[5] P. D. T. A. Elliott and C. Ryavec, *The distribution of the values of additive arithmetical functions*, Acta Math. 126 (1971), pp. 143–164.
[6] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, third edition, Oxford 1954.
[7] G. Jogesh Babu, *Some results on the distribution of values of additive functions on the set of pairs of positive integers I*, Acta Arith. 29 (1975), pp. 171–179.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF OREGON
Eugene, Oregon, U.S.A.

Received on 17. 6. 1974
and in revised form on 25. 9. 1974 (589)

ACTA ARITHMETICA
XXIX (1976)

Über die Anwendung einer Methode von Linnik

von

K. Prachar (Wien)

Herrn Professor E. Hlawka zum 60ten Geburtstag gewidmet

Einleitung. Vom Verfasser wurde in [3] eine Methode von Linnik [1] angewendet um ein gewisses Analogon eines von A. Selberg [4] herrührenden Satzes über Primzahlen in kleinen Intervallen zu beweisen. Diese Arbeit wird im folgenden mit I bezeichnet. Hier soll zunächst ein Satz aus [1] ein wenig verbessert werden.

In § 2 geben wir unter Verwendung einer neueren Entdeckung von Halász und Turán einen Beweis für einen Satz, den Linnik [1] mit anscheinend unrichtigem Beweis veröffentlicht hat.

1. Mittels des Vorganges von Linnik beweisen wir nun den gegenüber Linnik ein wenig verbesserten

Satz 1. *Unter der Annahme der Richtigkeit der Riemann'schen Vermutung für alle L-Funktionen modulo q, $q < N(\log N)^{-C}$, q fest, hat die Gleichung $p_1+p_2 = N+hq$, wobei für gerades N auch q gerade sei, stets Lösungen in Primzahlen p_1, p_2 und ganzen Zahlen h, $0 \leqslant h \leqslant (\log N)^B$ für $3 < B < C$.*

Beweis. Sei

$$T(\alpha) = \sum_{0\leqslant h<H} e^{2\pi i q h \alpha}, \tag{1}$$

wobei H später genauer bestimmt wird.

Wenn dann für alle $a = 0, 1, \ldots, q-1$

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| > \frac{1}{qM} \tag{2}$$

gilt mit $M = [(\log N)^b]$, $b > 3$, so hat man

$$|T(\alpha)| \leqslant M \sim H/(\log N)^{B-b}, \tag{3}$$

wenn $H = [(\log N)^B]$ gesetzt wird, $B > b$.

Setzen wir noch

$$J^* = \int_{-1/2}^{1/2} \{S(\alpha)\}^2 T(\alpha) e^{2\pi i N\alpha} d\alpha \tag{4}$$

mit

$$S(\alpha) = \sum_n e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i n\alpha},$$

so ist

$$J^* = \sum\sum\sum_{n_1+n_2=N+hq} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2) e^{-n_1/N} e^{-n_2/N}, \tag{5}$$

wobei über die $h = 0, 1, \ldots, H-1$ summiert wird (und über alle Paare natürlicher Zahlen n_1, n_2, d.h. hier über alle Primzahlpotenzen n_1, n_2). Die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$p_1^l + p_2^m = N + hq \tag{6}$$

mit $l \geqslant 2$ oder $m \geqslant 2$ ist bei festem h offenbar

$$\ll N^{1/2}/\log N$$

also für alle $h = 0, 1, \ldots, H-1$ zusammen $\ll N^{1/2}(\log N)^{B-1}$. Der entsprechende Bestandteil in (5) ist daher $\ll N^{1/2}(\log N)^{B+1}$, so daß gilt

$$J^* = \sum\sum\sum_{p_1+p_2=N+qh} \log p_1 \log p_2 e^{-p_1/N} e^{-p_2/N} + O\big(N^{1/2}(\log N)^{B+1}\big). \tag{7}$$

Man hat nun nach (3)

$$J^* = J' + O\left(N \log N \frac{H}{(\log N)^{B-b}}\right) \tag{8}$$

mit

$$J' = \sum_{a=0}^{q-1} \int_{-1/qM}^{1/qM} S^2\left(\frac{a}{q}+\alpha\right) T\left(\frac{a}{q}+\alpha\right) e^{2\pi i N\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)} d\alpha \tag{9}$$

wegen

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N \log N.$$

Weiter wird

$$J' = \sum_{q_1|q} \sum_{(a,q_1)=1} \int_{-1/qM}^{1/qM} S^2\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right) T\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right) e^{2\pi i N\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)} d\alpha. \tag{10}$$

