ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

Variations sur un thème de Siegel et Hecke

par

HENRI COHEN (Talence)

0. Introduction. A la suite de travaux de plusieurs auteurs, en particulier de Hecke, Siegel [6] a démontré le théorème suivant (voir [3], théorème 19).

THÉORÈME 0. *Soit K un corps totalement réel de degré r sur $\boldsymbol{Q}$; $\mathfrak{d}$ la différente de K et k un entier positif pair. Posons*:

$$g_k(z) = \sum_{n\geq 0} a_k(n)q^n \quad (q = e^{2i\pi z})$$

avec

$$a_k(0) = 2^{-r}\zeta_K(1-k),$$

$$a_k(n) = \sum_{x\in E_n} \sum_{\mathfrak{a}\supset x\mathfrak{d}} (N\mathfrak{a})^{k-1} \quad \textit{pour} \quad n\geq 1,$$

où $E_n = \{x\in \mathfrak{d}^{-1} |\ x\gg 0$ *et* $\operatorname{Tr} x = n\}$.

Alors si $(r, k)\neq (1, 2)$, g_k *est une forme modulaire sur* $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$ *de poids* rk.

Le cas particulier $r = 1$ de ce théorème redonne le développement en série de Fourier des séries d'Eisenstein, et le cas exclu $(r, k) = (1, 2)$ correspond à l'inexistence de formes modulaires de poids 2 sur $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$.

1. Cas des corps quadratiques réels. Explicitions ce théorème pour un corps quadratique réel K de discriminant D. Soit χ_D le caractère défini par

$$\chi_D(m) = \left(\frac{D}{m}\right).$$

On a:

$$\mathfrak{d}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{D}}\mathcal{O}_K = \left\{x|\ x = \frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{a+b\sqrt{D}}{2}\right) \text{avec } a, b\in \boldsymbol{Z},\ a\equiv bD \,(\mathrm{mod}\, 2)\right\}$$

donc:

$$a_k(n) = \sum_{\substack{|a|<n\sqrt{D}\\ a\equiv nD \pmod 2}} \; \sum_{\mathfrak{a}\supset\left(\frac{a+n\sqrt{D}}{2}\right)} (N\mathfrak{a})^{k-1} = \sum_{\substack{|a|<n\sqrt{D}\\ a\equiv nD\pmod 2}} \; \sum_{d\,\big|\,\frac{n^2D-a^2}{4}} d^{k-1} S_{a,n,D}(d)$$

où

$$S_{a,n,D}(d) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\supset\left(\frac{a+n\sqrt{D}}{2}\right)\\ N\mathfrak{a}=d}} 1.$$

Or on a:

Proposition 1.1.

$$S_{a,n,D}(d) = \sum_{e\,\big|\,\left(a,n,d,\frac{n^2D-a^2}{4d}\right)} \chi_D(e).$$

Démonstration. Convenons de représenter par des p les entiers premiers décomposés, par $\mathfrak{P}$ leurs facteurs (donc $(p)=\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$), de même r et $\mathfrak{R}$ pour les ramifiés (donc $(r)=\mathfrak{R}^2$); q pour les inertes. On peut écrire:

$$\left(\frac{a+n\sqrt{D}}{2}\right) = \prod \mathfrak{P}_i^{\alpha_i}\overline{\mathfrak{P}}_i^{\overline{\alpha}_i}\prod \mathfrak{R}_i^{\beta_i}\prod (q_i)^{\gamma_i}$$

d'où

$$\frac{n^2D-a^2}{4} = \prod p_i^{\alpha_i+\overline{\alpha}_i}\prod r_i^{\beta_i}\prod q_i^{2\gamma_i}.$$

Posons

$$d=\prod p_i^{\alpha_i'}\prod r_i^{\beta_i'}\prod q_i^{\gamma_i'}.$$

On a donc $\alpha_i'\leqslant\alpha_i+\overline{\alpha}_i$, $\beta_i'\leqslant\beta_i$, $\gamma_i'\leqslant 2\gamma_i$. Si on écrit:

$$\mathfrak{a}=\prod \mathfrak{P}_i^{\alpha_i''}\overline{\mathfrak{P}}_i^{\overline{\alpha_i''}}\prod\mathfrak{R}_i^{\beta_i''}\prod (q_i)^{\gamma_i''}$$

on a:

$$N\mathfrak{a} = \prod p_i^{\alpha_i''+\overline{\alpha_i''}}\prod r_i^{\beta_i''}\prod q_i^{2\gamma_i''}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sur $\mathfrak{a}$ pour que $\mathfrak{a}\supset\left(\frac{a+n\sqrt{D}}{2}\right)$ et $N\mathfrak{a}=d$ sont donc que pour tous les indices i:

$$\text{(1.1)}\qquad \begin{cases} \alpha_i''\leqslant\alpha_i;\ \overline{\alpha_i''}\leqslant\overline{\alpha}_i;\ \beta_i''\leqslant\beta_i;\ \gamma_i''\leqslant\gamma_i;\\ \alpha_i'=\alpha_i''+\overline{\alpha_i''};\ \beta_i'=\beta_i'';\ \gamma_i'=2\gamma_i''.\end{cases}$$

$S_{a,n,D}(d)$ est donc le nombre d'idéaux $\mathfrak{a}$ vérifiant les conditions (1.1). Ces conditions étant indépendantes, on doit donc avoir:

$$S_{a,n,D}(d) = \prod_{\substack{l\mid d\\ l\,\text{premier}}} c(l,d)$$

où $c(l,d)$ est le nombre de solutions de (1.1) en tenant compte uniquement du facteur premier l.

Nous allons démontrer:

Lemme 1.2.

$$c(l,d) = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant v_l\left(\left(a,n,d,\frac{n^2D-a^2}{4d}\right)\right)} \chi_D(l^\beta).$$

La proposition 1.1 résulte immédiatement de ce lemme par multiplicativité. Nous distinguerons trois cas:

(a) l inerte, donc $l=q_i$ pour un certain i. On doit avoir $\gamma_i''=\gamma_i'/2$, ce qui montre que $c(l,d)=0$ si $v_l(d)\notin 2\mathbf{Z}$; sinon on a bien $\gamma_i''=\gamma_i'/2\leqslant\gamma_i$ donc $c(l,d)=1$, d'où

$$\text{(1.2)}\qquad c(l,d) = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant v_l(d)} \chi_D(l^\beta).$$

Lemme 1.3. *Si l est inerte,*

$$v_l(d)\equiv v_l\left(\left(a,n,d,\frac{n^2D-a^2}{4d}\right)\right) \pmod 2.$$

En effet $v_l((a,n))<v_l(d)$ et $v_l((a,n))<v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4d}\right)$ est impossible car alors $v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right)>2v_l((a,n))$ ce qui contredit le fait que l est inerte. Donc

$$v_l\left(\left(a,n,d,\frac{n^2D-a^2}{4d}\right)\right) = v_l(d)\ \text{ou}\ v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4d}\right).$$

Mais $v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4d}\right) = v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right)-v_l(d)$, d'où le lemme 1.3 puisque

$$v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right) = 2v_l((a,n))\ \text{ ou }\ 2v_l((a,n))-2$$

(ce dernier cas ne pouvant se produire que pour $l=2$).

Le lemme 1.2 est conséquence immédiate de (1.2) et du lemme 1.3, dans le cas l inerte.

(b) l ramifié, donc $l = r_i$. On doit avoir $\beta_i'' = \beta_i'$ et on a bien $\beta_i'' = \beta_i' \leqslant \beta_i$ donc $e(l, d) = 1$ d'où le lemme 1.2 dans le cas l ramifié.

(c) l décomposé, donc $l = p_i$. On doit avoir $a_i'' + \overline{a_i''} = a_i'$ avec $a_i'' \leqslant a_i$ et $\overline{a_i''} \leqslant \overline{a_i}$. Or on démontre aisément:

Lemme 1.4. *Si a, b, c sont trois entiers positifs ou nuls vérifiant $a \leqslant b+c$, le nombre de couples $(x, y) \in \boldsymbol{N}^2$ tels que:*

$$a = x+y; \quad x \leqslant b; \quad y \leqslant c$$

vaut

$$1+\inf(a, b, c, b+c-a).$$

Appliquant ceci à $a = a_i'$, $b = a_i$, $c = \overline{a_i}$ on en déduit que

$$e(l, d) = 1+\inf(a_i, \overline{a_i}, a_i', a_i+\overline{a_i}-a_i').$$

Considérons deux cas:

1er cas: $\operatorname{Inf}(a_i, \overline{a_i}) = v_l((a, n))$. On en déduit:

$$e(l, d) = 1+v_l\left(\left(a, n, d, \frac{n^2D-a^2}{4d}\right)\right)$$

d'où le lemme 1.2.

2e cas: $\operatorname{Inf}(a_i, \overline{a_i}) = v_l((a, n))-1$. Ce cas ne peut se produire que si $l = 2$ (donc $D \equiv 1 \pmod 8$) et $v_l(a) \neq v_l(n)$. Mais dans ce cas on a

$$\inf\left(v_l(d), v_l\left(\frac{n^2D-a^2}{4d}\right)\right) \leqslant v_l((a, n))-1$$

donc on a encore

$$\inf(a_i, \overline{a_i}, a_i', a_i+\overline{a_i}-a_i') = v_l\left(\left(a, n, d, \frac{n^2D-a^2}{4d}\right)\right),$$

d'où le lemme 1.2 dans tous les cas, et donc la proposition 1.1.

La définition suivante nous sera utile pour simplifier les notations par la suite:

Définition 1.5. *Soit $z \in \boldsymbol{C}$ et $x \in \boldsymbol{R}$. On définit $\sigma_z(x)$:*

(a) *Si $x \in \boldsymbol{N}-\{0\}$, $\sigma_z(x) = \sum_{d|x} d^z$,*

(b) $\sigma_z(0) = \frac{1}{2}\zeta(-z)$ *pour* $z \neq -1$,

(c) $\sigma_z(x) = 0$ *si* $x \notin \boldsymbol{N}$.

