ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

О функции $S(t)$ в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

В этой работе приведено несколько теорем о функции $S(t)$, ([4], стр. 209). А именно:

в 1 главе обобщено кубическое соотношение, полученное в работе [1], и, приведено несколько теорем в этом направлении,

во 2 главе, при некотором условии, показано, что для „большинства" значений $t \in (T, 2T)$ имеет место лучшая оценка, чем ([4], стр. 211)

$$S(T) = O(\ln T),$$

в 3 главе изучается величина $S(\bar{t}'') - S(\bar{t}')$, где $\bar{t}', \bar{t}''$ — соседние члены последовательности значений $\bar{t} = \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma'')$, и, γ', γ'' — соседние ординаты. Эта величина тесно связана с одной величиной, характеризующей горизонтальное распределение кратностей нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$.

Напомним, что интерес к изучению функции $S(t)$ обусловлен тем обстоятельством, что, в силу соотношения ([4], стр. 209)

$$N(T) = L(T) + S(T) + O(1/T)$$

в этой скачкообразной функции заключена вся информация о вертикальном распределении нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$.

1. Обобщение кубического соотношения. В работе [1] мы получили: кубическое соотношение

$$\delta^2(\bar{t}) = S^2(\bar{t})(\gamma'' - \gamma') + \frac{1}{12} S_1^2(\bar{t})(\ln \bar{t})^2 (\gamma'' - \gamma')^3, \tag{1}$$

где

$$\delta^2(\bar{t}) = \int_{\gamma'}^{\gamma''} \{S(\bar{t}) - S_1(\bar{t}) \ln \bar{t} \cdot (t - \bar{t})\}^2 dt, \qquad S_1(t) \sim \frac{1}{2\pi}, \tag{2}$$

простую теорему

$$\Delta^2(T) = \frac{\sum_{\bar{t} \in (T, 2T)} \delta^2(\bar{t})}{\sum_{\bar{t} \in (T, 2T)} 1} \sim \frac{1}{\pi} \frac{\ln \ln T}{\ln T}, \tag{3}$$

и, оценку

$$(4)\qquad a_3(T) = \frac{\sum\limits_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)} (\gamma''-\gamma')^3}{\sum\limits_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)} 1} < A\frac{\ln\ln T}{(\ln T)^3}.$$

В этой главе:

(а) обобщим кубическое соотношение (1), показав, что имеет место формула:

$$(5)\qquad \delta^{2k}(\bar t) \sim \sum_{m=0}^{k} \frac{\binom{2k}{2m}}{(4\pi)^{2m}(2m+1)} \{S(\bar t)\}^{2(k-m)}(\ln \bar t)^{2m}(\gamma''-\gamma')^{2m+1},$$

где

$$(6)\qquad \delta^{2k}(\bar t) = \int_{\gamma'}^{\gamma''} \{S(\bar t) - S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)\}^{2k}dt,$$

(b) покажем, что относительно величин

$$(7)\qquad \Delta^{2k}(T) = \frac{\sum\limits_{\bar t\in(T,2T)} \delta^{2k}(\bar t)}{\sum\limits_{\bar t\in(T,2T)} 1},$$

имеют место две теоремы:

Теорема 1. *Если справедлива гипотеза Римана и нули функции $\zeta(s)$ простые, то*

$$(8)\qquad \Delta^{2k}(T) \sim \frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k-1}}\frac{(\ln\ln T)^k}{\ln T},$$

при $T\to+\infty$ и $k = o(\ln T)$.

Теорема 2. *Независимо от какой бы то ни было гипотезы, существуют абсолютные постоянные $A_1>0$, $A_2>0$, такого рода, что*

$$(9)\qquad \Delta^{2k}(T) < A_1\frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k}}\frac{(\ln\ln T)^k}{\ln T},$$

$$(10)\qquad \Delta^{2k}(T) > A_2\frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k}}\frac{(\ln\ln T)^k}{\ln T},$$

при $T\to+\infty$ и $k = o(\ln T)$.

