ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

Conspectus materiae tomi XXX, fasciculi 2

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange	Address of the Editorial Board and of the exchange	Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches	Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Zéros communs non singuliers de deux formes quadratiques

par

DIDIER NORDON (Talence)

Nous montrons que, à part deux cas exceptionnels explicites, deux formes quadratiques sur un corps fini ont un zéro commun non singulier si et seulement si toute forme du faisceau qu'elles engendrent a un zéro non singulier. Cela permet de donner une condition suffisante pour que deux formes quadratiques sur Q_p aient des zéros communs non singuliers, apportant ainsi un complément au théorème de Demyanov.

Je tiens à remercier le rapporteur pour les nombreuses améliorations qu'il a apportées au texte initial, en particulier dans le paragraphe 5.

1. Notations et définitions. Le plus souvent, nous considérons simultanément deux formes quadratiques sur un corps k; dans toute la suite, n désignera le nombre d'indéterminées intervenant dans ces formes. Le faisceau engendré par les formes F et G est l'ensemble des formes $uF+vG$ où u et v parcourent k.

Si T est une transformation linéaire inversible définie sur les coordonnées, nous appelons $F_T(X)$ la forme $F(TX)$.

Les expressions *ordre d'une forme*, *forme dégénérée*, *ordre d'un couple de formes*, *couple de formes dégénéré*, *zéro singulier ou non singulier* ont le même sens que dans [1].

Nous appelons *variété k-singulière* une variété qui a au moins un point singulier sur k. Rappelons qu'une variété est *singulière* s'il existe une extension algébrique K de k telle que la variété est K-singulière.

Dans le cas où $\operatorname{car} k \neq 2$, nous pouvons écrire:

$$F(X) = {}^tXFX, \quad G(X) = {}^tXGX,$$

où X désigne le vecteur colonne des coordonnées et où les matrices F et G sont symétriques.

Si T est une transformation linéaire inversible sur les coordonnées, on a:

$$F_T = {}^tTFT.$$

Posons pour toute la suite:

$$\Phi(u, v) = \text{dét}(uF + vG);$$

Φ est soit une forme de degré n en u et v, soit identiquement nulle. Le discriminant de Φ est noté $\theta(F, G)$.

Nous disons qu'une variété définie par l'équation $F = G = 0$ est *presque k-singulière* si la forme $\Phi(u, v)$ est nulle ou a un facteur linéaire multiple dans k. Une variété k-singulière est presque k-singulière, mais la réciproque est fausse.

2. Enoncé du résultat principal. Il est clair que si X est un zéro non singulier commun à F et G, toute forme du faisceau engendré par F et G a un zéro non singulier (X par exemple). Le théorème suivant concerne la réciproque de cette remarque quand k est un corps fini.

THÉORÈME. *Soient F et G deux formes quadratiques sur un corps fini k, en n indéterminées, et supposons le couple (F, G) non dégénéré. Supposons que toute forme $uF + vG$ $((u, v) \neq (0, 0))$ du faisceau engendré par F et G a un zéro non singulier. Alors F et G ont un zéro commun non singulier sauf dans les deux cas suivants:*

(i) car $k \neq 2$, $n = 4$, *la variété $F = G = 0$ est singulière mais pas presque k-singulière et le déterminant de F est un non résidu de k; dans ce cas exceptionnel, F et G sont sans zéro commun;*

(ii) car $k = 2$, $n = 4$ *et toutes les formes du faisceau sont d'ordre* 4; *dans ce cas, F et G peuvent n'avoir aucun zéro commun.*

Si le couple (F, G) est dégénéré, le théorème reste vrai en y remplaçant partout n par l'ordre du couple.

Notre démonstration repose principalement sur les résultats suivants, démontrés dans [1].

LEMME 2.1. *Si une forme quadratique a des zéros non singuliers dans k, ils ne peuvent appartenir tous au même sous-espace linéaire propre de k^n.*

LEMME 2.2. *Si F et G sont un couple non dégénéré de formes quadratiques qui ont un zéro commun mais aucun zéro commun non singulier, il existe une forme dans le faisceau engendré par F et G qui n'a que des zéros singuliers.*

Nous ferons la démonstration en supposant le couple (F, G) non dégénéré, et les formes F et G non proportionnelles. L'idée générale en est la suivante. Si les formes F et G ont un zéro commun, le lemme 2.2 fournit la conclusion du théorème. Si elles n'ont pas de zéro commun, nous utilisons une réduction des formes F et G (qui est la diagonalisation quand car $k \neq 2$) pour montrer que, sauf dans les cas exceptionnels (i) et (ii), elles ne vérifient pas les hypothèses du théorème.

