ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

Imaginär-quadratische Zahlkörper mit einklassigen Geschlechtern*

von

H. MÖLLER (Münster)

1. Einleitung. In dieser Arbeit werden für imaginär-quadratische Zahlkörper mit einklassigen Geschlechtern die reduzierten Formen vollständig bestimmt und die kleinste vollzerlegte Primzahl explizit angegeben. Außerdem wird gezeigt, daß gewissen Diskriminantenteilern zugeordnete Zahlen stets Primzahlen sind. Es folgen zunächst einige Bezeichnungen, Lemmata und bekannte Sätze, die bei den Beweisen benötigt werden.

Jeder quadratfreien natürlichen Zahl d ist mit $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-d})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper zugeordnet, und alle imaginär-quadratischen Zahlkörper lassen sich eindeutig in dieser Form schreiben. Mit

$$a := \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad d \equiv 1, 2 \pmod 4, \\ 1, & \text{wenn} \quad d \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

ist dann $D = (3a-4)d$ die Diskriminante von K. Im folgenden besteht zwischen d, D und K stets der hier beschriebene Zusammenhang. Sei ferner

$$f(x) := x^2 + ax + \tfrac{1}{4}(a-D)$$

das „Fundamentalpolynom" von K,

$$q = q(d) := \min\left\{p \in \boldsymbol{P};\ \left(\frac{D}{p}\right) = 1\right\},$$

wobei (D/p) das Kroneckersymbol bezeichnet, die kleinste vollzerlegte Primzahl von K sowie für jeden positiven Teiler e von d

$$q_e = q_e(d) := \frac{1}{(d+1, 4)}\left(\frac{d}{e} + e\right) \tag{1}$$

die „zu e assoziierte Zahl".

LEMMA 1. *Sei $d \in \boldsymbol{N}$ quadratfrei, $e|d$ $(e > 0)$ und*

$$j := \max\{e|d;\ e < \sqrt{d}\}. \tag{2}$$

* Gekürzter zweiter Teil der Habilitationsschrift des Verfassers (Bonn, 1972).

Dann gilt

(3) $$q_e \in \mathbf{N}, \quad q_e = q_{d/e}, \quad (q_e, D) = 1 \quad \text{und} \quad q_j = \min_{e|d} q_e(d).$$

LEMMA 2. *Seien d und e wie in Lemma 1,*

(4) $$b_e := \frac{2}{(d+1,\,4)}\left|\frac{d}{e} - e\right|$$

und

(5) $$\beta := \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4), \\ 0, & \text{wenn} \quad d \equiv 2, 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \end{cases}$$

Dann gilt für alle $e|d$ mit $e < \sqrt{d}$:

(6) $$f\left(\frac{e-\alpha}{1+\alpha}\right) = 2^{\beta} e q_e$$

und

(7) $$f\left(\frac{b_e - \alpha}{2}\right) = q_e^2, \quad \text{wenn} \quad d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

LEMMA 3. *Für alle $p \in \mathbf{P}$ mit $p \mid \prod_{e|d} q_e$ gilt $(D/p) = 1$.*

Die einfachen Beweise dieser Lemmata seien dem Leser überlassen.

$\mathfrak{F}_D$ bezeichne die Menge der primitiven positiv-definiten binären quadratischen Formen mit der Diskriminante D. Die Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ aus $\mathfrak{F}_D$ kürzen wir mit (a, b, c) bzw. mit $Q(x, y)$ ab. Dann ist $b^2 - 4ac = D$ und $f\left(\frac{b-\alpha}{2}\right) = ac$.

DEFINITION. Sei $\Gamma_{\pm} := \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 0,\ 0 < \pm \operatorname{Re} z < \tfrac{1}{2},\ |z| > 1\}$.

$$(a, b, c) \in \mathfrak{F}_D \ \text{ist reduziert} \ :\Leftrightarrow \frac{b + \sqrt{D}}{2a} \in \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \operatorname{Rand} \Gamma_+ .$$

SATZ A (vgl. [2]). *$(a, b, c) \in \mathfrak{F}_D$ ist genau dann reduziert, wenn $-a < b \leqslant a \leqslant c - \left(\frac{\operatorname{sign} b}{2}\right)$ gilt, d.h. wenn*

$$-a < b \leqslant a < \sqrt{f\left(\frac{b-\alpha}{2}\right)} \quad \text{oder} \quad 0 \leqslant b \leqslant a = \sqrt{f\left(\frac{b-\alpha}{2}\right)} \quad \text{ist}.$$