(с) получим оценки величин

$$(11)\qquad a_{2k+1}(T) = \frac{\sum\limits_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)} (\gamma''-\gamma')^{2k+1}}{\sum\limits_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)} 1},$$

показав, что имеет место

Теорема 3. *Независимо от какой бы то ни было гипотезы,*

$$(12)\qquad a_{2k+1}(T) < A\frac{(2k)!\,2^{2k}(2k+1)}{k!}\frac{(\ln\ln T)^k}{(\ln T)^{2k+1}},$$

при $T\to+\infty$ и $k = o(\ln T)$.

1.1. В этой части приведем некоторые вспомогательные утверждения. Прежде всего напомним ([1]), что имеет место

$$(13)\qquad S(t) = S(\bar t) - S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t) + \sum_{l=2}^{\infty}\frac{S^{(l)}(\bar t)}{l!}(t-\bar t)^l,\qquad t\in(\gamma',\gamma''),$$

где

$$(14)\qquad S_1(\bar t) \sim \frac{1}{2\pi},\qquad \frac{1}{l!}|S^{(l)}(\bar t)| < \frac{A}{\bar t^{l-1}},\qquad l = 2,3,\ldots$$

Положим

$$(15)\qquad \begin{aligned}\Phi(t,\bar t) &= S(\bar t) - S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t),\\ B(t,\bar t) &= \sum_{l=2}^{\infty}\frac{S^{(l)}(\bar t)}{l!}(t-\bar t)^l,\qquad t\in(\gamma',\gamma'').\end{aligned}$$

Так как ([4], стр. 211, 223)

$$(16)\qquad |S(T)| < A\ln T,\qquad \gamma''-\gamma' < \frac{A}{\ln\ln\ln\gamma'},$$

то, в силу (14), получается

$$(17)\qquad |\Phi(t,\bar t)| < A\ln\bar t,\qquad |B(t,\bar t)| < A/t.$$

Следовательно

$$(18)\qquad \sum_{l=1}^{2k}\binom{2k}{l}\{\Phi\}^{2k-l}\{B\}^l < 4^k A^{2k}\frac{(\ln\bar t)^{2k}}{\bar t} < A^{3k}\frac{(\ln\bar t)^{2k}}{\bar t}.$$

Теперь, из (13), в силу (18), получается

Лемма 1. *При $t\in(\gamma',\gamma'')$ имеет место*

$$(19)\qquad \{S(t)\}^{2k} = \{S(\bar t) - S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)\}^{2k} + \psi(t,\bar t),$$

где

$$(20)\qquad |\psi(t,\bar t)| < A^{3k}\frac{(\ln\bar t)^{2k}}{\bar t}.$$

Пусть

$$(21)\qquad \begin{gathered}\bar\gamma''-\bar\gamma' = \min_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma'),\qquad \varepsilon(\bar t) < \frac{\bar\gamma''-\bar\gamma'}{\bar t},\\ \tilde\gamma' = \gamma'+\varepsilon,\qquad \tilde\gamma'' = \gamma''-\varepsilon.\end{gathered}$$

Тогда, в силу (6), (16), (17), (21),

$$\int_{\tilde{\gamma}'}^{\tilde{\gamma}''} \{\Phi\}^{2k} dt = \int_{\gamma'}^{\gamma''} \{\Phi\}^{2k} dt + O\{\varepsilon A^{2k} (\ln \bar{t})^{2k}\} = \delta^{2k}(\bar{t}) + O\left\{\frac{A^{2k}(\ln \bar{t})^{2k}}{\bar{t} \ln\ln\ln \bar{t}}\right\}. \tag{22}$$

Следовательно, из (19), в силу (22), получается

Лемма 2.

$$\delta^{2k}(\bar{t}) = \int_{\gamma'}^{\gamma''} \{S(t)\}^{2k} dt + O\left\{\frac{A^{3k}(\ln \bar{t})^{2k}}{\bar{t} \ln\ln\ln \bar{t}}\right\}. \tag{23}$$

В заключение этой части напомним две теоремы А. Зельберга, нужные для наших целей.