Dans le cas $n \geqslant 5$, le théorème de Chevalley permet d'appliquer le lemme 2.2, d'où le théorème.

Nous ferons la démonstration pour $n \leqslant 4$ en étudiant successivement les cas car $k \neq 2$ puis car $k = 2$.

3. Lemmes généraux (car $k \neq 2$). Dans ce paragraphe, nous supposons car $k \neq 2$.

Si T est une transformation linéaire, posons:

$$\Phi_T(u, v) = \text{dét}(uF_T + vG_T).$$

Désignons par $\mathscr{F}$ le faisceau engendré par F et G. Les deux lemmes suivants sont faciles.

LEMME 3.1. *Les formes $\Phi(u, v)$ et $\Phi_T(u, v)$ sont proportionnelles:*

$$\Phi_T = (\text{dét}\, T)^2 \Phi.$$

LEMME 3.2. *Supposons qu'il existe deux éléments de k, a et b, non tous deux nuls, tels que $au + bv$ divise $\Phi(u, v)$. Soient a_1 et b_1 deux éléments de k quelconques, non tous deux nuls. Alors, il existe F_1 et G_1 dans $\mathscr{F}$ telles que:*

(i) *F_1 et G_1 engendrent elles aussi $\mathscr{F}$;*

(ii) *$a_1 u + b_1 v$ se met en facteur dans $\Phi_1(u, v) = \text{dét}(uF_1 + vG_1)$.*

Si le facteur linéaire $au + bv$ divise $\Phi(u, v)$, il est clair que la forme $bF - aG$ est de déterminant nul. Désignons par σ l'ordre de multiplicité de $au + bv$ dans Φ et par m le rang de la matrice $bF - aG$.

LEMME 3.3. *On a la double inégalité:*

$$n - \sigma \leqslant m \leqslant n - 1.$$

Démonstration. L'inégalité de droite exprime que le déterminant de $bF - aG$ est nul. Pour montrer l'inégalité de gauche, on se ramène, grâce aux deux lemmes qui précèdent, au cas où c'est le facteur v qui divise $\Phi(u, v)$ (on a donc dét $F = 0$); diagonalisons alors F:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_m x_m^2, \qquad m \leqslant n - 1.$$

Sous cette forme, il est évident que v^{n-m} au moins se met en facteur dans $\Phi(u, v)$, d'où le lemme.

LEMME 3.4. *Si Φ est identiquement nulle, F et G ont un zéro commun.*

Démonstration. Diagonalisons F:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 \quad \text{avec} \quad a_1, \ldots, a_m \neq 0.$$

On a $m \leqslant n - 1$ puisque F, comme toutes les formes de ce faisceau, est de déterminant nul. Par une transformation linéaire portant sur $x_{m+1}, \ldots, x_n$ uniquement, et qui laisse donc F inchangée, on peut amener G à la forme

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

où A est une matrice symétrique (m, m), B une matrice $(m, n-m)$ et C une matrice $(n-m, n-m)$ diagonale. En écrivant que le coefficient de $u^m v^{n-m}$ dans $\Phi(u, v)$ est nul, on trouve que le déterminant de C est nul; donc un des éléments diagonaux de C est nul; si c'est, par exemple, le dernier, le vecteur $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ est un zéro commun à F et G, ce qui démontre le lemme.

Lemme 3.5. *La variété $F = G = 0$ est singulière si et seulement si $\theta(F, G) = 0$.*

Voir ce résultat dans [5]. Le lemme suivant est facile:

Lemme 3.6. *Supposons k fini, de cardinal q. Soit Φ une forme homogène en u et v. Soient $\bar{H}$ le nombre de solutions dans k de l'équation $t^2 = \Phi(u, v)$ où u, v et t sont les inconnues, et H le nombre de solutions dans k de l'équation $y^2 = \Phi(x, 1)$. Alors on a les relations:*

$$\bar{H} = \begin{cases} (q-1)H+2q-1 & \text{si} \quad \Phi(1, 0) \text{ est un résidu;} \\ (q-1)H+1 & \text{si} \quad \Phi(1, 0) \text{ est un non-résidu;} \\ (q-1)H+q & \text{si} \quad \Phi(1, 0) = 0. \end{cases}$$

Formule de Weil. Dans [5], Weil démontre une formule qui permet de compter le nombre N de zéros communs à deux formes quadratiques sur un corps fini de caractéristique impaire. Nous utiliserons cette formule dans quelques cas où elle se simplifie.