Bei Linnik wurde nun eine analoge Formel zu I, § 7, (9) hergeleitet, wobei die Änderung gegenüber I nur darin besteht, daß jetzt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{N}+2\pi i\alpha\right)^2} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha = N_1 e^{-N_1/N} \tag{11}$$

verwendet werden muß. Wir erhalten, wenn jetzt $\sum_a'$ Summation über die zu q_1 teilerfremden a modulo q_1 bedeutet und $N_1 = N + qh$

$$\sum_a' \int_{-1/qM}^{1/qM} S^2\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right) e^{2\pi i N_1\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)} d\alpha = J_0' + J_1' + J_2';$$

$$J_0' = \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)} \sum_a' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q_1}} \left\{N_1 e^{-N_1/N} + O\left(\frac{N}{q^{1/2}M^{1/2}} \log^{3/2} N + qM\right)\right\},$$

$$J_1' \ll \frac{N}{q^{1/2}M^{1/2}} \log^{3/2} N \log\log q, \qquad J_2' \ll \frac{q_1}{q} \frac{N}{M} \log^3 N.$$

Summieren nach q_1, $q_1|q$ liefert

$$\sum_{q_1|q} \sum_a' \int_{-1/qM}^{1/qM} S^2\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right) e^{2\pi i N_1\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)} d\alpha = \Sigma_0' + \Sigma_1' + \Sigma_2';$$

$$\Sigma_0' = \sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)} \sum_a' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q_1}} N_1 e^{-N_1/N} +$$

$$+ O\left(\sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)} \left(\frac{N}{q^{1/2}M^{1/2}} \log^{3/2} N + qM\right)\right),$$

$$\Sigma_1' \ll \tau(q) \frac{N}{q^{1/2}M^{1/2}} \log^{3/2} N \log\log N,$$

$$\Sigma_2' \ll \sum_{q_1|q} \frac{q_1}{q} \frac{N}{M} \log^3 N \ll \frac{N}{M} \log^3 N \log\log N.$$

Für Σ_0' erhält man also

$$\Sigma_0' = N_1 e^{-N_1/N} \sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)} \sum_a' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q_1}} +$$

$$+ O\left(\frac{N}{q^{1/2}M^{1/2}} \log^{3/2} N \log\log N + qM \log\log N\right)$$

und insgesamt

$$\sum_{q_1|q} \sum_a' \int_{-1/qM}^{1/qM} S^2\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right) e^{2\pi i N_1\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)} d\alpha$$

$$= N_1 e^{-N_1/N} \sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)} \sum_a' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q_1}} +$$

$$+ O\left(\frac{N}{M^{1/2}} \log^{3/2} N \log\log N + qM \log\log N\right).$$

Nun summieren wir noch über $0 \leqslant h < H$ und erhalten

$$(12)\qquad \sum_{q_1|q}\sum_{a}{}' \int_{-1/qM}^{1/qM} S^2\left(\frac{a}{q_1}+a\right)T\left(\frac{a}{q_1}+a\right)e^{2\pi iN\left(\frac{a}{q_1}+a\right)}da$$
$$= \sum_h (N+qh)e^{-(N+qh)/N}\sum_{q_1|q}\frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)}\sum_a{}' e^{2\pi iN\frac{a}{q_1}}+$$
$$+O\left(\frac{NH}{M^{1/2}}\log^{3/2}N\log\log N+HqM\log\log N\right),$$

da ja $e^{2\pi iqh\frac{a}{q_1}}=1$ ist wegen $q_1|q$. Weiter hat man

$$\sum_{h=0}^{H-1}(N+qh)e^{-(N+qh)/N}=\frac{1}{e}NH+O\left(\frac{NH}{(\log N)^{C-B}}\right).$$