Пусть $N_0(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta(s)$ типа $\frac{1}{2}+i\gamma$, $0<\gamma\leqslant T$. В работе [2], стр. 46, А. Зельберг показал, что имеет место теорема: если $U > T^a$, где $a > \frac{1}{2}$, то существуют $A = A(a)$, $T_0 = T_0(a)$, такого рода, что

$$N_0(T+U) - N_0(T) > AU \ln T \quad (T > T_0). \tag{24}$$

Напомним, что эта теорема дает оценку снизу количества положений нечетных нулей $\frac{1}{2}+i\bar{\gamma}$, ординаты которых попадают в промежуток $\langle T, T+U\rangle$. Пусть теперь, $\bar{\gamma}'$, $\bar{\gamma}''$ — ординаты соседних нулей $\frac{1}{2}+i\bar{\gamma}'$, $\frac{1}{2}+i\bar{\gamma}''$ нечетного порядка, и,

$$\nu(T) = \sum_{(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}'') \subset (T, 2T)} 1.$$

Следовательно, в силу (24), при $U = T$, имеет место

$$\nu(T) > AT \ln T. \tag{25}$$

Дальше, так как $N_0(T) \leqslant N(T)$, и, ([4], стр. 212)

$$N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \ln T, \tag{26}$$

то, независимо от гипотезы Римана, имеет место

$$A_1 T \ln T < \sum_{(\gamma', \gamma'') \subset (T, 2T)} 1 < A_2 T \ln T. \tag{27}$$

Если предположить справедливой гипотезу Римана и простоту нетривиальных нулей, то, в силу (26),

$$\sum_{(\gamma', \gamma'') \subset (T, 2T)} 1 \sim N(2T) - N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \ln T. \tag{28}$$

Наконец напомним ([3], стр. 128, Теорема 6, при $H = T$) что, независимо от гипотезы Римана, имеет место теорема о среднем

$$\int_T^{2T} \{S(t)\}^{2k} dt \sim \frac{(2k)!}{k!\,(2\pi)^{2k}} T (\ln\ln T)^k, \tag{29}$$

(k — целое положительное).

1.2. В этой части приведем:

(A) Доказательство теоремы 1 и теоремы 2.

(B) Вывод формулы (5).

(A) Так как, в силу (16),

$$\sum_{\bar{t} \in (T, 2T)} \int_{\gamma'}^{\gamma''} \{S(t)\}^{2k} dt = \int_T^{2T} \{S(t)\}^{2k} dt + O\left\{\frac{A^{2k}(\ln T)^{2k}}{\ln\ln\ln T}\right\}, \tag{30}$$

то, из (7), в силу (23), (30), получается

$$\Delta^{2k}(T) = \frac{\int_T^{2T} \{S(t)\}^{2k} dt + O\left\{\frac{A^{2k}(\ln T)^{2k}}{\ln\ln\ln T}\right\}}{\sum_{\bar{t} \in (T, 2T)} 1} + O\left\{\frac{A^{3k}(\ln T)^{2k}}{T \ln\ln\ln T}\right\}. \tag{31}$$

Теперь, используя формулу (29) и соотношение (28), получается (8).

Если вместо (28) используем (27), то получаются (9), (10).

(B) Так как

$$\int_{\gamma'}^{\gamma''} (t-\bar{t})^r dt = \frac{1+(-1)^r}{r+1} \left(\frac{\gamma''-\gamma'}{2}\right)^{r+1}, \quad r = 0, 1, \ldots,$$

то

$$\int_{\gamma'}^{\gamma''} \{S(\bar{t}) - S_1(\bar{t}) \ln \bar{t} \cdot (t-\bar{t})\}^{2k} dt = \tag{32}$$

$$= \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} (-1)^l \frac{1+(-1)^l}{l+1} \{S\}^{2k-l} \{S_1 \ln \bar{t}\}^l \left(\frac{\gamma''-\gamma'}{2}\right)^{l+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\binom{2k}{2m}}{2^{2m}(2m+1)} \{S(\bar{t})\}^{2(k-m)} \{S_1(\bar{t}) \ln \bar{t}\}^{2m} (\gamma''-\gamma')^{2m+1}.$$

Из (6), в силу (14), (32), получается (5).