4. Démonstration du théorème (car $k \neq 2$). Dans toute cette partie, k est un corps fini de cardinal impair q. Nous laissons le cas $n = 2$ aux soins du lecteur.

A. Le cas $n = 4$.

Distinguons plusieurs cas.

1. Supposons d'abord la variété $F = G = 0$ non singulière. La formule de Weil se réduit à $N = \bar{H}-1$. Par le lemme 3.6, nous sommes ramenés au calcul du nombre H de points de la courbe $y^2 = \Phi(x, 1)$; dans le cas que nous considérons ici, le discriminant de Φ est non nul et cette courbe est une courbe elliptique; on sait qu'alors le nombre de points à coordonnées dans k de cette courbe (y compris le point à l'infini compté avec sa multiplicité) est au moins $q+1-2\sqrt{q}$ (voir [3]). Si q est au moins égal à 7, cette minoration implique $H \geqslant 1$, d'où $\bar{H} > 1$ et donc $N > 0$. Les formes F et G ont donc un zéro commun. Si $q = 3$ ou $q = 5$, on obtient le résultat en explicitant les calculs sur $\boldsymbol{F}_3$ et sur $\boldsymbol{F}_5$.

2. Si la variété $F = G = 0$ est singulière mais non presque k-singulière, Φ est de la forme

$$\Phi(u, v) = a(au^2+buv+cv^2)^2$$

où a, a, b, c appartiennent à k; b^2-4ac est non résidu de k et a non nul. D'après le théorème de Chevalley, toute forme du faisceau a des zéros, qui sont tous non singuliers puisque $\Phi(u, v)$ ne peut s'annuler pour aucune forme du faisceau. La formule de Weil se réduit encore à $N = \bar{H}-1$. Distinguons deux cas:

2.1. si a est résidu de k, $\Phi(1, 0)$ aussi; H vaut au moins 1, d'où le théorème par le lemme 2.2.

2.2. si a n'est pas résidu de k, le déterminant de F non plus et $\bar{H}$ vaut 1: c'est le cas exceptionnel (i) du théorème.

3. Si la variété $F = G = 0$ est presque k-singulière, utilisons des formes réduites pour F et G (la formule de Weil est ici moins simple).

En changeant éventuellement de formes dans le faisceau (lemme 3.2), nous pouvons supposer que v^2 se met en facteur dans $\Phi(u, v)$. Diagonalisons alors la forme F, ce qui laisse v^2 en facteur dans Φ (lemme 3.1). Il est facile d'en déduire que F et G peuvent être de deux types différents:

1ère réduction:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2$$

avec a_2, a_3, a_4 tous non nuls et

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,j=1}^{4} b_{ij}x_ix_j \quad \text{avec} \quad b_{11} = 0 \text{ et } b_{ij} = b_{ji}.$$

On supposera de plus b_{22} nul (sinon, il suffirait de remplacer G par $G-(b_{22}/a_2)F$).

2ème réduction:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_3x_3^2+a_4x_4^2,$$

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,j=1}^{4} b_{ij}x_ix_j \qquad (b_{ij} = b_{ji}).$$

Nous pouvons supposer b_{12} nul grâce à une transformation linéaire laissant invariants x_3 et x_4.

Traitons par exemple la première réduction, en montrant que dans ce cas F et G ont un zéro commun. Choisissons pour cela successivement x_2, x_3, x_4 puis x_1 de façon que soient remplies les conditions suivantes:

(i) $a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2 = 0$,

(ii) $b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4 \neq 0$,

(iii) le vecteur $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un zéro commun à F et G.

Comme, d'après le théorème de Chevalley, la forme $a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2$ a un zéro non singulier, ses zéros non singuliers ne peuvent appartenir tous à un même sous-espace propre (lemme 2.1): ceci permet de remplir simultanément les conditions (i) et (ii); on détermine enfin x_1 en résolvant l'équation ${}^tXGX = 0$.

B. Le cas $n = 3$.

1. Si aucune forme linéaire à coefficients dans k ne divise $\Phi(u, v)$, la formule de Weil permet d'appliquer le lemme 2.2, d'où le théorème.