Théorème 1.6. *Pour tout $n \geqslant 1$:*

$$a_k(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}\chi_D(d) \sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_{k-1}\left(\frac{(n/d)^2D-a^2}{4}\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.1:

$$a_k(n) = \sum_{\substack{|a|<n\sqrt{D} \\ a \equiv nD \pmod 2}} \sum_{d \,\big|\, \frac{n^2D-a^2}{4}} d^{k-1} \sum_{e \,\big|\, \left(a, n, d, \frac{n^2D-a^2}{4d}\right)} \chi_D(e).$$

Posons $a = ea'$, $d = ed'$, $\dfrac{n^2D-a^2}{4d} = eQ$. On a clairement

$$Q = \frac{(n/e)^2D-a'^2}{4d'} \quad \text{donc} \quad d' \,\Big|\, \frac{(n/e)^2D-a'^2}{4},$$

et aussi

$$a' \equiv (n/e)D \pmod 2$$

d'où

$$a_k(n) = \sum_{e|n} e^{k-1}\chi_D(e) \sum_{\substack{|a'|<(n/e)\sqrt{D} \\ a' \equiv (n/e)D \pmod 2}} \sum_{d' \,\big|\, \frac{(n/e)^2D-a'^2}{4}} d'^{k-1}$$

d'où le théorème 1.6.

2. Calcul des valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta d'un corps quadratique réel. Nous allons appliquer les résultats précédents au calcul des valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta d'un corps quadratique réel K de discriminant D.

Pour tout $k \geqslant 2$ pair, soit:

$$E_k(z) = 1+\frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-1}(n)q^n$$

la série d'Eisenstein normalisée de poids k. Soit d'autre part

$$\Delta = q\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)^{24}.$$

On a alors (voir [6], p. 90):

Proposition 2.1. *Soit m la dimension de l'espace des formes modulaires de poids k ($r = [k/12]$ si $k \equiv 2 \pmod{12}$, $r = 1+[k/12]$ sinon), et posons:*

$$E_{12r-k+2}\Delta^{-r} = \sum_{i\geqslant -r} c_{k,-i}q^i.$$

Alors si $\sum_{n\geqslant 0} a_nq^n$ est le développement de Fourier d'une forme modulaire sur $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$ de poids k, on a:

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant r} c_{k,i}a_i = 0, \quad \textit{et de plus} \quad c_{k,0} \neq 0.$$

On déduit de cette proposition et des théorèmes précédents les résultats suivants:

THÉORÈME 2.2.

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60}\sum_a \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{4}\right),$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{120}\sum_a \sigma_3\left(\frac{D-a^2}{4}\right),$$

$$\zeta_K(-5) = \frac{1}{49140}\left[\sum_a \sigma_5(D-a^2)+\left(24+32\chi_D(2)\right)\sum_a \sigma_5\left(\frac{D-a^2}{4}\right)\right],$$

$$\zeta_K(-7) = \frac{1}{36720}\left[\sum_a \sigma_7(D-a^2)+\left(128\chi_D(2)-216\right)\sum_a \sigma_7\left(\frac{D-a^2}{4}\right)\right],$$

$$\zeta_K(-9) = \frac{1}{9900}\left[\sum_a \sigma_9(D-a^2)+\left(512\chi_D(2)-456\right)\sum_a \sigma_9\left(\frac{D-a^2}{4}\right)\right],$$

$$\zeta_K(-11) = \frac{1}{13104000}\left[\sum_a \sigma_{11}\left(\frac{9D-a^2}{4}\right)+48\sum_a \sigma_{11}(D-a^2)+\right.$$
$$\left.+\left(3^{11}\chi_D(3)+48\cdot 2^{11}\chi_D(2)-195660\right)\sum_a \sigma_{11}\left(\frac{D-a^2}{4}\right)\right]$$

et ainsi de suite.

Les sommations sur a sont sous-entendues porter sur $a \in \mathbf{Z}$. Ces formules sont à ma connaissance le moyen le plus rapide pour calculer $\zeta_K(1-k)$.

3. Calcul de $\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_{k-1}\left(\frac{m-a^2}{4}\right)$ pour $k = 2, 4$. Pour tout $z \in \mathbf{C}$ et $n \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$ posons:

$$c_z(m) = \sum_{a\in\mathbf{Z}} \sigma_z\left(\frac{m-a^2}{4}\right), \quad \text{cf. } 1.5.$$

Nous supposerons que $z = k-1$ est un entier positif impair. Notre but est d'obtenir des relations entre les $c_{k-1}(m)$ pour différentes valeurs de m. Il existe de telles relations pour tout k pair, mais nous nous limiterons pour simplifier aux cas $k = 2$ et $k = 4$. Dans ces cas l'espace des formes modulaires de poids $2k$ est de dimension 1, et on déduit donc du théorème 0 que $a_k(n) = \sigma_{2k-1}(n)a_k(1)$.

Appliquant la formule d'inversion de Möbius au théorème 1.6 on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *Si D est un discriminant et $k = 2$ ou 4:*

$$c_{k-1}(n^2D) = \left(\sum_{d|n} d^{k-1}\chi_D(d)\mu(d)\sigma_{2k-1}(n/d)\right)c_{k-1}(D).$$

La valeur de $c_{k-1}(D)$ est donnée par le théorème 2.2. Réécrivant le théorème 3.1 dans le langage des séries de Dirichlet, on obtient:

COROLLAIRE 3.2.

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{c_{k-1}(n^2D)}{n^s} = \frac{\zeta_K(1-k)\zeta(s)\zeta(s-2k+1)}{2\zeta(1-2k)L(s-k+1,\chi_D)}$$
$$= \frac{\zeta_K(1-k)}{2\zeta(1-2k)}\prod_{p\text{ premier}}\frac{(1-p^{k-1}\chi_D(p)p^{-s})}{(1-p^{-s})(1-p^{2k-1}p^{-s})}.$$

Pour $p \neq 2$ les facteurs locaux sont identiques à ceux de [4], p. 70–71, en remplaçant k par $2k+1$. Pour $k = 2$, cela peut se déduire de [2] et du théorème 5.1.

On peut se demander si on peut calculer les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta d'un ordre du corps K grâce aux formules précédentes. C'est le cas en effet si on définit

$$\zeta_{K,f}(s) = \sum_{(\mathfrak{A},f)=1}(N\mathfrak{A})^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

où f est le conducteur de l'ordre. On a alors en effet

$$\zeta_{K,f}(1-k) = \prod_{p|f}\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)p^{-k}\right)\zeta_K(1-k)$$

et le corollaire 3.2 donne donc:

PROPOSITION 3.3. *Pour $k = 2, 4$*

$$\zeta_{K,f}(1-k) = \frac{2\zeta(1-2k)}{f^{2k-1}}\sum_{d|f}\mu(d)\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_{k-1}\left(\frac{(f/d)^2D-a^2}{4}\right).$$

Il existe bien entendu des formules analogues pour $k \geqslant 6$.

Remarquons que le théorème 3.1 fournit la valeur de $c_{k-1}(m)$ pour m non carré, puisque tout m qui n'est pas un carré s'écrit $m = n^2D$ où D est un discriminant. Pour être complet, cherchons à calculer $c_{k-1}(n^2)$ (toujours pour $k = 2$ et 4). Démontrons d'abord:

THÉORÈME 3.4. *Soient m et n des entiers positifs quelconques, et $z \in \mathbf{C}$*

(a) $$\sigma_z(n)\sigma_z(m) = \sum_{d|(n,m)} d^z\sigma_z\left(\frac{nm}{d^2}\right),$$

(b) $$\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\sigma_z(m)\sigma_z(n-m) = \sum_{d|n}d^z\sum_{0\leqslant m\leqslant n/d}\sigma_z\left(m\left(\frac{n}{d}-m\right)\right).$$

Démonstration. (a) Nous allons raisonner par récurrence sur (n, m). Si $(n, m) = 1$, c'est trivial puisque σ_z est multiplicatif. Supposons $(n, m) > 1$ et que (a) soit vrai pour tout n', m' avec $(n', m') < (n, m)$. Soit $p|(n, m)$ premier. Posons $n = p^\alpha n'$, $m = p^\beta m'$ avec $p \nmid n'm'$; on peut supposer par exemple $\beta \leqslant \alpha$ donc $(n, m) = p^\beta(n', m')$, d'où:

$$S = \sum_{d|(n,m)} d^z \sigma_z\left(\frac{nm}{d^2}\right) = \sum_{d|p^\beta(n',m')} d^z \sigma_z\left(\frac{p^{\alpha+\beta}n'm'}{d^2}\right).$$

Posant $d = p^\gamma d'$:

$$S = \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} (p^\gamma)^z \sigma_z(p^{\alpha+\beta-2\gamma}) \sum_{d'|(n',m')} d'^z \sigma_z\left(\frac{n'm'}{d'^2}\right),$$

donc par hypothèse de récurrence:

$$S = \sigma_z(n')\sigma_z(m') \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} (p^\gamma)^z \sigma_z(p^{\alpha+\beta-2\gamma}).$$

Pour démontrer (a) il suffit donc de montrer que

$$\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} (p^\gamma)^z \sigma_z(p^{\alpha+\beta-2\gamma}) = \sigma_z(p^\alpha)\sigma_z(p^\beta),$$

ce qui se fait sans difficulté, compte tenu de l'expression explicite:

$$\sigma_z(p^\delta) = \frac{p^{(\delta+1)z}-1}{p^z-1} \text{ si } z \neq 0; \qquad \sigma_0(p^\delta) = \delta+1.$$

(b) D'après (a) on a:

$$S' = \sum_{0\leqslant m\leqslant n} \sigma_z(m)\sigma_z(n-m) = \sum_{0\leqslant m\leqslant n} \sum_{d|(n,m)} d^z \sigma_z\left(\frac{m(n-m)}{d^2}\right)$$

puisque $(m, n-m) = (n, m)$, donc

$$S' = \sum_{d|n} d^z \sum_{0\leqslant m'\leqslant n/d} \sigma_z\left(\frac{dm'(n-dm')}{d^2}\right)$$

d'où le théorème 3.4.

Revenant à notre problème initial, on a:

$$c_z(n^2) = \sum_{a\equiv n \,(\mathrm{mod}\, 2)} \sigma_z\left(\frac{n^2-a^2}{4}\right) = \sum_{0\leqslant m\leqslant n} \sigma_z\big(m(n-m)\big).$$

D'où en appliquant la formule d'inversion de Möbius au théorème 3.4 (b):

$$c_z(n^2) = \sum_{d|n} \mu(d) d^z \sum_{0\leqslant m\leqslant n/d} \sigma_z(m)\sigma_z\left(\frac{n}{d}-m\right).$$

Or on a la:

Proposition 3.5.

$$(1) \qquad \sum_{0\leqslant m\leqslant n} \sigma_1(m)\sigma_1(n-m) = \frac{5}{12}\sigma_3(n) - \frac{n}{2}\sigma_1(n),$$

$$(2) \qquad \sum_{0\leqslant m\leqslant n} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m) = \frac{1}{120}\sigma_7(n).$$

Cette proposition résulte immédiatement des identités classiques:

$$E_2^2(z) = E_4(z) + \frac{6}{i\pi}E_2'(z), \qquad E_4^2(z) = E_8(z)$$

(voir par exemple [7], p. 19–20).