1.3. В этой части приведем

Доказательство теоремы 3. В силу (5), при $\bar{t}\in(T,2T)$,

$$\delta^{2k}(\bar{t}) > \frac{A}{(4\pi)^{2k}(2k+1)}(\ln\bar{t})^{2k}(\gamma''-\gamma')^{2k+1} > \tag{33}$$

$$> \frac{A}{(4\pi)^{2k}(2k+1)}(\ln T)^{2k}(\gamma''-\gamma')^{2k+1},$$

значит,

$$(\gamma''-\gamma')^{2k+1} < A(4\pi)^{2k}(2k+1)\frac{\delta^{2k}(\bar{t})}{(\ln T)^{2k}}, \tag{34}$$

и, следовательно, (7), (11),

$$a_{2k+1}(T) < A(4\pi)^{2k}(2k+1)\frac{\Lambda^{2k}(T)}{(\ln T)^{2k}}. \tag{35}$$

Из (35), в силу (9), получается (12).

Если принять во внимание, что, в силу оценки Литтлвуда, (16),

$$\gamma''-\gamma' < \frac{A}{\ln\ln\ln T} < 1, \quad (\gamma',\gamma'')\subset(T,2T),$$

имеет место

$$a_{2k'+1}(T) > a_{2k''+1}(T), \quad k' < k'', \tag{36}$$

то, из теоремы 3 получается

Следствие.

$$a_{2k+1}(T) < \begin{cases} A\dfrac{(2k)2!^{2k}(2k+1)}{k!}\dfrac{(\ln\ln T)^k}{(\ln T)^{2k+1}}, & k\leqslant L, \\ A\dfrac{(2L)2!^{2L}(2L+1)}{L!}\dfrac{(\ln\ln T)^L}{(\ln T)^{2L+1}}, & k > L, \end{cases}$$

где $L=[\varphi(T)]$, $0<\varphi(T)=o(\ln T)$.

2. Об одной O-теореме. Как уже отмечалось, для функции $S(t)$ имеет место оценка

$$|S(t)| < A\ln t. \tag{37}$$

Однако, из теоремы о среднем А. Зельберга, (29) при $k=1$, получается

$$\frac{1}{2\pi^2}T\ln\ln T\sim\int_T^{2T}\{S(t)\}^2dt = \{C(T)\}^2\cdot T,$$

т.е.

$$|C(T)|\sim\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sqrt{\ln\ln T}.$$

Это последнее наводит на мысль, что для „большинства” значений $t\in(T,2T)$ имеет место более точная чем (37) оценка, для функции $S(t)$.

2.1. Прежде чем точно сформулировать соответствующую теорему, напомним некоторые обстоятельства. В работе [1] была введена дискретная случайная величина $\omega(T)$. Эта величина принимает значения

$$\omega_k = \begin{cases} k\{G(T)\}^2, & k=1,2,\ldots,n(T), \\ \bar{\gamma}(T), & k=0, \end{cases}$$

где

$$G(T)=\frac{2\pi}{\ln T}, \quad n(T)=[\bar{\bar{\gamma}}(T)\{G(T)\}^{-2}]+1,$$

$$\bar{\gamma}(T)=\min_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma'), \quad \bar{\bar{\gamma}}(T)=\max_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma'),$$

с соответствующими вероятностями

$$P_k=\frac{W_k}{Q(T)}.$$

В последнем соотношении W_k обозначает число промежутков $(\gamma',\gamma'')\subset$ $\subset(T,2T)$, такого рода, что

$$k\{G(T)\}^2 < \gamma''-\gamma' \leqslant (k+1)\{G(T)\}^2, \tag{38}$$

и $Q(T)$ число всех промежутков $(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)$. В силу (27), имеет место

$$A_1T\ln T < Q(T) < A_2T\ln T. \tag{39}$$

Сосредоточим теперь внимание на величине $W_0=W_0(T)$, т.е. на числе промежутков $(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)$, длины которых принадлежат первой из ячеек (38),

$$\gamma''-\gamma' \leqslant \{G(T)\}^2 = \frac{4\pi^2}{(\ln T)^2}. \tag{40}$$

В этой главе приведем один результат, следующий из предположения, что порядок величины $W_0(T)$ ниже $T\ln T$. А именно, покажем, что имеет место

Теорема 4. *Если*

$$W_0(T)=o(T\ln T), \tag{41}$$

то существует $R(T)$ *значений* $\bar{t}\in(T,2T)$, $\bar{t}=\frac{1}{2}(\gamma'+\gamma'')$, *такого рода, что*

$$|S(\bar{t})| < A(\ln T)^{1/2}(\ln\ln T)^{2/3}, \tag{42}$$

$$R(T) > AT\ln T. \tag{43}$$

2.2. В этой части рассмотрим одно обстоятельство, свидетельствующее в пользу предположения (41).