2. Si une forme linéaire à coefficients dans k divise $\Phi(u, v)$, supposons, grâce au lemme 3.2, que c'est v. Diagonalisons F: $F(x_1, x_2, x_3) = a_2x_2^2 + a_3x_3^2$; supposons au moins a_3 non nul; la discussion se fait selon que le produit $-a_2\cdot a_3$ est nul, résidu ou non résidu. Seul le cas où $-a_2\cdot a_3$ est résidu et où F et G sont sans zéros communs nécéssite l'emploi de la formule de Weil.

5. Lemmes généraux (car $k = 2$). Dans les parties 5 et 6, k est un corps F_{2^r}, où r est un entier.

LEMME 5.1. *Soient a, b, c, d dans k avec $ac(a+c) \neq 0$ tels que les équations*

$$(\mathrm{E}_1) \qquad X^2 + aX + b = 0$$

et

$$(\mathrm{E}_2) \qquad X^2 + cX + d = 0$$

soient sans solution dans k. Alors l'équation

$$(\mathrm{E}_3) \qquad X^2 + acX + bc^2 + da^2 = 0$$

a deux solutions x_3 et x_3' dans k, et les équations:

$$(\mathrm{E}_4) \qquad X^2 + (a+c)X + x_3 + b + d = 0,$$

$$(\mathrm{E}_5) \qquad X^2 + (a+c)X + x_3' + b + d = 0$$

n'ont pas de solution dans k.

Démonstration. Soit k' l'extension de degré 2 de k. Dans k', les cinq équations considérées ont deux solutions puisque k' est la seule extension de degré 2 de k. Soient x_1 et x_1' les solutions de (E_1) dans k', x_2 et x_2' celles de (E_2); x_1, x_1', x_2, x_2' appartiennent à k' et pas à k. Les solutions de (E_3), (E_4), (E_5) sont alors respectivement:

$$x_3 = x_1'x_2 + x_1x_2', \quad x_4 = x_1 + x_2, \quad x_5 = x_1' + x_2,$$
$$x_3' = x_1x_2 + x_1'x_2'; \quad x_4' = x_1' + x_2'; \quad x_5' = x_1 + x_2'.$$

L'automorphisme non trivial s de k' sur k transforme x_1 en x_1' et x_2 en x_2'. Donc $s(x_3) = x_3$, $s(x_3') = x_3'$, $s(x_4) = x_4'$, $s(x_5) = x_5'$. Donc $x_3, x_3' \in k$. Si on avait $x_4 \in k$, on aurait $x_4 = x_4'$ d'où $a+c = x_4 + x_4' = 0$, contrairement à l'hypothèse faite sur $a+c$; de même, $x_5 \notin k$.

LEMME 5.2. *Soit $a \in k$. Supposons que l'équation $X^3 + X + a = 0$ n'a pas de solution. Alors, pour tout b non nul de k, l'équation*

$$bX^4 + X^3 + X^2 + a = 0$$

a une solution.

Démonstration. L'application $x \mapsto x^2$ est un automorphisme de k dont tous les éléments sont donc des carrés. L'équation $X^3 + X^2 + a = 0$ n'a pas de solution dans k: si elle en avait une, c, l'élément de k dont le carré est a/c serait solution de $X^3 + X + a = 0$.

Considérons l'application

$$k^* \overset{\varphi}{\mapsto} k^*,$$

$$X \mapsto \varphi(X) = \frac{X^3 + X^2 + a}{X^4}.$$

La conclusion du lemme est équivalente au fait que φ est surjective. Pour montrer que φ est surjective, il suffit de montrer qu'elle est injective. Or l'équation $\varphi(X) = \varphi(Y)$ $(X, Y \in k^*,\ X \neq Y)$ s'écrit:

$$\left(\frac{XY}{X+Y}\right)^3 + \left(\frac{XY}{X+Y}\right)^2 + a = 0$$

et n'a pas de solution.

LEMME 5.3. *Si a n'est pas un cube dans k, l'équation*

$$(\mathrm{E}_a) \qquad X^4 + X^3 + a = 0$$

a une solution dans k.