SATZ B (vgl. [4]). *Ist $k(D)$ die Anzahl der Klassen in jedem Geschlecht von K, so gilt $k(D) = 1$ genau dann, wenn die Klassengruppe $\mathfrak{H}$ von K isomorph zu $\mathbf{Z}_2^{t-1}$ ist mit $t = \omega(-D) := \operatorname{card}\{p \in \mathbf{P};\ p|D\}$.*

SATZ C (Dirichlet; vgl. [2], S. 270). *Sei $Q_1(x, y), \ldots, Q_h(x, y)$ ein vollständiges System paarweise nichtäquivalenter positiver primitiver quadratischer Formen mit der Diskriminante $f^2 D < 0$, und es sei $m \in \mathbf{N}$ mit $(m, f) = 1$.*

Ist $\Psi(m)$ die Anzahl der Darstellungen von m durch die Formen $Q_1(x, y), \ldots, Q_h(x, y)$ mit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, so gilt

(8) $$\Psi(m) = w \sum_{n|m} \left(\frac{D}{n}\right)$$

mit

$$w = w(f^2 D) := \begin{cases} 6 & \text{für} \quad D = -3,\ f = 1, \\ 4 & \text{für} \quad D = -4,\ f = 1, \\ 2 & \text{für} \quad f^2 D < -4. \end{cases}$$

Der folgende Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz C.

SATZ D (Euler; vgl. [2], S. 270). *Sei $D < -4$, $k(D) = 1$ und $Q(x, y)$ eine positiv-definite Form mit der Diskriminante D. Ist m eine zu D teilerfremde natürliche Zahl und besitzt die Gleichung $Q(x, y) = m$ genau vier verschiedene Lösungen mit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, so ist $m \in \mathbf{P}$.*

2. Reduzierte Formen. Sei $\mathfrak{K}^1 := \{d \in \mathbf{N};\ d \text{ quadratfrei},\ k(D) = 1\}$. Wir leiten nun für alle $d \in \mathfrak{K}^1$ die vollständige Menge der reduzierten Formen her.

SATZ 1. *Sei q_e wie in (1), b_e wie in (4) definiert und e stets ein positiver Teiler von d. Ist $d \in \mathfrak{K}^1$, so sind alle reduzierten Formen $Q = (a, b, c)$ mit der Diskriminante D bestimmt durch*

$$Q = \left.\begin{cases} (e,\ 0,\ d/e) & \text{mit} \quad e < \sqrt{d}, \\ (2e,\ 2e,\ q_e) & \text{mit} \quad e < \sqrt{d/3}, \\ (q_e,\ b_e,\ q_e) & \text{mit} \quad \sqrt{d/3} < e < \sqrt{d} \end{cases}\right\} \quad \text{für} \quad d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4),$$

$$Q = \begin{cases} (e,\ 0,\ d/e) & \text{mit} \quad e < \sqrt{d} & \text{für} \quad d \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \\ (e,\ e,\ q_e) & \text{mit} \quad e < \sqrt{d/3}, & \\ (q_e,\ b_e,\ q_e) & \text{mit} \quad \sqrt{d/3} < e < \sqrt{d} & \text{für} \quad d \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \end{cases}$$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß alle angegebenen Formen die Diskriminante D besitzen sowie reduziert sind und daß ihre Gesamtzahl gleich $h(D)$ ist. Im Fall $Q = (e, 0, d/e)$ hat Q offensichtlich die Diskriminante D; in den übrigen Fällen folgt dieses wegen $f\left(\frac{b-\alpha}{2}\right) = ac$ aus (6) bzw. (7).

Für $d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ folgt aus $e < \sqrt{d}$: $0 < e < \sqrt{d} = \sqrt{f(0)}$, aus $e < \sqrt{d/3}$: $2e < \sqrt{e^2 + d} = \sqrt{f(e)}$ und aus $\sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}$: $0 < \left(\frac{d}{e} - e\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{d}{e} + e\right)$, d.h. $0 < b_e < q_e$.