В связи со случайной величиной $\omega(T)$ было введено $n(T)$ ячеек (38), где

$$n(T) = [\bar{\bar{\gamma}}(T)\{G(T)\}^{-2}]+1. \tag{44}$$

Если бы нам посчастливилось оценить снизу величину

$$\bar{\bar{\gamma}}(T) = \max_{(\gamma', \gamma'')\subset(T,2T)} (\gamma''-\gamma'),$$

то оказалось бы возможным оценить сверху величину

$$\frac{Q(T)}{n(T)}. \tag{45}$$

Так как $Q(T)$ дает число всех промежутков $(\gamma', \gamma'')\subset(T, 2T)$, то величина (45) дает количество значений $\gamma''-\gamma'$, соответствующих в среднем одной ячейке.

Однако, (39),

$$a_1(T) = \frac{1}{Q(T)} \sum_{(\gamma', \gamma'')\subset(T,2T)} (\gamma''-\gamma') > \frac{A}{\ln T}, \tag{46}$$

следовательно, существует промежуток $(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'')\subset(T, 2T)$, такого рода, что

$$\tilde{\gamma}''-\tilde{\gamma}' > \frac{A}{\ln T},$$

и, понятно,

$$\bar{\bar{\gamma}}(T) > \frac{A}{\ln T}. \tag{47}$$

Теперь, из (44), получается

$$n(T) > A\ln T. \tag{48}$$

Так что, в силу (39), (48),

$$\frac{Q(T)}{n(T)} < AT. \tag{49}$$

Соотношение (49) позволяет считать естественным предположение (41).

2.3. В этой части приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Пусть $Q_1(T)$ — количество таких значений $\bar{t}\in(T, 2T)$, для которых*

$$\delta^2(\bar{t}) > A\frac{(\ln\ln T)^{4/3}}{\ln T}. \tag{50}$$

Тогда

$$Q_1(T) = o(T\ln T). \tag{51}$$

Действительно. В силу определения $\Delta^2(T)$, (см. (3)),

$$\Delta^2(T) > A\frac{(\ln\ln T)^{4/3}}{\ln T}\frac{Q_1(T)}{Q(T)}. \tag{52}$$

Из этого, в силу (9) при $k=1$, и (39), получается

$$Q_1(T) < A\frac{T\ln T}{(\ln\ln T)^{1/3}}, \tag{53}$$

т.е. (51).

Лемма 4. *Пусть $Q_2(T)$ — количество таких значений $\bar{t}\in(T, 2T)$, для которых*

$$\gamma''-\gamma' > A\frac{(\ln\ln T)^{1/3}}{\ln T}. \tag{54}$$

Тогда

$$Q_2(T) = o(T\ln T). \tag{55}$$

Это непосредственно следует из соотношения

$$a_1(T) = \frac{1}{Q(T)} \sum_{(\gamma', \gamma'')\subset(T,2T)} (\gamma''-\gamma'),$$

если принять во внимание, что, в силу (39),

$$a_1(T) < \frac{A}{\ln T}.$$

2.4. В этой части приведем

Доказательство теоремы 4. Из количества $Q(T)$ значений $\bar{t}\in(T, 2T)$ выбросим $W_0(T)$ значений, для которых имеет место (40).

Дальше, из оставшихся значений выбросим не больше чем $Q_1(T)$ значений, для которых имеет место (50).

Наконец, из оставшихся значений выбросим не больше чем $Q_2(T)$ значений, для которых имеет место (54).