Ferner gilt mit

$$\psi(p)=\frac{\mu^2(p)}{\varphi^2(p)}\sum_{a=1}^{p-1}e^{2\pi iN\frac{a}{p}}$$

daß,

$$\psi(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & \text{für}\quad p|N,\\[2mm] -\dfrac{1}{(p-1)^2} & \text{für}\quad p\nmid N\end{cases}$$

ist. Weil

$$\frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)}\sum_{(a,q_1)=1}e^{2\pi iN\frac{a}{q_1}}$$

eine multiplikative Funktion ist (für die quadratfreien Zahlen q_1) so erhält man, wenn für gerades q auch N gerade ist,

$$\sum_{q_1|q}\frac{\mu^2(q_1)}{\varphi^2(q_1)}\sum_{(a,q_1)=1}e^{2\pi iN\frac{a}{q_1}}=\prod_{p|(q,N)}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{\substack{p|q\\ p\nmid N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=S(N,q).$$

Somit hat man

$$\sum_{q_1|q}\sum_a{}'\int_{-1/qM}^{1/qM}S^2\left(\frac{a}{q_1}+a\right)T\left(\frac{a}{q_1}+a\right)e^{2\pi iN\left(\frac{a}{q_1}+a\right)}da$$
$$=\frac{1}{e}NHS(N,q)+O\left(\frac{NHS(N,q)}{(\log N)^{C-B}}\right)+$$
$$+O\left(\frac{NH}{M^{1/2}}\log^{3/2}N\log\log N+qMH\log\log N\right).$$

Nun gilt

$$S(N,q)\geqslant\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=c_0\quad\text{und}\quad S(N,q)\ll\log\log q\ll\log\log N,$$
$$qM\leqslant N/(\log N)^{C-b}\quad\text{und}\quad M=[\log^b N],\quad b>3.$$

Man überprüft ohne weiteres, daß die in I geforderte Bedingung $qM<N/(\log N)^{1/2}$ durch jede Bedingung $qM<N/(\log N)^{\delta}$ mit positivem, festem δ ersetzt werden kann. Nach (8), (7) ergibt sich nun

$$\sum_{p_1+p_2=N+qh}\sum\log p_1\log p_2e^{-p_1/N}e^{-p_2/N}=\frac{1}{e}NHS(N,q)\left\{1+O\left(\frac{1}{(\log N)^{\varepsilon}}\right)\right\},$$

wenn $B>b+1$ ist, d.h. $B>4$, und genügend kleines $\varepsilon>0$.

Durch einen von Linnik selbst für $q=1$ verwendeten Kunstgriff kann man die Behauptung auch für $B>3$ beweisen. Anstelle des Integrals J^* aus (4) betrachte man

$$J^*=\int_{-1/2}^{1/2}S^2(a)\{T(a)\}^re^{2\pi iNa}da,$$

wobei die natürliche Zahl r später fixiert wird. Man erhält so im Exponenten Zahlen der Form

$$N+q(h_1+h_2+\ldots+h_r)$$

also wieder Zahlen der Form $N+qh$, wobei aber jetzt $h\leqslant rH$ gilt und jedes h sooft vorkommt als es Zerlegungen $h=h_1+h_2+\ldots+h_r$ gibt. Anstelle von (8) erhält man

$$J^*=J'+O\left(N\log N\left(\frac{H}{(\log N)^{B-b}}\right)^r\right).$$

Wenn nun $B>b>3$ angenommen wird, wählt man r so groß, daß $(B-b)r>1$ wird und hat dann

$$J^*=J'+O\left(\frac{NH^r}{(\log N)^{\nu}}\right)$$

mit $\nu>0$. Die Behandlung von J' ist dieselbe wie früher, und man erhält anstelle von (12)

$$\sum_{q_1|q}\sum_a{}'\int_{-1/qM}^{1/qM}S^2\left(\frac{a}{q_1}+a\right)T^r\left(\frac{a}{q_1}+a\right)e^{2\pi iN\left(\frac{a}{q_1}+a\right)}da$$
$$=\sum_{h_1}\ldots\sum_{h_r}(N+q(h_1+\ldots+h_r))e^{-\frac{N+q(h_1+\ldots+h_r)}{N}}S(N,q)+$$
$$+O\left(\frac{NH^rS(N,q)}{(\log N)^{C-B}}\right)+O\left(\frac{NH^r}{M^{1/2}}\log^{3/2}N\log\log N+H^rqM\log\log N\right)$$

und das Hauptglied wird $(1/e)NH^rS(N,q)$.