On obtient donc:

Théorème 3.6.

$$(1) \qquad c_1(n^2) = \frac{5}{12}\sum_{d|n} \mu(d) d\sigma_3\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{n^2}{2},$$

$$(2) \qquad c_3(n^2) = \frac{1}{120}\sum_{d|n} \mu(d) d^3\sigma_7\left(\frac{n}{d}\right).$$

Corollaire 3.7.

$$(1) \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_1(n^2)}{n^s} = \frac{5}{12}\frac{\zeta(s)\zeta(s-3)}{\zeta(s-1)} - \frac{1}{2}\zeta(s-2),$$

$$(2) \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_3(n^2)}{n^s} = \frac{1}{120}\frac{\zeta(s)\zeta(s-7)}{\zeta(s-3)}.$$

Remarque. Convenons que pour $D = 1$, $\zeta_K = \zeta_Q \times \zeta_Q$. On constate que le corollaire 3.2 est valable aussi pour $D = 1$ à un terme correctif près pour $k = 2$.

4. Relations entre E_2 et θ. Posons

$$\theta(z) = \sum_{a\in Z} q^{(a^2)} \qquad (q = e^{2i\pi z})$$

et comme précédemment, soit

$$E_2(z) = -24\sum_{n\geqslant 0} \sigma_1(n) q^n = 1 - 24\sum_{n\geqslant 1} \sigma_1(n) q^n.$$

Par définition nous aurons:

$$\theta(z)E_2(4z) = -24\sum_{n\geqslant 0} c_1(n) q^n.$$

Le paragraphe 3 peut donc être considéré comme une relation entre θ et E_2. Notre but ici est de démontrer d'autres relations. Tout d'abord:

Théorème 4.1.

$$\text{(a)}\qquad E_2(z)\theta'(z) = \frac{1}{4}E_2'(z)\theta(z) + \frac{2}{i\pi}\theta''(z),$$

$$\text{(b)}\qquad E_2(4z)\theta'(z) = E_2'(4z)\theta(z) + \frac{1}{2i\pi}\theta''(z).$$

Démonstration. On utilise la théorie des formes de poids demi-entier par rapport à $\Delta_0(4)$, au sens de Shimura [4]. On vérifie sans peine que pour (a) et pour (b) la différence des deux membres est une forme modulaire de poids $9/2$ sur $\Delta_0(4)$. Or l'espace de ces formes est de dimension 3 (voir [4], p. 62) et il n'est pas difficile de voir que l'on peut en trouver une base e_1, e_2, e_3 avec $v_\infty(e_1) = 0$, $v_\infty(e_2) = 1$, $v_\infty(e_3) = 2$, où v_∞ est l'ordre du zéro à l'infini. Il suffit donc de voir que les trois premiers coefficients de Fourier de nos formes modulaires sont nuls obtenir le théorème 4.1.

Nous verrons ultérieurement (proposition 8.3) que l'on peut retrouver le théorème 4.1 de façon plus „naturelle'', au lieu de faire une vérification a posteriori.

Corollaire 4.2.

$$\sum_{a\in\mathbf{Z}} a^2\sigma_1\left(\frac{n-a^2}{4}\right) = \frac{n}{5}\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1\left(\frac{n-a^2}{4}\right) - \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ n'est pas un carré},\\ \dfrac{n^2}{15} & \textit{si } n \textit{ est un carré}.\end{cases}$$

Ce n'est autre que le théorème 4.1 (b) en explicitant les coefficients. Le théorème 4.1 (a) résulte d'ailleurs du corollaire 4.2 en changeant n en $4n$.

Corollaire 4.3.

$$\theta^4(z) = \frac{4E_2(4z) - E_2(z)}{3}.$$

Posons

$$F(z) = \frac{4E_2(4z) - E_2(z)}{3}.$$

Combinant les théorèmes 4.1 (a) et (b) on obtient facilement

$$4F(z)\theta'(z) = F'(z)\theta(z).$$

Il en résulte que $F(z) = C\theta^4(z)$, et on a $C = 1$ au vu de la valeur à l'infini des deux fonctions.

Posons

$$\theta^s(z) = \sum_{n\geqslant 0} r_s(n)q^n.$$

Le corollaire 4.3 s'écrit:

Corollaire 4.4 (Jacobi).

$$r_4(n) = 8\big(\sigma_1(n) - 4\sigma_1(n/4)\big) = 8\sum_{d\mid n,\,4\nmid d} d.$$

On retrouve ainsi d'une façon détournée le célèbre théorème de Jacobi.

Remarque. Il existe des relations plus compliquées faisant intervenir les σ_{k-1}, $k\geqslant 4$ pair, analogue au corollaire 4.2. Citons par exemple sans démonstration l'analogue pour σ_3:

Proposition 4.5.

$$\sum_{a\in\mathbf{Z}} a^2\sigma_3\left(\frac{n-a^2}{4}\right) = \frac{n}{9}\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_3\left(\frac{n-a^2}{4}\right) - \frac{7}{18}\sum_{a\in\mathbf{Z}} a^4\sigma_1\left(\frac{n-a^2}{4}\right) +$$
$$+\frac{n}{6}\sum_{a\in\mathbf{Z}} a^2\sigma_1\left(\frac{n-a^2}{4}\right) - \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ n'est pas un carré},\\ \dfrac{n^3}{90} & \textit{si } n \textit{ est un carré}.\end{cases}$$

De telles formules se démontrent exactement comme le corollaire 4.2, mais les raisons de leur existence (du moins dans le cas où n n'est pas un carré) seront vues ultérieurement (proposition 8.7).

5. Application au calcul de $r_5(n)$. En utilisant les résultats précédents nous pouvons calculer le nombre $r_5(n)$ de représentations de n en somme de 5 carrés. En effet, d'après le corollaire 4.4:

$$r_5(n) = \sum_{|a|\leqslant\sqrt{n}} r_4(n-a^2) = 8\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1(n-s^2) - 32\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right)$$
$$= 8c_1(4n) - 32c_1(n).$$

Posons par convention $\zeta_{Q(\sqrt{n})}(-1) = \big(\zeta_Q(-1)\big)^2 = 1/144$ si n est un carré. Il résulte alors facilement du théorème 3.1 et de ce qui précède:

Théorème 5.1. *Posons $n = D(2^\alpha f)^2$ où D est un discriminant ou* 1, *f un entier impair et $\alpha\geqslant -1$ $[\alpha = -1 \Leftrightarrow n \equiv 2$ ou $3 \pmod 4]$. Alors:*

$$r_5(n) = \frac{1}{7}\big(2^{3\alpha+5} + 3 - 2\chi_D(2)(2^{3\alpha+2}+3)\big)\left(\sum_{d\mid f} d\chi_D(d)\mu(d)\sigma_3\left(\frac{f}{d}\right)\right)\times$$
$$\times 480\,\zeta_{Q(\sqrt{n})}(-1).$$

Corollaire 5.2. *Si n est un discriminant, on a:*

$$r_5(n) = 480\left(5-2\left(\frac{n}{2}\right)\right)\zeta_{Q(\sqrt{n})}(-1).$$

On retrouve ainsi d'une toute autre manière les résultats de [2] sur $r_5(n)$.

De même la relation

$$r_5(n) = 8c_1(4n)-32c_1(n)$$

jointe au corollaire 3.2 et au théorème 5.1 permet de redémontrer la formule de [4], p. 70, pour $k=5$.

6. Généralisant la proposition 3.5 en utilisant la majoration $a_n = O(n^{k/2})$ du n-ième coefficient d'une forme parabolique de poids k sur $SL_2(\boldsymbol{Z})$, il n'est pas difficile de montrer la:

Proposition 6.1. *Soit k un entier impair. Alors quand $n\to\infty$:*

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\sigma_k(m)\sigma_k(n-m) \sim \frac{(\Gamma(k+1))^2\zeta^2(k+1)}{\Gamma(2k+2)\zeta(2k+2)}\sigma_{2k+1}(n).$$

Cette proposition est connue au moins depuis Ramanujan. Plus récemment, et par des méthodes totalement différentes Halberstam (Journ. London Math. Soc. 24 (1949), p. 13–21) a démontré que la proposition reste vraie si k est un nombre réel strictement positif quelconque. Enfin, notons pour $k=0$ le résultat d'Ingham (Journ. London Math. Soc. (1927), p. 202–208):

$$\sum_{0<m<n}\sigma_0(m)\sigma_0(n-m) \sim \frac{6}{\pi^2}\sigma_1(n)\operatorname{Log}^2 n \qquad \text{quand } n\to\infty.$$

7. Cas des corps cubiques totalement réels. Nous allons maintenant considérer l'application du théorème 0 aux corps cubiques totalement réels.

Soit $K=\boldsymbol{Q}(\theta)$ un corps cubique totalement réel, σ_1 et σ_2 les $\boldsymbol{Q}$-isomorphismes non triviaux de K dans une clôture algébrique de K, et soit enfin (u_1, u_2, u_3) une base des entiers de K.

Si (d_1, d_2, d_3) est la base duale de (u_1, u_2, u_3) pour la trace (c'est-à-dire $\operatorname{Tr}(d_iu_j)=\delta_{ij}$) alors (d_1, d_2, d_3) sera une base de la codifférente δ^{-1}. Pour des raisons techniques nous supposerons la base d'entiers choisie de telle façon que $\operatorname{Tr} d_3 = 1$ (par exemple en choisissant $u_3=1$, ce qui est toujours possible).

On a d'après le théorème 0:

$$a_k(n) = \sum_{x\in E_n}\sum_{d|N(x\delta)} d^{k-1}S_x(d), \qquad \text{où} \quad S_x(d) = \sum_{\substack{\mathfrak{A}\supset x\delta\\ N\mathfrak{A}=d}} 1. \tag{7.1}$$

Première partie — Description de E_n. On a le théorème suivant:

Théorème 7.1. *Supposons $\operatorname{Tr} d_3 = 1$. Soit T le triangle de sommets (u_1, u_2); $(\sigma_1u_1, \sigma_1u_2)$; $(\sigma_2u_1, \sigma_2u_2)$. Alors:*

$$E_n = \{x|\ x = n[a(d_1-d_3\operatorname{Tr} d_1)+b(d_2-d_3\operatorname{Tr} d_2)+d_3];\ (a, b)\in\Delta_n\}$$

où Δ_n est l'ensemble des points à coordonnées multiples de $1/n$ et à l'intérieur du triangle T.