После этого выбрасывания остается, самое меньшее,

$$R(T) = Q(T)-W_0(T)-Q_1(T)-Q_2(T) \tag{56}$$

значений $\bar{t}\in(T, 2T)$, для которых, одновременно,

$$\frac{4\pi^2}{\ln^2 T} < \gamma''-\gamma' \leqslant A\frac{(\ln\ln T)^{1/3}}{\ln T}, \qquad \delta^2(\bar{t}) < A\frac{(\ln\ln T)^{4/3}}{\ln T}. \tag{57}$$

Теперь уже завершим доказательство.

(a) Из (56), в силу (39), (41), (51), (55), получается
$$R(T) > AT\ln T,$$
т.е. (43).

(b) Так как, в силу (5) при $k=1$,

(58) $$\delta^2(\bar{t}) > S^2(\bar{t})(\gamma''-\gamma'),$$

то

(59) $$|S(\bar{t})| < \left\{\frac{\delta^2(\bar{t})}{\gamma''-\gamma'}\right\}^{1/2}.$$

Из (59), для упоминавшихся $R(T)$ значений, в силу (57), получается
$$|S(\bar{t})| < A(\ln T)^{1/2}(\ln\ln T)^{2/3},$$
т.е. (42).

2.5. В этой части получим одно следствие из теоремы 4. Так как, в силу (14),

(60) $$\sum_{l=2}^{\infty}\frac{S^{(l)}(\bar{t})}{l!}(t-\bar{t})^l = O\left(\frac{1}{T}\right),$$

и, в силу соотношения, см. (57),
$$\gamma''-\gamma' \leqslant A\frac{(\ln\ln T)^{1/3}}{\ln T},$$
для упоминавшихся $R(T)$ значений $\bar{t}\in(T,2T)$,

(61) $$|S_1(\bar{t})\ln\bar{t}\cdot(t-\bar{t})| < A\ln T\cdot(\gamma''-\gamma') < A(\ln\ln T)^{1/3},$$

то из (13), в силу (42), (60), (61) получается

(62) $$|S(t)| < A(\ln T)^{1/2}(\ln\ln T)^{2/3}, \quad t\in(\gamma',\gamma'').$$

Дальше, если вспомнить, что ([4], стр. 209),
$$S(\gamma) = S(\gamma+0),$$
то, в силу (62),

(63) $$|S(\gamma')| < A(\ln T)^{1/2}(\ln\ln T)^{2/3}.$$

Теперь, в силу (62), (63), из теоремы 4 получается

Следствие. *Существует $R(T) > AT\ln T$ промежутков $\langle\gamma',\gamma''\rangle\subset(T,2T)$, такого рода, что*

(64) $$|S(t)| < A(\ln T)^{1/2}(\ln\ln T)^{2/3}, \quad t\in\langle\gamma',\gamma''\rangle.$$

3. О величине $S(\bar{t}'')-S(\bar{t}')$. Напомним что $\{\bar{t}\}$ обозначает последовательность значений $\bar{t}=\frac{1}{2}(\gamma'+\gamma'')$ и $\bar{t}'<\bar{t}''$ — соседние члены этой последовательности. Следовательно, члены последовательностей $\{\bar{t}\}$ и $\{\gamma\}$ отделяют друг друга. Будем иметь в виду следующее взаимное расположение (и обозначение) членов этих последовательностей:

(65) $$\gamma'<\bar{t}'<\gamma''<\bar{t}''<\gamma'''.$$

Понятно, в силу (37), для всех пар $\bar{t}',\bar{t}''\in(T,2T)$, имеет место оценка

(66) $$|S(\bar{t}'')-S(\bar{t}')| < A\ln T.$$

В этой главе, для „заметного” количества пар $\bar{t}',\bar{t}''\in(T,2T)$ получим лучшую оценку. А именно, покажем, что имеет место

Теорема 5. *Пусть $\psi(T)>0$ любая, сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция (например $\psi(T)=o(\ln\ln\ln T)$). Тогда, независимо от какой бы то ни было гипотезы, существует*

(67) $$R_1(T,\psi) > AT\ln T$$

пар $\bar{t}',\bar{t}''\in(T,2T)$, для которых

(68) $$|S(\bar{t}'')-S(\bar{t}')| < \psi(T).$$

3.1. В этой части получим основную (для дальнейшего) формулу. Сначала напомним некоторые обстоятельства, касающиеся кратности нулей функции $\zeta(s)$.

