Note zum Wieferichschen Beweis der Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch neun Kuben.

Von

Emil Herzog (Basel).

Im Jahre 1908 wurde von A. Wieferich zum ersten Mal in sehr scharfsinniger Weise bewiesen, dass sich jede positive ganze Zahl als eine Summe von höchstens neun positiven ganzen Kuben darstellen lässt [1]). Die Eleganz dieses Beweises wird jedoch durch die Verwendung umfangreicher Tabellen beeinträchtigt, deren Durchrechnung jeweils viel Zeit erfordert und die auch in den Arbeiten von Landau [2]) und Kempner [3]) eine Rolle spielen. In der vorliegenden Notiz soll nun ein Satz bewiesen werden, der das, was besagte Tabellen dartun, als Spezialfälle enthält. Er lautet:

> *Ist n ganz und* $\equiv \pm 1$ (mod. 6), *so gibt es zu jeder ganzen Zahl M_1, die grösser ist als $22^3|n|$ ein nicht negatives ganzes $\gamma \leqq 22$, sodass die Zahl $M_2 = M_1 - n\gamma^3$ gleich $6\,M_3$ wird, wo sich M_3 als Summe dreier Quadrate ganzer Zahlen darstellen lässt.*

Der Beweis gestaltet sich wie folgt:

I.

1. Es genügt, zu zeigen, dass γ aus dem vollständigen reduzierten Restsystem (mod. 24) so gewählt werden kann, dass $\gamma \not\equiv 23$, $M_2 = 6M_3$ und M_3 nicht von der Form $4^\eta(8\xi + 7)$ wird, da diese Form bekanntlich alle Zahlen enthält, die sich nicht als Summe von drei Quadraten darstellen lassen.

[1]), [2]) Mathematische Annalen, Bd. 66 S. 95 f.

[3]) „Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen". Dissertation. Göttingen, 1912.

2. Jede ungerade Restklasse (mod. 24) enthält eine der Zahlen $n\gamma^3$, denn für ungerade γ ist $\gamma^3 \equiv \gamma$ (mod. 24), und da n als zu 24 teilerfremd angenommen wurde, so durchläuft $n\gamma^3$ mit γ die ungeraden Restklassen (mod. 24).

3. Jede durch 8 teilbare Restklasse (mod. 24) enthält genau 4 der Zahlen $n\gamma^3$, denn durchläuft γ die geraden Restklassen (mod. 6), so durchläuft γ^3 und damit auch $n\gamma^3$ die Klassen 0, 8, 16 (mod. 24), da $(n,24) = 1$ ist.

4. Gehört also M_1 (mod. 24) zu einer Restklasse, die um 6 oder 12 grösser ist als eine der in 2. und 3. genannten, so kann ich γ so wählen, dass $n\gamma^3$ entweder $\equiv M_1 - 6$ oder $\equiv M_1 - 12$ (mod. 24) wird. Für die ungeraden M_1 sind sogar beide Fälle möglich, sodass hier mindestens ein zugehöriges $\gamma < 23$ ist, und da für gerade M_1 auch nur gerade γ in Frage kommen, so sind diese ohnehin < 23.
   In diesen Fällen wird also $M_2 \equiv 6$ oder 12 (mod. 24), d. h. es wird $M_3 \equiv 1$ oder 2 (mod. 4), was die in 1. angegebene Bedingung erfüllt. Damit sind alle ungeraden Restklassen (mod. 24) und die folgenden geraden erledigt: $M_1 \equiv 4, 6, 12, 14, 20, 22$ (mod. 24).

II.

5. Für die übrigen Restklassen, also für

$$M_1 \equiv 0, 2, 8, 10, 16, 18 \text{ (mod. 24)}$$

ist es zunächst klar, dass $M_2 = M_1 - n\gamma^3$ durch 6 teilbar gemacht werden kann, da von den drei Zahlen

$$2k,\ 2k - 8 \text{ und } 2k - 16$$

stets eine $\equiv 0$ (mod. 6) ist und $n\gamma^3$ nach Bedarf $\equiv$ 0, 8 oder 16 (mod. 24) gewählt werden kann. Nach 3. kann ich es sogar so einrichten, dass $0 \leqq \gamma < 6$ ist.