En particulier, si $u_3=1$, on a:

$$E_n = \{x|\ x = n(ad_1+bd_2+d_3);\ (a, b)\in\Delta_n\}.$$

Démonstration. On a:

$$x\in\delta^{-1}\Leftrightarrow\exists a, b, c\in\boldsymbol{Z} \text{ tels que } x = ad_1+bd_2+cd_3.$$

La condition $\operatorname{Tr} d_3 = 1$ entraine que $c = \operatorname{Tr} x - a\operatorname{Tr} d_1 - b\operatorname{Tr} d_2$, donc

$$x\in E_n \Rightarrow x = a(d_1-d_3\operatorname{Tr} d_1)+b(d_2-d_3\operatorname{Tr} d_2)+nd_3.$$

Par définition de d_1, d_2, d_3, on a:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\sigma_1x\begin{pmatrix}\sigma_1u_1\\\sigma_1u_2\\\sigma_1u_3\end{pmatrix}+\sigma_2x\begin{pmatrix}\sigma_2u_1\\\sigma_2u_2\\\sigma_2u_3\end{pmatrix}$$

d'où en particulier:

$$\begin{pmatrix}a/n\\b/n\end{pmatrix} = \frac{x}{n}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\frac{\sigma_1x}{n}\begin{pmatrix}\sigma_1u_1\\\sigma_1u_2\end{pmatrix}+\frac{\sigma_2x}{n}\begin{pmatrix}\sigma_2u_1\\\sigma_2u_2\end{pmatrix}.$$

Puisque $\frac{x}{n}+\frac{\sigma_1x}{n}+\frac{\sigma_2x}{n}=1$, $\left(\frac{x}{n}, \frac{\sigma_1x}{n}, \frac{\sigma_2x}{n}\right)$ représente les coefficients barycentriques de $\begin{pmatrix}a/n\\b/n\end{pmatrix}$ par rapport aux sommets du triangle T. Il en résulte que:

$$x\gg 0\Leftrightarrow x>0 \quad \text{et} \quad \sigma_1x>0 \text{ et } \sigma_2x>0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a/n\\b/n\end{pmatrix}\in\Delta_n$$

d'où le théorème 7.1.

On déduit également de cette démonstration le corollaire suivant:

Corollaire 7.2. *Sous les hypothèses du théorème 7.1, soient $(a, b)\in\Delta_n$ correspondant à $x\in E_n$, et α, β, γ les coordonnées barycentriques de (a, b) par rapport aux sommets de T. Alors si D est le discriminant de K:*

$$N(x\delta) = n^3D\alpha\beta\gamma.$$

Ceci permet de calculer $N(x\delta)$ géométriquement.

Deuxième partie — Calcul de $S_x(d)$. Soient d, d' tels que $d|N(x\delta)$, $d'|N(x\delta)$ et $(d, d') = 1$. Il est facile de voir que l'application qui au couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ avec $\mathfrak{a} \supset x\delta$, $\mathfrak{a}' \supset x\delta$ et $N\mathfrak{a}' = d'$, associe l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ est une bijection sur l'ensemble des idéaux $\mathfrak{b} \supset x\delta$ avec $N\mathfrak{b} = dd'$. Il en résulte que $S_x(d)$ est une fonction multiplicative de d, et comme dans le cas quadratique on peut écrire:

$$S_x(d) = \prod_{l|d} c(l, d) \quad \text{avec} \quad c(l, d) = S_x(l^{v_l(d)}).$$

Nous poserons $a = v_l(d)$ et nous allons calculer $S_x(l^a)$ selon la manière dont l se décompose dans K:

(a) l inerte: Dans ce cas, si $\beta = v_l(\mathfrak{a})$, on a $a = 3\beta$ donc $S_x(l^a) = 0$ si $3 \nmid a$ et $S_x(l^a) = 1$ si $3|a$ puisque $l^a|N(x\delta)$.

(b) $l = R_1^3$ est ramifié: Dans ce cas si $\beta = v_{R_1}(\mathfrak{a})$ on a $a = \beta$ donc $S_x(l^a) = 1$.

(c) $l = R_1^2 P_2$ est ramifié: Posons $\beta = v_{R_1}(\mathfrak{a})$, $\gamma = v_{P_2}(\mathfrak{a})$. Les conditions sur $\mathfrak{a}$ s'écrivent: $a = \beta + \gamma$ et $\beta \leqslant v_{R_1}(x\delta)$, $\gamma \leqslant v_{P_2}(x\delta)$, sachant que $a \leqslant v_{R_1}(x\delta) + v_{P_2}(x\delta)$ puisque $l^a|N(x\delta)$. On est donc ramené aux conditions du lemme 1.4 et on en déduit:

$$S_x(l^a) = 1 + \inf\big(a, v_{R_1}(x\delta), v_{P_2}(x\delta), v_{R_1}(x\delta) + v_{P_2}(x\delta) - a\big).$$

(d) $l = D_1 P_2$ est partiellement décomposé, où D_1 est un idéal premier de degré 2: Posons $\beta = v_{D_1}(\mathfrak{a})$, $\gamma = v_{P_2}(\mathfrak{a})$. Les conditions sur $\mathfrak{a}$ s'écrivent: $a = 2\beta + \gamma$ et $\beta \leqslant v_{D_1}(x\delta)$, $\gamma \leqslant v_{P_2}(x\delta)$, sachant que $a \leqslant 2v_{D_1}(x\delta) + v_{P_2}(x\delta)$ puisque $l^a|N(x\delta)$. Utilisant le lemme 1.4 on en déduit aisément:

$$S_x(l^{2a}) = 1 + \inf\left(a, v_{D_1}(x\delta), \left[\frac{v_{P_2}(x\delta)}{2}\right], v_{D_1}(x\delta) + \left[\frac{v_{P_2}(x\delta)}{2}\right] - a\right),$$

$$S_x(l^{2a+1}) = 1 + \inf\left(a, v_{D_1}(x\delta), \left[\frac{v_{P_2}(x\delta) - 1}{2}\right], v_{D_1}(x\delta) + \left[\frac{v_{P_2}(x\delta) - 1}{2}\right] - a\right).$$

(e) $l = P_1 P_2 P_3$ est totalement décomposé: Etant donnés 4 entiers positifs ou nuls a, b, c, d tels que $a \leqslant b + c + d$, soit $N(a, b, c, d)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \boldsymbol{N}^3$ tels que:

$$a = x + y + z; \quad x \leqslant b; \quad y \leqslant c; \quad z \leqslant d.$$

Alors on a:

$$S_x(l^a) = N\big(a, v_{P_1}(x\delta), v_{P_2}(x\delta), v_{P_3}(x\delta)\big).$$

En effet, si on pose $\beta = v_{P_1}(\mathfrak{a})$, $\gamma = v_{P_2}(\mathfrak{a})$, $\delta = v_{P_3}(\mathfrak{a})$, les conditions sur $\mathfrak{a}$ s'écrivent:

$$a = \beta + \gamma + \delta; \quad \beta \leqslant v_{P_1}(x\delta); \quad \gamma \leqslant v_{P_2}(x\delta); \quad \delta \leqslant v_{P_3}(x\delta).$$

Il serait intéressant d'avoir une formule analogue à celle de la proposition 1.1 valable dans les cinq cas. Malheureusement je n'ai pu trouver de telle formule, sauf dans le cas où K est cyclique (donc où les cas (c) et (d) sont exclus), mais elle n'est pas très manipulable.

La difficulté tient entre autres au calcul de $N(a, b, c, d)$, donc à trouver un analogue du lemme 1.4 pour trois variables. Dans cette direction, on démontre sans difficulté la proposition suivante:

PROPOSITION 7.3. *Soient a, b, c, d quatre entiers positifs ou nuls vérifiant: $a \leqslant b + c + d$, et soit $P(a, b, c, d)$ le domaine polygonal défini par les inégalités suivantes:*

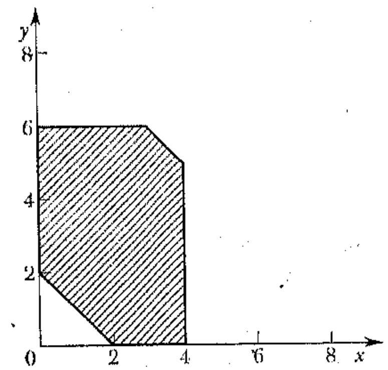
(i) $\sup(a - d, 0) \leqslant x + y \leqslant a$,

(ii) $0 \leqslant x \leqslant \sup(a, b)$,

(iii) $0 \leqslant y \leqslant \sup(a, c)$.

Alors $N(a, b, c, d)$ est égal au nombre de points à coordonnées entières de $P(a, b, c, d)$.

Par exemple, si $b = 4$, $c = 6$, $d = 7$, $a = 9$, $P(9, 4, 6, 7)$ est la partie hachurée, donc $N(9, 4, 6, 7) = 31$.



Troisième partie — Calcul de $\zeta_K(1-k)$. Utilisant la proposition 2.1 on obtient:

PROPOSITION 7.4.

$$\zeta_K(-1) = -\frac{1}{63} a_2(1),$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{24570}\big(a_4(2) + 24 a_4(1)\big),$$

$$\zeta_K(-5) = -\frac{1}{10773}\big(a_6(2) + 528 a_6(1)\big)$$

et ainsi de suite.

Quatrième partie — Exemples.

Exemple 1. Corps cubiques cycliques où 3 est non ramifié. On peut écrire $K = \boldsymbol{Q}(\theta)$ où θ est une racine de l'équation

$$X^3 - X^2 + \frac{1-e}{3} X - \frac{e(u-3)+1}{27} = 0$$

avec $e = (u^2+27v^2)/4$, où on a choisi $u \equiv 2 \pmod 3$, $u \equiv v \pmod 2$. Le discriminant du corps K est égal à e^2. On a:

$$\sigma_1\theta = \sigma\theta = \frac{-4e+u+9v+2}{18v} - \frac{u+4+3v}{6v}\theta + \frac{1}{v}\theta^2,$$

$$\sigma_2\theta = \sigma^2\theta = \frac{4e-u+9v-2}{18v} + \frac{u+4-3v}{6v}\theta - \frac{1}{v}\theta^2.$$

Une base d'entiers est $(\theta, \sigma\theta, \sigma^2\theta)$. La base duale, qui est donc une base de la codifférente est (d_1, d_2, d_3) avec:

$$(d_1, d_2, d_3) = \left(\frac{\theta+(e-1)/3}{e}, \frac{\sigma\theta+(e-1)/3}{e}, \frac{\sigma^2\theta+(e-1)/3}{e}\right).$$

On a $\operatorname{Tr} d_1 = \operatorname{Tr} d_2 = \operatorname{Tr} d_3 = 1$. Si on écrit:

$$x = ad_1 + bd_2 + cd_3$$

on a:

$$N(x\delta) = \frac{e^2-3e+u}{27}(a^3+b^3+c^3) + \frac{2e^2-u+9v}{18}(a^2b+b^2c+c^2a) + \\ + \frac{2e^2-u-9v}{18}(ab^2+bc^2+ca^2) + \frac{2e^2+3e+2u}{9}abc.$$

Enfin le triangle T a pour sommets $(\theta, \sigma\theta)$; $(\sigma\theta, \sigma^2\theta)$; $(\sigma^2\theta, \theta)$.