Е. К. Титчмарш ([4], стр. 212) о функции $S(t)$ сказал: „При переходе через нуль порядка k она терпит разрыв первого рода со скачком, равным k...”.

Это верно, если предполагается справедливой гипотеза Римана. Однако, в общем случае (т.е. независимо от каких бы то ни было гипотез) это место нуждается в дополнении. Сейчас скажем в чем дело — в общем случае не исключена возможность, что существует (конечная) совокупность нулей, обладающих одинаковой ординатой. Пусть $n(\beta,\gamma)$ обозначает кратность нуля $\beta+i\gamma$, $0<\beta<1$. Введем величину

(69) $$n(\gamma) = \sum_{\beta} n(\beta,\gamma),$$

где β пробегает абсциссы конечной совокупности нулей $\beta+i\gamma$ с одинаковой ординатой γ.

В силу формулы ([4], стр. 209)

(70) $$N(T) = L(T)+S(T)+O(1/T),$$

так как $L(T)$ и $O(1/T)$ — непрерывные функции, получается

(71) $$n(\gamma) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{N(\gamma+\varepsilon)-N(\gamma-\varepsilon)\} = S(\gamma+0)-S(\gamma-0).$$

В силу (13), (60), принимая во внимание (65), получается

$$
(72)\qquad \begin{aligned} S(\gamma''-0) &= S(\bar t')-S_1(\bar t')\ln\bar t'\cdot(\gamma''-\bar t')+O(1/\gamma''),\\ S(\gamma''+0) &= S(\bar t'')-S_1(\bar t'')\ln\bar t''\cdot(\gamma''-\bar t'')+O(1/\gamma''). \end{aligned}
$$

Так как, в силу оценки Литтлвуда

$$\gamma''-\gamma' < \frac{A}{\ln\ln\ln\gamma'}$$

имеет место

$$(73)\qquad \ln\bar t''\sim\ln\bar t',$$

и, в силу (14),

$$(74)\qquad S_1(\bar t'')\sim S_1(\bar t')\sim\frac{1}{2\pi},$$

то из (71) получается формула:

$$(75)\qquad n(\gamma'')\sim S(\bar t'')-S(\bar t')+\frac{1}{2\pi}\ln\bar t'\cdot(\bar t''-\bar t').$$

3.2. В этой части приведем вспомогательные утверждения. Введем величину

$$(76)\qquad m(T) = \frac{\sum\limits_{\gamma\in(T,2T)} n(\gamma)}{\sum\limits_{\gamma\in(T,2T)} 1},$$

т.е. среднее арифметическое величин $n(\gamma)$, принадлежащих промежутку $(T, 2T)$. В силу (39) получается

$$(77)\qquad m(T) < A.$$

Из (77), в силу простого свойства среднего арифметического, получается

Лемма 5. *Существует абсолютная постоянная B, такого рода, что если $V_1(T,B)$ обозначает количество таких $\gamma\in(T,2T)$, для которых*

$$(78)\qquad n(\gamma) < B,$$

то $V_1(T,B)$ — порядка $T\ln T$.

Пусть, дальше, $V_2(T,\psi_1)$ обозначает количество промежутков $(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)$, такого рода, что

$$(79)\qquad \gamma''-\gamma' > \frac{\psi_1(T)}{\ln T},$$

где $\psi_1(T)$ возрастает к $+\infty$. Имеет место

Лемма 6.

$$(80)\qquad V_2(T,\psi_1) = o(T\ln T).$$

Действительно. Из (39),

$$\frac{A_2}{\ln T} > a_1(T) > A\,\frac{\psi_1(T)}{\ln T}\,\frac{V_2(T,\psi_1)}{T\ln T},$$

т.е.

$$V_2(T,\psi_1) < A\,\frac{T\ln T}{\psi_1(T)}.$$

3.3. В этой части приведем

Доказательство теоремы 5. Прежде всего, имея в виду (65), обозначим символом $\overset{*}{\gamma}{}''$ те значения $\gamma\in(T, 2T)$, для которых имеет место (78), т.е.