Alle Formen sind also nach Satz A reduziert. Setzen wir

$$C_1 := \operatorname{card}\{e|d;\ 0 < e < \sqrt{d}\} \quad \text{und} \quad C_2 := \operatorname{card}\{e|d;\ 0 < e < \sqrt{d/3}\},$$

so ist die Gesamtzahl C dieser reduzierten Formen für $d \equiv 1 \pmod 4$

$$C = C_1 + C_2 + (C_1 - C_2) = 2C_1 = 2^{t-1}, \quad \text{mit} \quad t = \omega(-D),$$

da d genau 2^{t-1} verschiedene Teiler besitzt, wovon die Hälfte kleiner als $\sqrt{d}$ ist. (Hier ist $t \geqslant 2$, da für $d \geqslant 3$ und $t = 1$ stets $d \equiv 3 \pmod 4$ gilt.) Nach Satz B ist $2^{t-1} = h$, also $C = h$.

Für $d \equiv 2 \pmod 4$ tritt nur ein Formentyp auf, der wegen $0 < e < \sqrt{d} = \sqrt{f(0)}$ reduziert ist. Die Anzahl dieser Formen ist gleich h, da d 2^t verschiedene Teiler hat, wovon die Hälfte ($2^{t-1} = h$) kleiner als $\sqrt{d}$ ist. Für $d \equiv 3 \pmod 4$ gilt schließlich $e < \frac{1}{2}\sqrt{e^2+d} = \sqrt{f\left(\frac{e-1}{2}\right)}$, wenn $e < \sqrt{d/3}$ ist, und

$$0 < \frac{1}{2}\left(\frac{d}{e} - e\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{d}{e} + e\right), \quad \text{d.h.} \quad 0 < b_e < q_e \quad \text{für} \quad \sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}.$$

Also sind alle Formen reduziert, und ihre Gesamtzahl C ist hier

$$C = C_2 + (C_1 - C_2) = C_1 = 2^{t-1} = h,$$

da d genau 2^{t-1} verschiedene Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{d}$ sind.

3. Assoziierte Zahlen. Mit Hilfe von Satz 1 lassen sich auch die zu den Teilern von d assoziierten Zahlen genau beschreiben.

SATZ 2. *Sei j wie in (2) definiert. Ist $d \in \mathfrak{R}^1$, so gilt*

$$q_e \in \boldsymbol{P} \quad \textit{für alle } e|d \textit{ mit } 1 < e < d,$$
$$q_1 = q_j^2, \quad \textit{wenn } d \equiv 3 \pmod 4 \textit{ und } b_j = 1 \textit{ ist},$$
$$q_1 \in \boldsymbol{P} \quad \textit{sonst}.$$

Beweis. Wegen $q_e = q_{d/e}$ können wir uns auf Teiler e von d mit $1 \leqslant e < \sqrt{d}$ beschränken.

Sei zunächst d ungerade. Dann treten nach Satz 1 alle q_e als letzte Koeffizienten von reduzierten quadratischen Formen Q mit der Diskriminante D auf, und zwar ist

$$Q = \begin{cases} (2^\beta e, 2^\beta e, q_e) & \text{für} \quad e < \sqrt{d/3}, \\ (q_e, b_e, q_e) & \text{für} \quad \sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}, \end{cases}$$

wobei β wie in (5) definiert sei.

Ist im ersten Fall $2^\beta e > 1$, so gibt es genau vier verschiedene Paare $(x, y) \in \boldsymbol{Z}^2$ mit

$$q_e = Q(x, y) = 2^\beta ex(x+y) + q_e y^2,$$

nämlich $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, \mp 1)$; denn für $y = 0$ kann q_e nicht dargestellt werden, da nach Lemma 1 $(q_e, D) = 1$ gilt, und für alle übrigen Paare $(x, y) \in \boldsymbol{Z}^2$ nimmt $Q(x, y)$ Werte an, die größer als q_e sind. Also folgt aus Satz D, daß q_e Primzahl ist.

Gilt im ersten Fall $2^\beta e = 1$, so ist $d \equiv 3 \pmod 4$ sowie $e = 1$, und q_1 besitzt genau dann mehr als vier Darstellungen durch Q, wenn es ein Quadrat ist, etwa

$$q_1 = \frac{d+1}{4} =: \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \text{mit} \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Wegen $d = n(n+2)$ ist $n|d$, $n < \sqrt{d}$ und $b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{n} - n\right) = 1$, also

$$q_1 = \frac{1}{4}(b_n^2 + d) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d}{n} - n\right)^2 + d\right] = \frac{1}{16}\left(\frac{d}{n} + n\right)^2 = q_n^2.$$