6. Ist nun $M_1 \equiv 2, 10, 18$ (mod. 24), also $M_1 = 8k + 2$, so wähle ich zunächst γ gemäss 5. und < 6 und betrachte daneben noch $\gamma' = \gamma + 6$. Dann wird

$$M_1 - n\gamma^3 = 6\,M_3 \quad \text{und} \quad M_1 - n\gamma'^3 = 6\,M_3',$$

wobei M_3 und M_3' ungerade sein werden, weil γ gerade und $M_1 \equiv 2$ (mod. 4), also $6\,M_3 \equiv 6\,M_3' \equiv 2$ (mod. 4) ist.
Es wird nun

$$6\,(M_3 - M_3') = n\gamma'^3 - n\gamma^3 = n\,(18\gamma^2 + 108\gamma + 216)$$

Also:

$$M_3 - M_3' = n\,(3\gamma^2 + 18\gamma + 36) \equiv 4 \pmod{8},$$

weil γ gerade ist.
Von den beiden ungeraden Zahlen M_3 und M_3' ist also wenigstens eine $\not\equiv 7 \pmod{8}$ und erfüllt daher die in 1. genannte Bedingung.

7. Ist endlich $M_1 \equiv 0, 8, 16 \pmod{24}$, also $M_1 = 8k$, so bestimme ich wieder γ_1 gemäss 5. und < 6 und $\gamma_2 = \gamma_1 + 6$.
Von diesen beiden Zahlen ist eine $\equiv 2 \pmod{4}$. Diese nehme ich und bezeichne sie mit $\gamma = 2\bar{\gamma}$ wo $\gamma < 12$ und $\bar{\gamma} \equiv 1 \pmod{2}$ sein wird.
Dazu betrachte ich die Zahl $\gamma' = \gamma + 12$, die demnach auch noch < 24, also, weil sie gerade ist, $\leqq 22$ ist.
Ich erhalte dann:

$$M_1 - n\gamma^3 = 6M_3 \text{ und } M_1 - n\gamma'^3 = 6M_3',$$

wo jetzt M_3 und M_3' durch 4 teilbar, $= 4\bar{M}_3$ bezw. $= 4\bar{M}_3'$ sein werden, da γ gerade und $M_1 = 8k$ ist.
Wie oben wird dann

$$6\,(M_3 - M_3') = n\gamma'^3 - n\gamma^3 = n\,(36\gamma^2 + 3.12^2\gamma + 12^3).$$

Also

$$M_3 - M_3' = n(6\gamma^2 + 72\gamma + 2\,.\,12^2)$$

oder:

$$\bar{M}_3 - \bar{M}_3' = n(6\bar{\gamma}^2 + 36\bar{\gamma} + 72) \equiv 2 \pmod{4},$$

weil $\bar{\gamma}^2 \equiv 1 \pmod{4}$ und $(n, 4) = 1$ ist.
Von den beiden Zahlen $\bar{M}_3$ und $\bar{M}_3'$ ist also wenigstens eine nicht von der Form $4^{\eta}(8\xi + 7)$, da nicht beide $\equiv 0 \pmod{4}$ oder $\equiv 7 \pmod{8}$ sein können.
Das zugehörige M_3 oder M_3' erfüllt also die aufgestellte Bedingung, sodass nun alle Fälle erledigt sind und damit der Satz bewiesen ist.

Basel, den 4. März 1938.

(Eingegangen am 12. März 1938.)

On the fractional parts of the powers of a rational number.

By

Kurt Mahler (Manchester).

Let u and v be two coprime integers with $u > v > 1$, such that $\frac{u}{v} > 1$, suppose that

$$\rho_n = \left(\frac{u}{v}\right)^n - \left[\left(\frac{u}{v}\right)^n\right].$$

Then the following results, as special cases of more general theorems, are proved in this paper:

a: $$\lim_{n\to\infty} v^n \rho_n = \infty.$$

b: When ε is a positive constant and

$$\rho_n \leqslant u^{-\varepsilon n}$$

for an infinite sequence of positive integers $n = n_1, n_2, n_3, \ldots$ with $n_{\nu+1} > n_\nu$, then

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} = \infty.$$

The proofs of a) and b) depend on generalizations of the Thue-Siegel theorem, due to Schneider or myself, and are very simple.

I.

1) Some years ago, I proved the following theorem [1]):

[1]) Math. Annalen 107 (1932), 691—730, in particular Satz 2, p. 722.