Démonstration. Toute extension finie d'un corps fini étant normale, le corps de décomposition d'un polynôme sur k de degré 4, sans zéro dans k, est de degré 2 ou 4 sur k. Soit c un élément d'une extension de k tel que $a = [c(c+1)]^3$. Alors

$$X^4 + X^3 + a = [X^2 + cX + c^2(c+1)]\,[X^2 + (c+1)X + c(c+1)^2];$$

c appartient donc au corps de décomposition de $X^4 + X^3 + a$ sur k; si (E_a) n'avait pas de solution dans k, le degré de $k(c)$ sur k serait 1, 2 ou 4. Si a n'est pas un cube dans k, l'élément $c(c+1)$ est de degré 3 sur k; cette contradiction démontre le lemme.

6. Démonstration du théorème (car $k = 2$). Nous traitons les cas $n = 4$ et $n = 3$ grâce à la forme réduite des formes quadratiques en caractéristique 2 donnée par Bourbaki dans [2], en supposant toute forme du faisceau d'ordre au moins 2.

A. Le cas $n=3$.

1. Supposons qu'il existe dans le faisceau une forme d'ordre 2; en la réduisant, nous pouvons facilement nous ramener au faisceau suivant

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2+a_1x_2^2+x_1x_2,$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1^2+b_2x_2^2+x_3^2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3$$

avec a_1 et b_{13} non nuls.

Si F n'a pas de zéro non singulier le théorème est vrai. Supposons donc qu'elle en a, c'est-à-dire que l'équation

$$a_1X^2+X+a_1 = 0$$

a deux solutions, ϱ et $1/\varrho$, dans k. Supposons F et G sans zéro commun et montrons qu'il existe une forme du faisceau qui n'a que des zéros singuliers. Si F et G sont sans zéro commun, les équations en x_2 et x_3 obtenues en remplaçant, dans G, x_1 successivement par ϱx_2 et par x_2/ϱ sont sans solution. Autrement dit, les équations

$$(\mathrm{E}_1)\qquad X^2+aX+b = 0,$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad X^2+cX+d = 0$$

(où on a posé: $a=\dfrac{b_{13}}{\varrho}+b_{23},\ b=\dfrac{b_1}{\varrho^2}+b_2,\ c=\varrho b_{13}+b_{23},\ d=\varrho^2b_1+b_2$) sont sans solution dans k.

Cherchons maintenant dans le faisceau $\lambda F+G$ les formes autres que F qui ont des zéros singuliers. Un vecteur (x_1, x_2, x_3) de k^3 est zéro singulier de $\lambda F+G$ si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes:

$$(\lambda a_1+b_1)x_1^2+(\lambda a_1+b_2)x_2^2+x_3^2+\lambda x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3 = 0,$$
$$\lambda x_2+b_{13}x_3 = \lambda x_1+b_{23}x_3 = b_{13}x_1+b_{23}x_2 = 0,$$
$$(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0).$$

En exprimant x_1 et x_3 en fonction de x_2 et en reportant dans la première équation, nous obtenons que la forme $\lambda F+G$ a un zéro non singulier si et seulement si $\mu=\lambda/a_1$ est solution de l'équation

$$(\mathrm{E}_3)\qquad X^2+acX+bc^2+da^2 = 0.$$

D'après le lemme 5.1, (E_3) a deux solutions $\mu_1=\lambda_1/a_1$ et $\mu_1'=\lambda_1'/a_1$.

Montrons que λ_1F+G et $\lambda_1'F+G$ n'ont que des zéros singuliers, ce qui prouvera le théorème. Pour cela, faisons dans λ_1F+G le changement d'indéterminées

$$x_1 = b_{23}x_1'+x_2',\qquad x_2=b_{13}x_1',\qquad x_3=\lambda_1x_1'+x_3'$$

qui transforme le zéro singulier $(b_{23}, b_{13}, \lambda_1)$ en $(1, 0, 0)$. La forme λ_1F+G est sans zéro non singulier si et seulement si la forme en x_1', x_2', x_3' ainsi obtenue est sans zéro non singulier c'est-à-dire si et seulement si l'équation

$$(\mathrm{E}_4)\qquad X^2+(a+c)X+\mu_1+b+d = 0$$

est sans solution, ce qui est précisément le cas par le lemme 5.1; de même pour $\lambda_1'F+G$.

2. Supposons maintenant toutes les formes du faisceau d'ordre 3. La réduction de [2] permet de se ramener au cas

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2+x_3^2,$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3,$$

avec b_2 et b_{13} non nuls.