Prenons par exemple $u = -7$, $v = 1$, donc $e = 19$ et K est le corps cubique cyclique de discriminant 19^2. Un calcul numérique montre que:

$$\theta = 2.28514\ldots; \quad \sigma\theta = 1.22188\ldots; \quad \sigma^2\theta = -2.50702\ldots$$

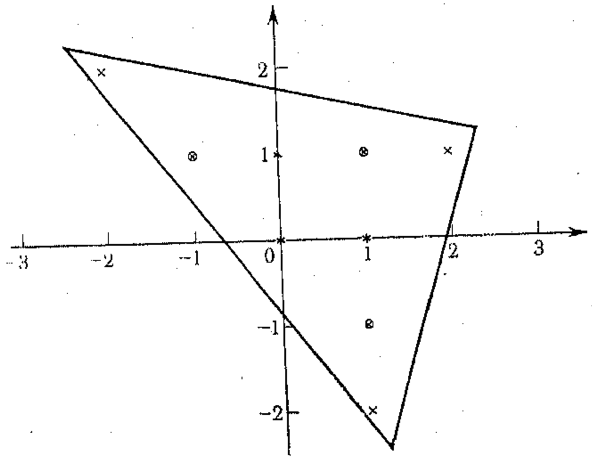
d'où la figure.

Il y a donc 9 points dans E_1, qui sont conjugués 3 à 3 par la transformation $(a, b) \to (b, 1-a-b)$. Les points conjugués sont marqués d'un signe identique sur la figure. Si on pose $c = 1-a-b$ on a:

$$N(x\delta) = 11(a^3+b^3+c^3) + 41(a^2b+b^2c+c^2a) + 40(ab^2+bc^2+ca^2) + 85abc.$$

On trouve donc:

$(\times)$: $N(x\delta) = 1$ pour $(a, b) = (2, 1), (1, -2), (-2, 2)$,
$(\otimes)$: $N(x\delta) = 7$ pour $(a, b) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1)$,
$(*)$: $N(x\delta) = 11$ pour $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$.



Quand $N(x\delta) = 1$ on a $x\delta = \mathcal{O}_K$ donc il n'y a qu'un seul idéal $\mathfrak{a} \supset x\delta$. Quand $N(x\delta)$ est un nombre premier, $x\delta$ est un idéal premier donc les seuls idéaux contenant $x\delta$ sont $x\delta$ et $\mathcal{O}_K$. Il en résulte que:

$$a_k(1) = 3[1+(1+7^{k-1})+(1+11^{k-1})],$$
$$a_k(1) = 3[3+7^{k-1}+11^{k-1}].$$

En particulier, on trouve:

$$\zeta_K(-1) = -1.$$

Exemple 2. Soit K le corps cubique non abélien de discriminant 257. On a $K = \boldsymbol{Q}(\theta)$, où θ est racine de l'équation:

$$X^3 - X^2 - 4X + 3 = 0.$$

On sait que $(\theta, \theta^2, 1)$ est une base des entiers de K, d'où en appelant (d_1, d_2, d_3) la base duale,

$$E_1 = \{x \mid x = ad_1 + bd_2 + d_3;\ (a, b) \in \Delta_1\}.$$

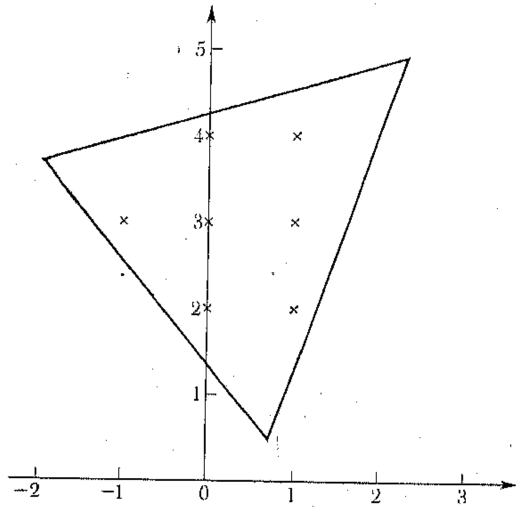
Le triangle T a pour sommets:

$$(\theta, \theta^2); \quad (\sigma_1\theta, \sigma_1\theta^2); \quad (\sigma_2\theta, \sigma_2\theta^2).$$

Un calcul numérique montre que:

$$\theta = 0.71354\ldots; \quad \sigma_1\theta = 2.19869\ldots; \quad \sigma_2\theta = -1.91223\ldots$$
$$\theta^2 = 0.50914\ldots; \quad \sigma_1\theta^2 = 4.83424\ldots; \quad \sigma_2\theta^2 = 3.65662\ldots$$

d'où la figure suivante:



Il y a donc 7 points dans E_1. On obtient:

(i) $N(x\delta) = 3$ pour $(a, b) = (-1, 3), (0, 4), (1, 2)$,

(ii) $N(x\delta) = 5$ pour $(a, b) = (0, 2), (1, 4)$,

(iii) $N(x\delta) = 7$ pour $(a, b) = (1, 3)$,

(iv) $N(x\delta) = 9$ pour $(a, b) = (0, 3)$.

Quand $N(x\delta) = 3$, 5 ou 7 on sait que $x\delta$ est premier, donc les seuls idéaux $\mathfrak{a} \supset x\delta$ sont $x\delta$ et $\mathcal{O}_K$. Pour $(a, b) = (0, 3)$ on a $N(x\delta) = 9$ donc on peut avoir $x\delta = D_1$ ou $x\delta = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Il faut faire un calcul explicite: D'après le théorème 7.1, on a $x = 3d_2 + d_3$ donc $\mathrm{Tr}\, x1 = 1$, $\mathrm{Tr}\, x\theta = 0$, $\mathrm{Tr}\, x\theta^2 = 3$ par définition de la base duale. Ecrivant $x = a + b\theta + c\theta^2$ on en déduit immédiatement que $x = \frac{1}{257}(\theta^2 - 10\theta + 86)$. Or on a

$$X^3 - X^2 - 4X + 3 \equiv X(X^2 - X - 1) (\mathrm{mod}\, 3) \qquad \text{donc } 3 = D_1\mathfrak{p}$$

avec $D_1 = (3, \theta^2 - \theta - 1)$. Or

$$\theta^2 - 10\theta + 86 \equiv \theta^2 - \theta - 1 (\mathrm{mod}\, 3) \qquad \text{donc } x\delta = D_1,$$

et à nouveau les seuls idéaux contenant $x\delta$ sont $x\delta$ et $\mathcal{O}_K$.

On obtient donc en regroupant:

$$a_k(1) = 7 + 3 \times 3^{k-1} + 2 \times 5^{k-1} + 7^{k-1} + 9^{k-1}$$

et en particulier:

$$\zeta_K(-1) = -2/3.$$

Conclusion. Ces calculs se généralisent sans difficulté à des corps totalement réels de degré r quelconque: on choisit une base d'entiers $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ telle que la base duale $(d_1, \ldots, d_r)$ vérifie $\mathrm{Tr}(d_r) = 1$. On a alors

$$E_n = \Big\{x \mid x = n\Big[\sum_{1 \leqslant i \leqslant r-1} a_i(d_i - d_r \mathrm{Tr}\, d_i) + d_r\Big]\Big\}$$

où $(a_1, \ldots, a_{r-1})$ parcrout l'ensemble des points à coordonnées multiples de $1/n$ à l'intérieur du $(r-1)$-simplexe de sommets $(\sigma_i u_1, \ldots, \sigma_i u_{r-1})$ $0 \leqslant i \leqslant r-1$, où les σ_i sont les $\boldsymbol{Q}$-isomorphismes de K dans une clôture algébrique. Le reste des calculs est semblable, et je pense que l'on devrait pouvoir les programmer sur ordinateur sans trop de difficultés. De toutes façons, Cartier [1] ayant fait des tables étendues (par une méthode complètement différente et *non finie*), il serait inutile de le faire pour simplement obtenir une table.

8. Series d'Eisenstein–Hecke. Le théorème 0 découle en fait calcul explicite des coefficients de Fourier des formes modulaires de Hecke à plusieurs variables attachées à K. Introduisons quelques notations.

Considérons $\boldsymbol{C}^r$ comme muni de sa structure d'anneau naturelle. Si $\nu \in K$ nous noterons $\nu_1, \ldots, \nu_r$ les r conjugués de ν dans $\boldsymbol{C}$, avec $\nu_1 = \nu$. Le corps K peut alors être considéré comme un sous-anneau de $\boldsymbol{C}^r$ grâce à l'application $\nu \to (\nu_1, \ldots, \nu_r)$. De plus les applications Trace et Norme peuvent se prolonger à $\boldsymbol{C}^r$ en posant

$$\mathrm{Tr}(z) = \mathrm{Tr}(z_1, \ldots, z_r) = z_1 + \ldots + z_r,$$
$$N(z) = N(z_1, \ldots, z_r) = z_1 z_2 \ldots z_r.$$

Soit H le demi-plan de Poincaré. Le groupe

$$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathcal{O}_K \text{ et } ad - bc = 1\right\}$$

opère sur H^r grace à la formule suivante:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}, \ldots, \frac{a_r z_r + b_r}{c_r z_r + d_r}\right).$$

Si f est holomorphe sur H^r on dit que f est une forme modulaire sur $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ si on a:

$$f(\gamma \cdot z) = \big(N(cz + d)\big)^k f(z), \qquad \text{pour tout } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K).$$

Le théorème de Siegel [6] s'énonce alors comme suit:

THÉORÈME 8.0. *Soit K un corps totalement réel de degré r sur $\boldsymbol{Q}$, δ la différente de K et k un entier positif pair. Soit G_k la fonction définie pour*

$z \in H^r$ *par*:

$$G_k(z) = 2^{-r}\zeta_K(1-k) + \sum_{\substack{x \gg 0 \\ x \in \delta^{-1}}} \sigma_{k-1}(x)\, e^{2i\pi \operatorname{Tr}(xz)}$$

où $\sigma_{k-1}(x) = \sum_{\mathfrak{a} \supset x\delta} (N\mathfrak{a})^{k-1}$.