Da $n = \sqrt{d+1} - 1 = \max\{e|d;\ e < \sqrt{d}\} = j$ ist, gilt also $q_n = q_j$ und $b_n = b_j = 1$. Umgekehrt folgt aus $d \equiv 3 \pmod 4$ und $b_j = 1$ ganz analog, daß $q_1 = q_j^2$ ist. Im Fall $Q = (q_e, b_e, q_e)$ besitzt q_e stets genau die vier Darstellungen $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$; denn für alle Paare $(x, y) \in \boldsymbol{Z}^2$ mit $x^2 + y^2 > 1$ nimmt $Q(x, y)$ nur Werte an, die größer als q_e sind. Also folgt wieder $q_e \in \boldsymbol{P}$. Für $d \equiv 2 \pmod 4$ ist $q_e = d/e + e$, und q_e besitzt vier Darstellungen durch die reduzierte Form

$$Q(x, y) = ex^2 + \frac{d}{e}y^2, \quad \text{nämlich} \quad (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1);$$

für $|xy| > 1$ nimmt $Q(x, y)$ offensichtlich nur Werte an, die größer als q_e sind, und für $xy = 0$ kann q_e wegen $(q_e, D) = 1$ nicht dargestellt werden. Nach Satz D ist also auch hier stets $q_e \in \boldsymbol{P}$.

4. Kleinste vollzerlegte Primzahl.

SATZ 3. *Für alle $d \in \mathfrak{R}^1$ gilt*

$$q(d) = q_j \quad \textit{mit} \quad j = \max\{e|d;\ e < \sqrt{d}\}.$$

Beweis. Nach Satz 2, Lemma 1 und Lemma 3 ist $q \leqslant q_j$. Wir nehmen an, es wäre $q < q_j$.

Wegen $q \in \boldsymbol{P}$ und $(D/q) = 1$ besitzt q nach (8) genau vier verschiedene Darstellungen durch eine der reduzierten Formen von Satz 1. Eine einfache Minimumberechnung ergibt, daß die jeweils kleinsten zu D teilerfremden Primzahlen, die durch diese reduzierten Formen dargestellt werden können, stets die Form q_e haben oder größer als $2^\beta q_e$ sind. Aus $q < q_j$ folgt aber wegen (3), daß q von allen q_e verschieden ist, also ein Teiler von D sein müßte, was wegen $(D/q) = 1$ nicht möglich ist. Damit gilt $q = q_j$.

Satz 3 erlaubt es, $q(d)$ nach unten abzuschätzen. Da die Funktion $d/x + x$ für $0 < x \leqslant \sqrt{d}$ monoton fallend ist und ihr Minimum für $x = \sqrt{d}$ annimmt, gilt $d/e + e > 2\sqrt{d}$ für alle $e|d$ mit $e < \sqrt{d}$. Wegen $q(d) = q_j$ ist damit das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 4. *Für alle $d \in \mathfrak{R}^1$ gilt*

$$q(d) > \frac{2}{(d+1,\,4)}\sqrt{d} = \frac{1}{(d+1,\,2)}\sqrt{-D}.$$

Außerdem können wir für ungerades $d \in \mathfrak{R}^1$ die vollzerlegten Primzahlen p angeben, die kleiner als $\sqrt{-D/3}$ sind. Das folgende Lemma stellt damit die korrekte Form eines fehlerhaften Kriteriums von Swift [6] dar, das von Swift und anderen (vgl. [3] und dortige Vorankündigung) zur Berechnung der Diskriminanten D mit $k(D) = 1$ oberhalb fester Schranken verwendet wurde.

Lemma 5. *Sei $d \in \mathfrak{R}^1$ ungerade. Für eine Primzahl p gilt genau dann $p < \sqrt{-D/3}$ und $(D/p) = 1$, wenn $p = q_e$ mit $\sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}$ ist.* (Beispiele: siehe 5.)