Ecrivons que toute forme $\lambda F+G$ du faisceau est d'ordre 3, c'est-à-dire qu'aucune n'a de zéro singulier. Le système suivant doit être sans solution en x_1, x_2, x_3, λ:

$$x_1^2+b_2x_2^2+(\lambda+b_3)x_3^2+\lambda x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3 = 0,$$
$$\lambda x_2+b_{13}x_3 = \lambda x_1+b_{23}x_3 = b_{13}x_1+b_{23}x_2 = 0,$$
$$(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0).$$

En exprimant x_1 et x_3 en fonction de x_2 et en reportant dans la première équation, nous voyons que le système est sans solution si et seulement si l'équation

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \lambda^3+b_3\lambda^2+b_{13}b_{23}\lambda+b_{23}^2+b_2b_{13}^2 = 0$$

est sans solution en λ. Cette condition, montrons-le, implique l'existence de zéros communs à F et G. Cherchons en effet ces zéros communs: tout zéro de F est de la forme $\left(x_1, x_2, (x_1x_2)^{1/2}\right)$; reportons dans G et élevons au carré; nous obtenons:

$$(\mathrm{E}_2)\qquad x_1^4+b_{13}^2x_1^3x_2+b_3^2x_1^2x_2^2+b_{23}^2x_1x_2^3+b_2^2x_2^4 = 0.$$

Nous sommes ramenés à démontrer que si (E_1) n'a pas de solution, (E_2) en a. Posons:

$$a=b_{13}^4\neq 0,\qquad b=b_3^2+b_{13}b_{23},\qquad c=b_{23}^2+b_2b_{13}^2+b_{13}b_{23}b_3,$$
$$\mu=\lambda+b_3,\qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{X}{b_{13}^2}+\frac{b_{23}}{b_{13}}.$$

Alors (E_1) et (E_2) deviennent respectivement

$$(\mathrm{E}_1')\qquad \mu^3+b\mu+c = 0,$$

$$(\mathrm{E}_2')\qquad X^4+aX^3+abX^2+ac^2 = 0.$$

Si $b = 0$, le lemme 5.3 donne le théorème.

Si $b \neq 0$, élevons (E_1') au carré et posons

$$\mu^2 = b\nu, \quad a = \frac{c^2}{b^3} \neq 0, \quad \beta = \frac{b}{a} \neq 0, \quad X = bY.$$

Nous obtenons:

$$(E_1'') \qquad \nu^3 + \nu + a = 0,$$

$$(E_2'') \qquad \beta Y^4 + Y^3 + Y^2 + a = 0.$$

Cette fois, c'est le lemme 5.2 qui donne le théorème.

B. Le cas $n = 4$. Dans le cas où le faisceau possède une forme d'ordre 2 ou 3, on peut encore utiliser la réduction de [2] pour montrer le théorème.

Le cas où toute forme du faisceau est d'ordre 4 est le cas exceptionnel (ii) du théorème.

7. Compléments au théorème de Demyanov. Appelons *vecteur primitif sur* $\boldsymbol{Q}_p$ un vecteur dont les coordonnées sont des entiers p-adiques non tous divisibles par p. Demyanov [4] a montré que deux formes quadratiques sur $\boldsymbol{Q}_p$ en au moins 9 indéterminées ont un zéro primitif commun sur $\boldsymbol{Q}_p$. Le théorème du § 2 complétant le théorème de Chevalley pour deux formes quadratiques sur un corps fini, une méthode analogue à celle de [1] permet de compléter le théorème de Demyanov.

Nous dirons que deux couples de formes quadratiques (F, G) et (F_1, G_1) sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une succession de changements de formes dans le faisceau et de transformations linéaires sur les coordonnées. Il y a bijection entre les zéros (respectivement les zéros non singuliers) communs à F_1 et G_1 et les zéros (respectivement les zéros non singuliers) communs à F et G.

Si F et G sont définies sur $\boldsymbol{Q}_p$, nous les supposerons à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_p$. Nous désignerons par $\overline{F}$ et $\overline{G}$ les formes quadratiques sur $\boldsymbol{F}_p$ déduites de F et G par réduction modulo p. Pour $p \neq 2$, nous pouvons réduire aussi bien les formes que les matrices symétriques qui leur correspondent; la forme $\overline{\Phi}$ sur $\boldsymbol{F}_p$ associée à $\overline{F}$ et $\overline{G}$ est la réduction modulo p de la forme Φ à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_p$ associée à F et G; de même, $\theta(\overline{F}, \overline{G}) = \overline{\theta(F, G)}$. Pour $p = 2$, les coefficients des matrices symétriques de F et G peuvent n'être pas dans $\boldsymbol{Z}_2$ même si les formes F et G sont à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_2$: nous ne pouvons dans ce cas réduire que les formes et non les matrices; de même, la forme Φ peut n'être pas à coefficients entiers 2-adiques.