$$(81)\qquad n(\overset{*}{\gamma}{}'') < B,$$

и (фиксируя постоянную B) рассмотрим количество $V_1(T)$ соприкасающихся промежутков

$$(82)\qquad \langle\overset{*}{\gamma}{}',\overset{*}{\gamma}{}''\rangle,\ \langle\overset{*}{\gamma}{}'',\overset{*}{\gamma}{}'''\rangle.$$

Из этого количества выделим:

(a) количество $R_1(T)$, для которого

$$(83)\qquad \overset{*}{\gamma}{}''-\overset{*}{\gamma}{}'\leqslant\frac{\psi_1(T)}{\ln T},\qquad \overset{*}{\gamma}{}'''-\overset{*}{\gamma}{}''\leqslant\frac{\psi_1(T)}{\ln T},$$

(b) количество $R_2(T)$, в котором длина, хотя бы одного из соприкасающихся промежутков (82)

$$>\frac{\psi_1(T)}{\ln T}.$$

Очевидно

$$(84)\qquad V_1(T) = R_1(T)+R_2(T).$$

Однако, в силу леммы 6

$$(85)\qquad R_2(T) = o(T\ln T),$$

и, в силу леммы 5, $V_1(T)$ — порядка $T\ln T$. Значит, в силу (84), $R_1(T)$ — порядка $T\ln T$.

Наконец, так как, в силу (83)

$$(86)\qquad \overset{*}{\bar t}{}''-\overset{*}{\bar t}{}' = \frac{1}{2}(\overset{*}{\gamma}{}'''-\overset{*}{\gamma}{}') < \frac{\psi_1(T)}{\ln T},$$

то, из (75), в силу (81), (86), получается

$$|S(\overset{*}{t}'') - S(\overset{*}{t}')| < B + A\psi_1(T) < A\psi_1(T) = \psi(T). \tag{87}$$

На этом доказательство закончено.

Литература

[1] Ян Мозер, *О некоторых арифметических средних в теорий дзета-функции Римана*, Acta Arith. 28 (1976), стр. 363–377.
[2] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske vid. Akad. Oslo, 10 (1942), стр. 1–59.
[3] — *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*, Arch. for. Math. og Naturv. B, 48 (1946), No. 5.
[4] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Поступило 9. 9. 1974
по исправлению 2. 12. 1974 (617)

ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

A note on Waring's problem in GF(p)

by

M. M. Dodson (York) and A. Tietäväinen (Turku)

1. Introduction. Let p be a prime, k a positive integer, $d = (k, p-1)$ the greatest common divisor of k and $p-1$, and $t = (p-1)/d$. Let $\gamma(k, p)$ denote the least positive integer s such that every residue (mod p) can be represented as a sum of s kth power residues (mod p). In other words, if $s \geqslant \gamma(k, p)$, the congruence

$$x_1^k + \ldots + x_s^k \equiv N \pmod p \tag{1}$$

has a solution for all integers N. It is well known that

$$\gamma(k, p) = \gamma(d, p)$$

and that

$$\gamma(p-1, p) = p-1, \quad \gamma\big(\tfrac{1}{2}(p-1), p\big) = \tfrac{1}{2}(p-1),$$

p being odd in the last equation. In this paper we shall be concerned with the case when $d < \frac{1}{2}(p-1)$ and for convenience we define

$$\gamma(k) = \max_p \{\gamma(k, p)\colon\ d < \tfrac{1}{2}(p-1)\}.$$

In 1943 I. Chowla [3] proved that

$$\gamma(k) = O(k^{1-c+\varepsilon})$$

where $c = (103 - 3\sqrt{641})/220$ and where ε is, as always in this paper, a positive number. In 1971 Dodson [5] improved this estimate to the simpler result

$$\gamma(k) < k^{7/8}$$

providing k is sufficiently large and in 1973 Tietäväinen [7] showed that

$$\gamma(k) = O(k^{3/5+\varepsilon}).$$

Actually the first two results above were obtained for $\Gamma(k, p)$, the least s such that the congruence (1) has primitive or nontrivial solutions for all integers N. However in view of the immediate inequalities

$$\gamma(k, p) \leqslant \Gamma(k, p) \leqslant \gamma(k, p) + 1$$