Beweis. Ist d ungerade, $e|d$ und $\sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}$, so gilt wegen der Monotonie von $d/x + x$

$$q_e < \frac{1}{(d+1,\,4)}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{d} = \frac{4}{(d+1,\,4)}\sqrt{d/3} = \sqrt{-D/3}.$$

Nach Satz 2 und Lemma 3 ist $q_e \in \boldsymbol{P}$ und $(D/q_e) = 1$. Sei nun $p < \sqrt{-D/3}$ eine vollzerlegte Primzahl. Wir nehmen an, p wäre von allen q_e mit $\sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}$ verschieden. Wie schon bei dem Beweis von Satz 3 festgestellt wurde, hat für alle $d \in \mathfrak{R}^1$ die kleinste zu D teilerfremde Primzahl, die durch eine reduzierte Form dargestellt wird, die Form q_e, oder sie ist größer als $2^\beta q_e$. Da $q_e > \sqrt{-D/3}$ gilt, wenn $e < \sqrt{d/3}$ ist, kommen für die Darstellung von p nur die Formen $Q = (q_e, b_e, q_e)$ in Frage, und p kann nach unserer Annahme nicht gleich der kleinsten dargestellten vollzerlegten Primzahl q_e sein.

Für $x^2 + y^2 \geqslant 2$ nimmt $Q(x, y)$ wegen

$$qx^2 + bxy + qy^2 = \left(q - \frac{b}{2}\right)(x^2 + y^2) + \frac{b}{2}(x+y)^2 \geqslant 2q - b$$

nur Werte an, die größer oder gleich $2q_e - b_e$ sind. Dann ist aber

$$p \geqslant 2q_e - b_e = \frac{4e}{(d+1,\,4)} > \frac{4}{(d+1,\,4)}\sqrt{d/3} = \sqrt{-D/3},$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $p < \sqrt{-D/3}$. Also muß $p = q_e$ und $\sqrt{d/3} < e < \sqrt{d}$ sein.

Obwohl die Ergebnisse dieser Arbeit völlig elementar sind, können sie doch bei der weiteren Untersuchung der imaginär-quadratischen Zahlkörper mit einklassigen Geschlechtern von Bedeutung sein, da sie einerseits ziemlich scharfe und handliche Kriterien für die Anwendung auf Rechenanlagen liefern und zum anderen, weil mit ihrer Hilfe schon eine geringe Verbesserung der oberen Abschätzung von $q(d)$ zu einer Schranke für D bzw. für $t = \omega(-D)$ führt.

Ein Beispiel dafür gibt das folgende Lemma, das in gewisser Weise einem Satz von Baker und Schinzel [1] entspricht. In Theorem 1 wird dort gezeigt, daß jedes Geschlecht primitiver binärer quadratischer Formen mit der Diskriminante D eine zu D teilerfremde natürliche Zahl $\leqslant c(\varepsilon)\,|D|^{3/8+\varepsilon}$ darstellt, wobei $\varepsilon > 0$ ist und $c(\varepsilon)$ nur von ε abhängt aber nicht effektiv bekannt ist, und Theorem 2 gibt eine (hypothetische) Schranke für alle D mit $k(D) = 1$ in der Form $|D| \leqslant C(\varepsilon)$, wobei $C(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon < 1/8$ effektiv aus $c(\varepsilon)$ berechenbar ist.

Lemma 6. *Ist $q(d) \leqslant c_1(\varepsilon)\, d^{1/2-\varepsilon}$ für irgendein ε mit $0 < \varepsilon < 1/2$ und alle quadratfreien $d \in \boldsymbol{N}$, so gilt für alle $d \in \mathfrak{R}^1$*

$$d < \big(2c_1(\varepsilon)\big)^{1/\varepsilon}.$$

Beweis. Nach Lemma 4 ist $q(d) > \frac{1}{2}\sqrt{d}$ für alle $d \in \mathfrak{R}^1$. Daraus folgt sofort die obige Schranke.

Der folgende Satz, dessen Inhalt und Beweis der Verfasser einer brieflichen Mitteilung von A. Schinzel verdankt, zeigt ohne Hypothesen — aber nicht effektiv, daß in der Voraussetzung von Lemma 6 $c_1(\varepsilon)$ für alle ε mit $0 < \varepsilon < 1/8$ existiert.

Satz (A. Schinzel). *Für alle quadratfreien natürlichen Zahlen d und jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$q(d) \leqslant c_2(\varepsilon)\, d^{3/8+\varepsilon},$$

wobei $c_2(\varepsilon)$ eine von ε abhängige Konstante ist.

