implique (β) résulte aisément du théorème 2. Supposons donc que la condition (α) n'est pas réalisée; autrement dit que la suite (n_k) est à rapports bornés et que le point x_0 n'est pas très bien approché par la suite $\Lambda_{(n_k)}$. Nous allons, dans ces conditions, prouver que la condition (β) n'est pas réalisée, en nous limitant pour cela à une fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin 2\pi n_k x \quad (x \in \boldsymbol{T})$$

d'un type particulier.

La suite (n_k) étant lacunaire et à rapports bornés il existe deux constantes $1 < \lambda < \mu < +\infty$ pour lesquelles

(31) $$\lambda n_k \leqslant n_{k+1} \leqslant \mu n_k \quad (k \geqslant 0).$$

Le point x_0 n'est pas très bien approché par la suite $\Lambda_{(n_k)}$. Il existe donc un entier $l \geqslant 1$, qu'il est loisible de choisir arbitrairement grand, et un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe au moins un indice $k \leqslant j \leqslant k+l/2$ vérifiant

$$1 - \cos 2\pi n_j x_0 \geqslant 3\varepsilon_0.$$

Il existe ainsi une sous-suite $m_i = n_{k_i}$ $(i \geqslant 0)$ de (n_k) vérifiant

(32) $$\mu^{l/2} m_i \leqslant m_{i+1} \leqslant \mu^l m_i \quad (i \geqslant 0),$$

pour laquelle

(33) $$1 - \cos 2\pi m_i x_0 \geqslant 3\varepsilon_0 \quad (i \geqslant 0).$$

Choisissons pour f la fonction du type (5) définie par

(34) $$a_k = \begin{cases} n_k^{-a} & \text{si} \quad k = k_i \text{ pour un indice } i \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous devons prouver que la condition (β) n'est pas vérifiée. Or, il nous suffit pour cela de montrer que, pour un choix convenable de l, on peut déterminer des nombres $\varepsilon > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que

(35) $$\sup_{0 \leqslant h \leqslant \eta} \eta^{-a}|f(x_0)+f(h)-f(x_0+h)| \geqslant \varepsilon \quad (0 < \eta \leqslant \eta_0).$$

Avec l suffisamment grand, nous allons voir qu'il en est bien ainsi pour

(36) $$\eta_0 = \frac{\varepsilon_0}{2\pi m_0}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0^2}{2}\mu^{-al}.$$

Posons, pour tout indice $i \geqslant 0$,

(37) $$h_i = \frac{\varepsilon_0}{2\pi m_i}.$$

On constate aisément que, ε_0 étant fixé, il suffit de choisir l assez grand pour que, quel que soit $i \geqslant 0$,

$$\theta_i = |f(h_i)+f(x_0)-f(x_0+h_i)| + \frac{\varepsilon_0^2}{2} h_i^a \tag{38}$$

soit minoré par

$$m_i^{-a}[\sin 2\pi m_i h_i + \sin 2\pi m_i x_0 - \sin 2\pi m_i (x_0+h_i)],$$

soit par

$$m_i^{-a}[\sin \varepsilon_0 + \sin 2\pi m_i x_0 - \sin(2\pi m_i x_0 + \varepsilon_0)]. \tag{39}$$

On se donne maintenant un entier l ainsi choisi. Notons que

$$\sin\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_0(1-\varepsilon_0^2) \geqslant \varepsilon_0(1-\varepsilon_0) \tag{40}$$

et qu'il existe, quel que soit $i \geqslant 0$, un nombre $0 < \xi_i < \varepsilon_0$ pour lequel

$$\sin(2\pi m_i x_0 + \varepsilon_0) - \sin 2\pi m_i x_0 = \varepsilon_0 \cos(2\pi m_i x_0 + \xi_i). \tag{41}$$

D'après (40) et (41), (39) est minoré par

$$m_i^{-a}\varepsilon_0(1-\cos 2\pi m_i x_0 - 2\varepsilon_0),$$

donc, compte tenu de (33), par $m_i^{-a}\varepsilon_0^2$. Nous avons ainsi établi que pour tout indice $i \geqslant 0$,

$$\theta_i \geqslant m_i^{-a}\varepsilon_0^2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{2\pi h_i}\right)^{-a}\varepsilon_0^2,$$

soit

$$\theta_i \geqslant 2^a \pi^a \varepsilon_0^{2-a} h_i^a \geqslant \varepsilon_0^2 h_i^a. \tag{42}$$

Considérons maintenant les nombres $\eta_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ définis par (36): puis choisissons arbitrairement $0 < \eta \leqslant \eta_0$. Soit $i \geqslant 1$ l'indice unique pour lequel

$$h_i < \eta \leqslant h_{i-1}. \tag{43}$$

On déduit de (32) et (37) que

$$h_{i-1} = \frac{\varepsilon_0}{2\pi m_{i-1}} \leqslant \frac{\varepsilon_0 \mu^l}{2\pi m_i} = h_i \mu^l,$$

donc que

$$h_i \geqslant h_{i-1}\mu^{-l} \geqslant \eta\mu^{-l}.$$

On déduit alors de (42) que

$$\theta_i - \frac{\varepsilon_0^2}{2} h_i^a \geqslant \frac{\varepsilon_0^2}{2}\mu^{-al}\eta^a = \varepsilon\eta^a,$$

donc, d'après (38), que

$$|f(h_i)+f(x_0)-f(x_0+h_i)| \geqslant \varepsilon\eta^a. \tag{44}$$

Puisque $0 \leqslant h_i \leqslant \eta$, ceci achève de prouver (35).

Problème. Étant donnés une suite d'entiers naturels (n_k), lacunaire, à rapports bornés, et un nombre $0 < a < 1$ tels que la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} n_k^{-a} \sin 2\pi n_k x \qquad (x \in \boldsymbol{T})$$

ait, en presque tout point, „même allure" qu'à l'origine, peut-on conclure que la suite (n_k) est équilibrée?

Bibliographie

[1] M. Bruneau, Thèse (Strasbourg, 1970, multigraphiée).
[2] — *Fonctions p, a-fines et nombres mal approchés*, C. R. Acad. Sci. Paris 275 (1972), p. 903–906.
[3] — *Variation totale d'une fonction*, Lecture Notes in Math. 413, Springer-Verlag, 1974.
[4] — *Approximation sur le tore et irrégularité des fonctions* (A paraître).
[5] — *Equilibre des suites* (A paraître).

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
FACULTE DES SCIENCES
CAMPUS UNIVERSITAIRE
Le Belvedere, Tunis

Reçu le 27. 1. 1975 (669)