2. Linnik [1] untersuchte auch, was aus der bis jetzt noch nicht vollständing bewiesenen „Dichtehypothese"

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)}(\log T)^b \qquad (\sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ b \geqslant 1) \tag{1}$$

für die Anzahl $N(\sigma, T)$ der Nullstellen der Zetafunktion $\zeta(s)$ in $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$ für die Lage von „Goldbachschen Zahlen" $p+p'$ in der Nähe einer großen Zahl N gefolgert werden kann. Die Aussage seines Satzes 3 lautet: Zu jedem genügend großen N gibt es Primzahlen p, p' mit

$$|p+p'-N| < (\log N)^{b+6}, \tag{2}$$

wenn angenommen wird, daß (1) richtig ist. Der Beweis, den Linnik gibt, ist jedoch unseres Erachtens unrichtig. Er schließt S. 515, Zeile 16, daß es genüge

$$\varkappa_N = \frac{1}{(\log N)^{b+6}}$$

zu setzen, um zu erreichen, daß (S. 515, Zeile 6) mit $\nu = \sigma - \frac{1}{2}$

$$N^{2\nu}\left(N\frac{\varkappa_N}{2^m}\right)^{1-2\nu} \ll \frac{N}{(\log N)^{b+6}}$$

gilt für $m = 1, 2, \ldots$ und $\sigma = \sigma_\nu \leqslant 1-(\log N)^{-10/11}$. Nun gilt aber z.B. für $\sigma_\nu = 1-(\log N)^{-\delta}$, $0 < \delta < 1$

$$\varkappa_N^{1-2\nu} = \varkappa_N^{2(1-\sigma_\nu)} = (\log N)^{-\frac{2(b+6)}{(\log N)^\delta}},$$

was für großes N nahe an Eins ist.

Wenn auch (2) von Linnik mehr als Nebenresultat seiner Untersuchungen angeführt wird, so wurde es immerhin z.B. im Enzyklopädieartikel von Hua erwähnt, und es ist vielleicht nicht überflüssig, einen Beweis für den Satz zu geben. Wir beweisen den Satz allerdings nur mit einem größeren Exponenten als $b+6$. 1968 erzielten Halász und Turán einen wesentlichen Fortschritt bei der Abschätzung von $N(\sigma, T)$ in der Nähe von $\sigma = 1$ indem sie zeigten, daß für eine genügend kleine Konstante $\eta > 0$ für $1-\eta \leqslant \sigma \leqslant 1$

$$N(\sigma, T) \ll T^{(1-\sigma)^{3/2}(\log 1/(1-\sigma))^3}$$

gilt. Weitere Verbesserungen wurden von Montgomery erzielt. Wir verwenden aus Montgomery's bahnbrechendem Buch [2] die Abschätzung

$$N(\sigma, T) \ll T^{167(1-\sigma)^{3/2}}(\log T)^{17}. \tag{3}$$

Nach dem Vorgang von Linnik teilen wir den Streifen $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ in $[\log^2 N]$ Teilstreifen $\sigma_\nu - 1/[\log^2 N] \leqslant \sigma \leqslant \sigma_\nu$, $\nu \leqslant \log^2 N$. In der Bezeichnung

von I hat man dann, wenn jetzt $S_1(\alpha)$ mit den Nullstellen ϱ der Zetafunktion gebildet ist,

$$S_1(\alpha) = \sum_\nu S_1^{(\nu)}(\alpha),$$

wobei in

$$S_1^{(\nu)}(\alpha) = \sum_{\varrho_\nu} \frac{\Gamma(\varrho_\nu)}{x^{\varrho_\nu}}$$

über die $\varrho = \varrho_\nu$ mit $\sigma_\nu - 1/[\log^2 N] < \operatorname{Re}\varrho_\nu \leqslant \sigma_\nu$ summiert wird. Wir setzen nun $\delta = 1/(\log N)^A$ mit einer später zu bestimmenden positiven Konstanten A, $A > 1$. Dann gilt

$$\int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll \log^2 N \cdot \sum_\nu \int_{-\delta}^{\delta} |S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha. \tag{4}$$