Alors si $(r, k) \neq (1, 2)$, G_k *est une forme modulaire de poids* k *sur* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$.

Le théorème 0 est une conséquence immédiate du théorème 8.0 en posant $z_1 = z_2 = \ldots = z_r$. En effet, dans ce cas si $c, d \in \boldsymbol{Z}$, on a $\big(N(cz+d)\big)^k = (cz+d)^{kr}$.

Explicitons ce théorème pour un corps quadratique réel K de discriminant D. Utilisant la proposition 1.1 et raisonnant exactement comme dans le paragraphe 1, on obtient:

Théorème 8.1. *Posons pour* $(z_1, z_2) \in H^2$:

$$G_k(z_1, z_2) = \frac{1}{4}\zeta_K(1-k) + \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{|a| < n\sqrt{D} \\ a \equiv nD \,(\mathrm{mod}\, 2)}} \sigma_{k-1}(a, n)\, q^n \tau^a$$

où

$$q = e^{2i\pi\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)}, \qquad \tau = e^{2i\pi\left(\frac{z_1-z_2}{2\sqrt{D}}\right)},$$

$$\sigma_{k-1}(a, n) = \sum_{d \mid (a,n)} \chi_D(d)\, d^{k-1} \sigma_{k-1}\left(\frac{(n/d)^2 D - (a/d)^2}{4}\right).$$

Alors G_k *est une forme modulaire de poids* k *sur* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$.

Posons

$$u = \frac{z_1+z_2}{2}, \qquad v = \frac{z_1-z_2}{2}.$$

La forme modulaire du théorème 0 est donc le terme constant du développement de $F_k(u, v) = G_k(u+v, u-v)$ au voisinage de $v = 0$. Regardons les termes suivants de ce développement:

$$F_k(u, v) = \frac{1}{4}\zeta_K(1-k) + \sum_n \sum_a \sigma_{k-1}(a, n)\, q^n \sum_{m \geq 0} v^m \frac{a^m (2i\pi)^m}{D^{m/2}\, m!}.$$

Puisque $\sigma_{k-1}(-a, n) = \sigma_{k-1}(a, n)$ les termes avec m impair sont nuls, donc

$$F_k(u, v) = \frac{1}{4}\zeta_K(1-k) + \sum_{m \geq 0} \frac{v^{2m}(2i\pi)^{2m}}{(2m)!\, D^m} \sum_{n \geq 1} q^n \sum_{\substack{|a| < n\sqrt{D} \\ a \equiv nD \,(\mathrm{mod}\, 2)}} a^{2m} \sigma_{k-1}(a, n).$$

Posons

$$D_u = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad D_v = \frac{\partial}{\partial v};$$

pour $m \geq 1$ on a donc:

$$D_v^{2m} F_k(u, 0) = \frac{(2i\pi)^{2m}}{D^m} \sum_{n \geq 1} q^n \sum_{\substack{|a| < n\sqrt{D} \\ a \equiv nD \,(\mathrm{mod}\, 2)}} a^{2m} \sigma_{k-1}(a, n) \tag{8.1}$$

et si on pose $g_k(u) = F_k(u, 0)$, g_k est la forme modulaire du théorème 0 et on a:

$$g_k(u) = \frac{1}{4}\zeta_K(1-k) + \sum_{n \geq 1} q^n \sum_{\substack{|a| < n\sqrt{D} \\ a \equiv nD \,(\mathrm{mod}\, 2)}} \sigma_{k-1}(a, n).$$

D'autre part:

Proposition 8.2. *Il existe une forme parabolique* f_1 *de poids* $2k+4$ *et une forme parabolique* f_2 *de poids* $2k+8$ *sur* $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$ *telles que*:

(a) $$D_v^2 F_k(u, 0) = \frac{1}{2k+1} D_u^2 g_k(u) + f_1(u),$$

(b) $$D_v^4 F_k(u, 0) = \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} D_u^4 g_k(u) + \frac{6}{2k+1} D_u^2 f_1(u) + f_2(u).$$

Démonstration. D'après le théorème 8.1, on a:

$$G_k\left(-\frac{1}{z_1}, -\frac{1}{z_2}\right) = z_1^k z_2^k G_k(z_1, z_2).$$

Ceci s'écrit:

$$F_k\left(-\frac{u}{u^2-v^2}, \frac{v}{u^2-v^2}\right) = (u^2-v^2)^k F(u, v)$$

et la proposition 8.2 résulte du calcul long, mais sans difficulté, de $D_u^2 F_k\left(-\frac{1}{u}, 0\right)$, $D_v^2 F_k\left(-\frac{1}{u}, 0\right)$, $D_u^4 F_k\left(-\frac{1}{u}, 0\right)$, $D_v^2 D_u^2 F_k\left(-\frac{1}{u}, 0\right)$, $D_v^4 F_k\left(-\frac{1}{u}, 0\right)$.

Posons:

$$(2i\pi)^2 f_1(u) = \sum_{n \geq 1} \tau_{2k+4}(n) q^n, \qquad (2i\pi)^4 f_2(u) = \sum_{n \geq 1} \tau_{2k+8}(n) q^n.$$

Les formules (4) et la proposition 8.2 (a), entraînent:

$$\frac{(2i\pi)^2}{D} \sum_a a^2 \sigma_{k-1}(a, n) = \frac{(2i\pi)^2}{2k+1} n^2 \sum_a \sigma_{k-1}(a, n) + (2i\pi)^2 \tau_{2k+4}(n).$$

Faisant la convolution des deux membres avec la fonction

$$\mu(n)n^{k+1}\chi_D(n)$$

on obtient aisément:

PROPOSITION 8.3.

$$\sum_{a\in Z} a^2\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right) = \frac{n^2D}{2k+1}\sum_{a\in Z}\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right)+D\sum_{d|n}d^{k+1}\mu(d)\chi_D(d)\tau_{2k+4}\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dans le cas $k=2$, on a: $\tau_{2k+4}=\tau_8=0$ puisqu'il n'existe pas de formes paraboliques non nulles de poids 8, et on retrouve le corollaire 4.2 pour le cas où n n'est pas un carré. Cette formule apparait ainsi de façon „naturelle'' comme coefficient du développement de la forme modulaire à deux variables attachée à K.

Considérons le cas $k=4$. On a $2k+4=12$ donc il existe λ tel que $\tau_{12}(n)=\lambda\tau(n)$, où $\tau(n)$ est la fonction de Ramanujan. Faisant $n=1$, on obtient:

$$\lambda D = \sum_{a\in Z}a^2\sigma_3\left(\frac{D-a^2}{4}\right)-\frac{D}{9}\sum_{a\in Z}\sigma_3\left(\frac{D-a^2}{4}\right).$$

Prenant par exemple $n=p$ premier, on obtient:

COROLLAIRE 8.4. *Si D est un discriminant:*

$$\tau(p) = p^5\chi_D(p)+\frac{\sum_{a\in Z}a^2\sigma_3\left(\frac{p^2D-a^2}{4}\right)-\frac{p^2D}{9}\sum_{a\in Z}\sigma_3\left(\frac{p^2D-a^2}{4}\right)}{\sum_{a\in Z}a^2\sigma_3\left(\frac{D-a^2}{4}\right)-\frac{D}{9}\sum_{a\in Z}\sigma_3\left(\frac{D-a^2}{4}\right)}.$$

Cette formule donne un moyen rapide de calcul de $\tau(p)$. On a

$$\tau_{2k+4}(n/d) = O\big((n/d)^{k+2}\big).$$

On en déduit:

COROLLAIRE 8.5. *Quand $n\to\infty$, on a:*

$$\sum_{a\in Z}a^2\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right) = \frac{n^2D}{2k+1}\sum_{a\in Z}\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right)+O\big(n^{k+1}\sigma_1(n)\big)$$

et en particulier:

$$\sum_{a\in Z}a^2\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right)\sim\frac{n^2D}{2k+1}\sum_{a\in Z}\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right).$$

Remarque 8.6. Plus généralement, il est vrai que, quand $n\to\infty$, on a:

$$\sum_{a\in Z}a^2\sigma_{k-1}\left(\frac{n-a^2}{4}\right)\sim\frac{n}{2k+1}\sum_{a\in Z}\sigma_{k-1}\left(\frac{n-a^2}{4}\right).$$

Par exemple, pour $k=4$, cela résulte de la proposition 4.5. Les formules (8.1) et la proposition 8.2 (b) entraînent:

$$\frac{(2i\pi)^4}{D^2}\sum_a a^4\sigma_{k-1}(a,n) = \frac{(2i\pi)^4\times 3}{(2k+1)(2k+3)}n^4\sum_a\sigma_{k-1}(a,n)+ +\frac{(2i\pi)^4\times 6}{2k+5}n^2\tau_{2k+4}(n)+(2i\pi)^4\tau_{2k+8}(n).$$

Faisant la convolution des deux membres avec la fonction $\mu(n)n^{k+3}\chi_D(n)$ on obtient:

PROPOSITION 8.7.

$$\sum_{a\in Z}a^4\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right) = \frac{3(n^2D)^2}{(2k+1)(2k+3)}\sum_{a\in Z}\sigma_{k-1}\left(\frac{n^2D-a^2}{4}\right)+ +\frac{6n^2D^2}{2k+5}\sum_{d|n}d^{k+1}\mu(d)\chi_D(d)\tau_{2k+4}\left(\frac{n}{d}\right)+ +D^2\sum_{d|n}d^{k+3}\mu(d)\chi_D(d)\tau_{2k+8}\left(\frac{n}{d}\right).$$

Prenant $k=2$, on obtient comme précédemment une nouvelle formule pour $\tau(p)$ et on vérifie sans peine qu'elle est équivalente au corollaire 8.4 grâce à la proposition 4.5.