Nous appellerons faisceau engendré par F et G l'ensemble des formes $uF + vG$ pour u et v dans $\boldsymbol{Q}_p$ et faisceau engendré par $\overline{F}$ et $\overline{G}$ l'ensemble des formes $u\overline{F} + v\overline{G}$ pour u et v dans $\boldsymbol{F}_p$.

On peut montrer par récurrence sur n le résultat suivant:

PROPOSITION 7.1. *Soient F et G deux formes quadratiques sur $\boldsymbol{Z}_p$ en $n \geqslant 3$ indéterminées. Si elles ont un zéro commun non singulier sur $\boldsymbol{Q}_p$, il existe un couple de formes quadratiques sur $\boldsymbol{Z}_p$, (F_1, G_1), équivalent au couple (F, G) tel que $\overline{F}_1$ et $\overline{G}_1$ ont un zéro commun non singulier.*

Pour que toutes les formes du faisceau $(\overline{F}, \overline{G})$ aient un zéro non singulier, il suffit qu'elles soient toutes d'ordre au moins 3.

Dans le cas $p \neq 2$, pour que le couple $(\overline{F}, \overline{G})$ ne soit pas dégénéré, il suffit que p ne divise pas tous les coefficients de Φ: dans ce cas, en effet, la forme $\overline{\Phi}$ sur $\boldsymbol{F}_p$ n'est pas la forme nulle.

PROPOSITION 7.2. *Supposons $p \neq 2$ et $n \geqslant 4$. Supposons qu'il existe un couple (F_1, G_1) équivalent au couple (F, G) tel que p ne divise pas $\theta(F_1, G_1)$. Alors, F et G ont un zéro primitif commun non singulier.*

Démonstration. Montrons que F_1 et G_1 ont un zéro primitif commun non singulier: on sait qu'alors F et G en ont un. Comme p ne divise pas $\theta(F_1, G_1)$, le couple $(\overline{F}_1, \overline{G}_1)$ n'est pas dégénéré; $\theta(\overline{F}_1, \overline{G}_1)$ est non nul donc le cas exceptionnel (i) du théorème du 2 ne peut pas se produire; enfin, la forme $\overline{\Phi}_1(u, v) = \mathrm{d\acute{e}t}(u\overline{F}_1 + v\overline{G}_1)$ sur $\boldsymbol{F}_p$ n'a pas de facteur linéaire multiple dans $\boldsymbol{F}_p$, donc (lemme 3.3) toute forme du faisceau engendré par $\overline{F}_1$ et $\overline{G}_1$ sur $\boldsymbol{F}_p$ est d'ordre au moins $n-1$. Donc $\overline{F}_1$ et $\overline{G}_1$ ont un zéro commun non singulier, d'où la proposition.

Considérons enfin deux formes quadratiques sur $\boldsymbol{Q}$.

COROLLAIRE. *Soient F et G deux formes à coefficients dans $\boldsymbol{Z}$. Supposons $n \geqslant 4$ et $\theta(F, G) \neq 0$. Alors F et G ont un zéro p-adique commun non singulier pour tous les nombres premiers p qui ne divisent pas $\theta(F, G)$.*

Références

[1] B. J. Birch, D. J. Lewis and T. G. Murphy, *Simultaneous quadratic forms*, Amer. J. Math. 84 (1962), p. 110–115.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, chapitre 9, § 6.

[3] J. W. S. Cassels, *Diophantine equations with special reference to elliptic curves*, Journ. London Math. Soc. 41 (1966), nº 162.

[4] V. B. Demyanov, *Pairs of quadratic forms over a complete field with discrete norm with a finite residue class field* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR 20 (1956), p. 307–324.

[5] A. Weil, *Footnote to a recent paper*, Amer. J. Math. 76 (1954), p. 347–350.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
Talence, France

Reçu le 6. 7. 1973
et dans la forme modifiée le 2. 2. 1975 (433)