Beweis. Der Beweis kann ähnlich wie in [1] (Theorem 1) geführt werden. Die folgende Schlußweise ist jedoch wesentlich kürzer: Wenn nur ein Geschlecht zur Diskriminante D existiert, ist $-D = d \in \boldsymbol{P}$, und wegen $(D/p) = (p/d)$ läßt sich das Ergebnis von [5] anwenden. Gibt es mindestens zwei Geschlechter, so besitzt die kleinste zu D teilerfremde natürliche Zahl m, die durch eine nicht zum Hauptgeschlecht gehörende Form darstellbar ist, einen Primfaktor p mit $(D/p) = 1$. Nach [1] ist m und damit auch p höchstens gleich $c(\varepsilon)|D|^{3/8+\varepsilon}$.

5. Beispiele zu Lemma 5.

$-D = 15$ ($p = 2$), 35 (3), 84 (5), 91 (5), 187 (7), 195 (7), 403 (11), 420 (11), 435 (11), 483 (11), 532 (13), 555 (13), 595 (13), 627 (13), 660 (13), 1012 (17), 1092 (17), 1155 (17), 1380 (19), 1428 (19), 1435 (19), 1995 (23), 3003 (29, 31), 3315 (29, 31), 5460 (37).

Literaturverzeichnis

[1] A. Baker and A. Schinzel, *On the least integers represented by the genera of binary quadratic forms*, Acta Arith. 18 (1971), S. 137–144.

[2] Z. J. Borewicz und I. R. Šafarewič, *Zahlentheorie*, Basel und Stuttgart 1966.

[3] E. Grosswald, *Negative discriminants of binary quadratic forms with one class in each genus*, Acta Arith. 8 (1963), S. 295–306.

[4] C. S. Herz, *Construction of class fields*. In: *Seminar on complex multiplication*, Lecture Notes in Mathematics 21 (1966), VII, S. 1–21.

[5] Yu. V. Linnik and A. I. Vinogradov, *Hyperelliptic curves and the least prime quadratic residue*, Doklady Akad. Nauk SSSR 166 (1966), S. 259–261; = Soviet Math. Dokl. 7 (1966), S. 612–614.

[6] J. D. Swift, *Note on discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), S. 560–561.

Eingegangen 15. 10. 1974 (625)

ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

The Fourier expansion of Epstein's zeta function for totally real algebraic number fields and some consequences for Dedekind's zeta function

by

A. Terras* (La Jolla, Calif.)

1. Introduction. Let K be a totally real algebraic number field of odd degree $m > 1$ (over $\boldsymbol{Q}$). And suppose that the class number of K is one. We shall need the following concepts from algebraic number theory. For definitions, etc., one should refer to Lang [7]. Let O_K denote the ring of integers of K and U_K the unit group of O_K. Suppose the m embeddings of K into $\boldsymbol{R}$ over $\boldsymbol{Q}$ are denoted $x \mapsto x^{(j)}$ for $j = 1, 2, \ldots, m$. Let $Nx = \prod_{j=1}^{m} x^{(j)}$, for $x \in K$. Let d_K be the absolute value of the discriminant of K and δ_K be the different of K. The Dedekind zeta function of K is

$$\zeta_K(s) = \sum_{a \in O_K^*/U_K} Na^{-s}, \quad \text{for} \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{1.1}$$

Here the sum is over non-zero integers of K ($O_K^* = O_K - \{0\}$) which are not equivalent under multiplication by units. We use here the assumption that the class number of K is one so that all ideals are principal in O_K.

We shall prove that

$$\begin{aligned}(1.2)\quad & \zeta_K(2s)s^m + d_K^{1-2s}\left(\pi^{2s-1}\Gamma(1-s)\Gamma(s)^{-1}\right)^m \zeta_K(2-2s)(1-s)^m \\ &= -d_K^{-1/2}\left(\pi^s\Gamma(s)^{-1}\right)^m \sum_{a \in O_K^*/U_K;\, b \in \delta_K^{-1*}} \left|\frac{Na}{Nb}\right|^{\frac{1-2s}{2}} \prod_{j=1}^{m} \{K_{1/2-s}(2\pi|a^{(j)}b^{(j)}|) + \\ &\qquad + 4\pi|a^{(j)}b^{(j)}|K'_{1/2-s}(2\pi|a^{(j)}b^{(j)}|)\}.\end{aligned}$$

$K_\nu(z)$ is the modified Bessel function of the second kind defined by (2.1); $K'_\nu(z) = \dfrac{dK_\nu(z)}{dz}$. Here a runs over non-zero integers of K non-equivalent

* Supported in part by National Science Foundation Grant GP-42940.