9. Formes modulaires sur $\Gamma_0(p)$. Il existe un théorème analogue au théorème 0, mais dans lequel le terme constant est essentiellement la fonction ζ_K privée de ses facteurs locaux au-dessus d'un nombre premier p. La fonction correspondante est une forme modulaire seulement pour le groupe:

$$\Gamma_0(p) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}),\ c \equiv 0 \pmod p\right\}.$$

De façon précise (voir [3], théorème 19′):

THÉORÈME 9.0. *Gardons les hypothèses du théorème 0, et soit p un nombre premier. Posons:*

$$g_k^{(p)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_k^{(p)}(n)\, q^n$$

avec

$$a_k^{(p)}(0) = 2^{-r}\zeta_K(1-k)\prod_{\mathfrak{P}\mid p}(1-N\mathfrak{P}^{k-1}),$$

$$a_k^{(p)}(n) = \sum_{x\in E_n}\ \sum_{\substack{\mathfrak{a}\supset x\delta \\ (\mathfrak{a},p)=1}} (N\mathfrak{a})^{k-1} \quad \textit{pour} \quad n\geqslant 1.$$

Alors $g_k^{(p)}$ est une forme modulaire de poids rk sur $\Gamma_0(p)$ (y compris pour $(r,k) = (1,2)$).

Pour $r = 1$, on obtient:

COROLLAIRE 9.1. *La série*

$$E_k^{(p)}(z) = -(p^{k-1}-1) + \frac{2}{\zeta(1-k)}\sum_{n\geqslant 1}\sigma_{k-1}^{(p)}(n)\, q^n$$

est modulaire de poids k sur $\Gamma_0(p)$, où on a posé:

$$\sigma_{k-1}^{(p)}(n) = \sum_{\substack{d\mid n \\ (d,p)=1}} d^{k-1} = \sigma_{k-1}(n) - p^{k-1}\sigma_{k-1}(n/p).$$

Ce corollaire est évident directement puisque:

$$E_k^{(p)}(z) = E_k(z) - p^{k-1}E_k(pz).$$

Pour exploiter le théorème 9.0 il faut connaître la dimension de l'espace vectoriel $M_k(\Gamma_0(p))$ des formes modulaires de poids k sur $\Gamma_0(p)$. Cette dimension est donnée par le théorème suivant (voir [5]):

THÉORÈME 9.2. *Posons:*

$$g = \left[\frac{p+1}{12}\right] \ \textit{si}\ p \not\equiv 1 \pmod{12}, \qquad g = \left[\frac{p-13}{12}\right] \ \textit{si}\ p \equiv 1 \pmod{12}.$$

Alors si $k \geqslant 2$

$$\dim M_k(\Gamma_0(p)) = 1 + (k-1)g + \left(1+\left(\frac{-4}{p}\right)\right)[k/4] + \left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)[k/3].$$

Donnons une petite table de $\dim M_k(\Gamma_0(p))$:

$k \backslash p$	2	3	5	7	11	13	17
2	1	1	1	1	2	1	2
4	2	2	3	3	4	5	6
6	2	3	3	5	6	7	8
8	3	3	5	5	8	9	12
10	3	4	5	7	10	11	14
12	4	5	7	9	12	15	18
14	4	5	7	9	14	15	20

10. Explicitons maintenant le théorème 9.0 pour un corps quadratique réel. Raisonnant exactement comme dans le paragraphe 1, on obtient:

THÉORÈME 10.1. *Avec les notations du théorème 9.0, si K est un corps quadratique réel de discriminant D, on a:*

$$a_k^{(p)}(0) = \frac{1}{4}(p^{k-1}-1)\left(p^{k-1}\chi_D(p)-1\right)\zeta_K(1-k),$$

$$a_k^{(p)}(n) = \sum_{\substack{d\mid n \\ (d,p)=1}}\chi_D(d)\, d^{k-1}\sum_{a\in\boldsymbol{Z}}\sigma_{k-1}^{(p)}\left(\frac{(n/d)^2D-a^2}{4}\right)$$

pour $n \geqslant 1$.

COROLLAIRE 10.2. *Soit K un corps quadratique réel de discriminant D. Posons:*

$$b_k^{(p)}(0) = \frac{1}{4}\left(1-p^{k-1}\chi_D(p)\right)\zeta_K(1-k),$$

$$b_k^{(p)}(n) = \sum_{\substack{d\mid n \\ (d,p)=1}} d^{k-1}\chi_D(d)\sum_{a\in\boldsymbol{Z}}\sigma_{k-1}\left(\frac{(n/d)^2D-a^2}{4p}\right).$$

Alors la fonction: $h_k^{(p)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_k^{(p)}(n)\, q^n$ est une forme modulaire de poids $2k$ sur $\Gamma_0(p)$.

En effet, si $g_k(z)$ est la forme modulaire du théorème 0, la définition de $\sigma_{k-1}^{(p)}$ montre que:

$$g_k^{(p)}(z) = g_k(z) - p^{k-1}\chi_D(p)\,g_k(pz) - p^{k-1}h_k(z)$$

d'où le corollaire.

Nous nous servirons du lemme suivant, de démonstration immédiate:

LEMME 10.3. *On a pour tout $\alpha \geqslant 0$ et $z \in \boldsymbol{C}$:*

$$\sigma_z(p^\alpha x) = \sigma_z(p^\alpha)\,\sigma_z(x) - \big(\sigma_z(p^\alpha)-1\big)\,\sigma_z(x/p).$$

On en déduit par exemple:

PROPOSITION 10.4.

$$b_k^{(p)}(p^\alpha) = (p^{k-1}+1)\big(c_{k-1}(p^{2\alpha-2}D)\big) - p^{k-1}b_k^{(p)}(p^{\alpha-1}).$$

En effet, on a:

$$b_k^{(p)}(p^\alpha) = \sum_{a\in\boldsymbol{Z}} \sigma_{k-1}\left(\frac{p^{2\alpha}D-a^2}{4p}\right) = \sum_{a\in\boldsymbol{Z}} \sigma_{k-1}\left(\frac{p^{2\alpha}D-p^2a^2}{4p}\right)$$
$$= \sum_{a\in\boldsymbol{Z}} \sigma_{k-1}\left(p\cdot\frac{p^{2\alpha-2}D-a^2}{4}\right) = \sigma_{k-1}(p)\,c_{k-1}(p^{2\alpha-2}D) - p^{k-1}\,b_k^{(p)}(p^{\alpha-1})$$

d'où la proposition.

Cette proposition nous permet de calculer $b_k^{(p)}(p^\alpha)$ par récurrence sur α.

Nous allons appliquer les résultats précédents au calcul de $\zeta_K(1-k)$ pour un corps quadratique réel, pour $k = 2$ et 4 pour simplifier.

Calcul de $\zeta_K(-1)$. Il nous faut une proposition analogue à la proposition 2.1. Je ne connais pas de formule générale, mais pour des petits nombres premiers, on a:

PROPOSITION 10.5. *Soit $f \in M_4(\Gamma_0(p))$, $f = \sum_{i\geqslant 0} a_i q^i$. Alors:*

(a) *Pour*
$$\begin{aligned}
p &= 2: & 240a_0 &= a_2 - 8a_1,\\
p &= 3: & 240a_0 &= a_3 - 27a_1,\\
p &= 5: & 240a_0 &= a_5 - 10a_2 - 35a_1,\\
p &= 7: & 240a_0 &= a_7 - 35a_2 - 28a_1,\\
p &= 11: & 240a_0 &= a_{11} - 22a_3 - 88a_2 + 77a_1,\\
p &= 13: & 240a_0 &= a_{13} - 19a_4 - 18a_3 - 35a_2 + 9a_1.
\end{aligned}$$

(b) *De plus, pour $p = 13$, si f appartient au sous-espace vectoriel E engendré par les séries $g_2^{(13)}(z)$, qui est de codimension 1, on a:*

$$240a_0 = a_{13} - 130a_4 + 130a_3 + 520a_2 - 1027a_1.$$

Démonstration. (a) Le théorème 9.2 fournit la dimension de $M_4(\Gamma_0(p))$. Il suffit alors de trouver une base de $M_4(\Gamma_0(p))$ et de vérifier les égalités ci-dessus pour les éléments de la base. Pour $2 \leqslant p \leqslant 11$, cela est très facile car on s'aperçoit que les séries $g_2^{(p)}(z)$ engendrent $M_4(\Gamma_0(p))$ quand on fait varier le corps quadratique K. Pour $p = 13$ ceci n'est plus vrai, et il faut utiliser des moyens plus compliqués, par exemple des fonctions thêta. Bien entendu ce ne sont que des vérifications a posteriori, mais on trouve facilement les coefficients nécessaires en résolvant un système linéaire.

(b) Utilisant le corollaire 10.2, il est facile de vérifier que les éléments de E satisfont à l'équation:

$$a_{26} - 9a_{13} = -13(a_2 - 9a_1).$$

Comme on peut trouver des éléments de $M_4(\Gamma_0(13))$ qui ne satisfont pas à cette condition (par exemple certaines des fonctions thêta ci-dessus) il en résulte que E est de codimension au moins égale à 1, et E est exactement de codimension 1 car $\dim M_4(\Gamma_0(13)) = 5$ et $\dim E \geqslant 4$.

La relation $3a_4 - 4a_3 - 15a_2 + 28a_1 = 0$ est satisfaite par les éléments d'une base de E, donc par tout élément de E, et (b) en résulte puisque

$$a_{13} - 19a_4 - 18a_3 - 35a_2 + 9a_1 - 37(3a_4 - 4a_3 - 15a_2 + 28a_1)$$
$$= a_{13} - 130a_4 + 130a_3 + 520a_2 - 1027a_1.$$

On remarque en particulier que pour $2 \leqslant p \leqslant 13$ et toute série $h_2^{(p)}(z)$ on peut écrire:

$$240a_0 = a_p + p\sum_{1\leqslant i\leqslant m} x_i a_i$$

avec les x_i entiers et $m = \dim M_4(\Gamma_0(p)) - 1$. Il est naturel de penser que ceci est vrai pour tout p, toutefois je ne sais pas le démontrer.

Utilisant la proposition 10.4, on en déduit:

$$60\big(1-p\chi_D(p)\big)\zeta_K(-1)$$
$$= (p+1)c_1(D) - p\sum_{a\in\boldsymbol{Z}}\sigma_1\left(\frac{D-a^2}{4p}\right) + p\sum_{1\leqslant i\leqslant m} x_i b_2^{(p)}(i)$$

et puisque d'après le théorème 2.2, $c_1(D) = 60\,\zeta_K(-1)$:

$$60\big(1+\chi_D(p)\big)\zeta_K(-1) = (1-x_1)\sum_{a\in\boldsymbol{Z}}\sigma_1\left(\frac{D-a^2}{4p}\right) - \sum_{2\leqslant i\leqslant m} x_i b_2^{(p)}(i).$$

d'où en explicitant pour $2 \leqslant p \leqslant 11$:

Théorème 10.8. *Soit K un corps quadratique réel de discriminant D:*

$$\left(1+\left(\frac{D}{2}\right)\right)\zeta_K(-1) = \frac{1}{12}\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{8}\right),$$

$$\left(1+\left(\frac{D}{3}\right)\right)\zeta_K(-1) = \frac{1}{6}\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{12}\right),$$

$$\left(1+\left(\frac{D}{5}\right)\right)\zeta_K(-1) = \frac{1}{30}\left[\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{5}\right)+\left(4+2\left(\frac{D}{2}\right)\right)\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{20}\right)\right],$$

$$\left(1+\left(\frac{D}{7}\right)\right)\zeta_K(-1) = \frac{1}{12}\left[\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{7}\right)+\left(1+2\left(\frac{D}{2}\right)\right)\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{28}\right)\right],$$

$$\left(1+\left(\frac{D}{11}\right)\right)\zeta_K(-1) = \frac{1}{30}\left[\sum \sigma_1\left(\frac{9D-a^2}{44}\right)+4\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{11}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(3\left(\frac{D}{3}\right)+8\left(\frac{D}{2}\right)-3\right)\sum \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{44}\right)\right],$$

où il est entendu que les sommations portent sur $a\in \mathbf{Z}$.

Ce théorème appelle deux remarques:

(a) Quand $\left(\frac{D}{p}\right)\neq -1$ cela permet de calculer $\zeta_K(-1)$ plus rapidement que par le théorème 2.2. Par exemple, si $D\equiv 0 \pmod 3$, la deuxième formule fournit un moyen 3 fois plus rapide pour calculer $\zeta_K(-1)$.

(b) Le dénominateur dans le membre de droite est bien meilleur que celui du théorème 2.2. Par exemple, la deuxième formule montre que si $D\not\equiv 2 \pmod 3$, alors $6\zeta_K(-1)$ est entier, ce qui n'est pas évident par le théorème 2.2. (En fait $6\zeta_K(-1)$ est entier sauf pour $D=5$ et $D=8$).

Calcul de $\zeta_K(-3)$. De façon analoque à la proposition 10.5, on a:

Proposition 10.9. *Soit $f\in M_3(\Gamma_0(p))$, $f=\sum_{i\geqslant 0} a_i q^i$. Alors:*

$p=2$: $7680a_0 = -a_3+16a_2-140a_1$,
$p=3$: $480a_0 = a_3-18a_2+135a_1$.

D'où l'analogue du théorème 10.8:

Théorème 10.10. *Soit K un corps quadratique réel de discriminant D*

$$\left(1+\left(\frac{D}{2}\right)\right)\zeta_K(-3) = \frac{1}{15360}\left[\sum \sigma_3\left(\frac{9D-a^2}{8}\right)+\left(27\left(\frac{D}{3}\right)-12\right)\sum \sigma_3\left(\frac{D-a^2}{8}\right)\right],$$

$$\left(1+\left(\frac{D}{3}\right)\right)\zeta_K(-3) = \frac{1}{180}\left[\sum \sigma_3\left(\frac{D-a^2}{3}\right)+\left(8\left(\frac{D}{2}\right)-6\right)\sum \sigma_3\left(\frac{D-a^2}{12}\right)\right].$$

11. Applications. Dans ce paragraphe, nous donnons quelques applications des résultats du paragraphe 10.

Combinant la première formule du théorème 10.8 avec les théorèmes 2.2 et 3.1, on obtient aisément, suivant les valeurs de $\left(\frac{D}{2}\right)$:

Proposition 11.1. *Soit $m\equiv 2, 3 \pmod 4$ sans facteur carré, $K=\mathbf{Q}(\sqrt{m})$:*

$$\sum_{a\equiv m \pmod 2}\sigma_1(m-a^2) = \frac{3}{5}\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1(m-a^2) = 36\,\zeta_K(-1),$$

$$\sum_{a\not\equiv m \pmod 2}\sigma_1(m-a^2) = \frac{2}{5}\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1(m-a^2) = 24\,\zeta_K(-1),$$

$$r_5(m) = 20\sum_{a\not\equiv m \pmod 2}\sigma_1(m-a^2).$$

En effet, on a

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{12}\sum_{a\equiv m \pmod 2}\sigma_1\left(\frac{m-a^2}{2}\right) = \frac{1}{36}\sum_{a\equiv m \pmod 2}\sigma_1(m-a^2)$$

puisque $(m-a^2)/2$ est toujours impair quand $a\equiv m \pmod 2$.

Proposition 11.2. *Soit $m\equiv 1 \pmod 8$ sans facteur carré, $K=\mathbf{Q}(\sqrt{m})$:*

$$\sum_{a \text{ impair}}\sigma_1(m-a^2) = \frac{23}{35}\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1(m-a^2) = \frac{23}{5}\sum_{a \text{ impair}}\sigma_1\left(\frac{m-a^2}{4}\right) = 276\zeta_K(-1),$$

$$\sum_{a \text{ pair}}\sigma_1(m-a^2) = \frac{12}{35}\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1(m-a^2) = \frac{12}{5}\sum_{a \text{ impair}}\sigma_1\left(\frac{m-a^2}{4}\right) = 144\zeta_K(-1),$$

$$r_5(m) = 10\sum_{a \text{ pair}}\sigma_1(m-a^2).$$

Ceci résulte facilement des identités:

$$\sum_{a\in\mathbf{Z}}\sigma_1(m-a^2) = \left(9-2\left(\frac{m}{2}\right)\right)\sum_{a\equiv m \pmod 2}\sigma_1\left(\frac{m-a^2}{4}\right) \quad \text{(théorème 3.1)}$$

et

$$\sigma_1(m-a^2) = 7\sigma_1\left(\frac{m-a^2}{4}\right)-6\sigma_1\left(\frac{m-a^2}{8}\right) \quad \text{si} \quad 4\,|\,(m-a^2)$$

(lemme 10.3).

Enfin, pour $D\equiv 5 \pmod 8$ la première formule du théorème 10.8 se réduit à une trivialité. Toutefois, on démontre élémentairement à partir du théorème 2.2 l'analogue des propositions 11.1 et 11.2:

Proposition 11.3. *Soit* $m \equiv 5 \pmod 8$ *sans facteur carré,* $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$

$$\sum_{a \text{ impair}} \sigma_1(m-a^2) = \frac{7}{11} \sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_1(m-a^2) = 7 \sum_{a \text{ impair}} \sigma_1\left(\frac{m-a^2}{4}\right) = 420\zeta_K(-1),$$

$$\sum_{a \text{ pair}} \sigma_1(m-a^2) = \frac{4}{11} \sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_1(m-a^2) = 4 \sum_{a \text{ impair}} \sigma_1\left(\frac{m-a^2}{4}\right) = 240\zeta_K(-1),$$

$$r_5(m) = 8 \sum_{a \text{ impair}} \sigma_1(m-a^2) = 14 \sum_{a \text{ pair}} \sigma_1(m-a^2).$$

Explicitons maintenant la deuxième formule du théorème 10.8. On obtient:

Proposition 11.4. (a) *Si* $D \equiv 1 \pmod 3$, *alors*:

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{12} \sum_{3 \nmid a} \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{12}\right);$$

(b) *Si* $D \equiv 0 \pmod 3$, *alors*:

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{6} \sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_1\left(\frac{D-9a^2}{12}\right) = \frac{1}{36} \sum_{3 \nmid a} \sigma_1\left(\frac{D-a^2}{4}\right).$$

On peut déduire de cette proposition un corollaire amusant:

Corollaire 11.5. *Supposons* $D \equiv 6 \pmod 9$. *Alors*: $\zeta_K(-1)$ *est entier si* $D \neq 24$ ($\zeta_K(-1) = 1/2$ *si* $D = 24$).

Démonstration. On a d'abord le lemme suivant:

Lemme 11.6.

$$x \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow \sigma_1(x) \equiv 0 \pmod 3.$$

En effet, x n'est pas un carré; si $d_1, \ldots, d_l$ sont les diviseurs de x plus petits que $\sqrt{x}$, on a $d_i + (x/d_i) = (d_i^2+x)/d_i$ et $3 \nmid d_i$ alors que $d_i^2 \equiv 1 \pmod 3$ donc $3 \mid d_i^2 + x$, d'où le lemme.

Or d'après la proposition 11.4 (b), si $D \equiv 6 \pmod 9$, on a:

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{6} \sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_1\left(\frac{D-9a^2}{12}\right) \quad \text{et} \quad \frac{D-9a^2}{12} \equiv 2 \pmod 3;$$

le lemme 11.6 entraîne donc que $\zeta_K(-1)$ est 3-entier.

De plus, si D est impair:

$$\sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_1\left(\frac{D-9a^2}{12}\right) = 2 \sum_{a > 0} \sigma_1\left(\frac{D-9a^2}{12}\right) \equiv 0 \pmod 2$$

et si D est pair pour la même raison de symétrie, on a:

$$\sum_{a \in \boldsymbol{Z}} \sigma_1\left(\frac{D-9a^2}{12}\right) \equiv \sigma_1\left(\frac{D}{12}\right) \pmod 2.$$

Or il est immédiat que $\sigma_1(x) \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow x$ est un carré où le double d'un carré. Comme $D/12 \equiv 2 \pmod 3$ par hypothèse, seule la possibilité $D/12 = 2n^2$ existe, et comme $D/12$ est sans facteur carré $\sigma_1(D/12)$ n'est impair que si $D/12 = 2$, d'où le corollaire.

Un raisonnement analogue conduirait au résultat suivant:

Proposition 11.7. *Soit* $p \equiv 3 \pmod 4$ *premier, et* D *un discriminant de la forme* $D = pn$ *avec* $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$. *Alors, pour* $p > 3$:

$$v_p\left(\zeta_K\left(\frac{1-p}{2}\right)\right) \geqslant 1.$$

Bibliographie

[1] P. Cartier et Y. Roy, *Certains calculs numériques relatifs à l'interpolation p-adique des séries de Dirichlet*, Lecture Notes n° 350, Springer, p. 269–350.

[2] H. Cohen, *Sommes de carrés, fonctions L et formes modulaires*, C. R. A. S. Paris, 277 (29 octobre 1973), p. 827–830.

[3] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Lecture Notes n° 350, Springer, p. 191–268.

[4] G. Shimura, *Modular forms of Half Integral Weight*, Lecture Notes n° 320, Springer, p. 57–74, and Ann. of Math. 97 (1973), p. 440–481.

[5] — *Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[6] C. L. Siegel, *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Gött. Nach. 10 (1969), p. 87–102.

[7] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms*, Lecture Notes n° 350, Springer, p. 1–56.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
Talence, France

Reçu le 21. 11. 1974 (641)