Wie in I, § 5, Formel (12) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} |S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha & \\ \ll \int_0^{4/N} |S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha + \sum_r \sum_{\gamma_1>0} \sum_{\gamma_2>0} & (\gamma_1+1)^{\beta_1-\frac{1}{2}}(\gamma_2+1)^{\beta_2-\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{2^r}\right)^{-\beta_1-\beta_2+1} \times \\ & \times \min\left\{\frac{1}{|1-\beta_1-\beta_2|+|\gamma_1-\gamma_2|}, 1\right\} e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r} \end{aligned} \tag{5}$$

mit

$$\lambda_r = \operatorname{arctg}(1/2\pi N\delta_r), \qquad \delta_r = \delta/2^{r-1},$$

wobei aber jetzt nur über die Nullstellen aus $\sigma_\nu - 1/[\log^2 N] < \sigma \leqslant \sigma_\nu$ summiert wird und über alle r mit $\delta/2^r \geqslant 4/N$.

Nach I, § 4, (9) hat man für $0 \leqslant \alpha \leqslant 4/N$

$$S_1^{(\nu)}(\alpha) \ll \sum_{\gamma \geqslant 0} N^{\sigma_\nu}\gamma^{\sigma_\nu-\frac{1}{2}}e^{-\gamma C}$$

mit $0 < C < \operatorname{arctg}(1/8\pi)$. Weiter gilt

$$\sum_{\gamma > (2/C)\log N} \gamma^{\sigma_\nu-\frac{1}{2}}e^{-\gamma C} \ll \sum_{n > (2/C)\log N} N^{-1}n^{1/2}\log n \cdot e^{-\frac{1}{2}nC} \ll N^{-1}$$

und

$$\sum_{\gamma \leqslant (2/C)\log N} N^{\sigma_\nu}\gamma^{\sigma_\nu-\frac{1}{2}}e^{-\gamma C} \ll N^{\sigma_\nu} \ll N^{1-\frac{c_1}{\log\log N}}$$

denn für $|\gamma| \leqslant T$, $\varrho = \beta + i\gamma$, ist $\beta \leqslant 1 - \dfrac{c_2}{\log T}$ nach den Sätzen von Hadamard und de la Vallée-Poussin über die Nullstellen der Zetafunktion.

Somit ergibt sich

$$\int_0^{4/N} |S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha \ll N e^{-c_1 \frac{\log N}{\log\log N}}.$$

Sei nun zunächst $\sigma_\nu \leqslant \frac12$. Dann ist in (5)

$$(\gamma_1+1)^{\beta_1-\frac12}\leqslant 1,\quad (\gamma_2+1)^{\beta_2-\frac12}\leqslant 1 \quad\text{und}\quad (\delta/2^r)^{1-\beta_1-\beta_2}\leqslant 1,$$

so daß man wie in I, § 6 schließen kann

$$(6)\qquad \int_{-\delta}^{\delta}\Big|\sum_{\sigma_\nu\leqslant\frac12} S_1^{(\nu)}(\alpha)\Big|^2 d\alpha \ll N\delta\log^3 N.$$

Sei nun $\sigma_\nu>\frac12$. Mit $X_r = N\delta_r B\log N$ mit einer großen Konstanten B erhält man, daß die innere Summe aus (5) unterhalb der folgenden Schranke bleibt

$$(7)\qquad \ll\Big(\sum_{0<\gamma_1\leqslant X_r}+\sum_{\gamma_1>X_r}\Big)(\gamma_1+1)^{\sigma_\nu-\frac12}\sum_{0<\gamma_2\leqslant\gamma_1}(\gamma_2+1)^{\sigma_\nu-\frac12}\times$$
$$\times\Big(\frac{\delta}{2^r}\Big)^{1-2\sigma_\nu}\min\Big\{\frac{1}{|\gamma_1-\gamma_2|},1\Big\}e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r}$$

da ja wegen $4/N<\delta/2^r\leqslant 1/(\log N)^A$ jedenfalls

$$\Big(\frac{\delta}{2^r}\Big)^{1/[\log^2 N]}\ll 1$$

gilt. Nun hat man

$$(8)\qquad \sum_{0<\gamma_1\leqslant X_r}(\gamma_1+1)^{\sigma_\nu-\frac12}\sum_{0<\gamma_2\leqslant\gamma_1-1}(\gamma_2+1)^{\sigma_\nu-\frac12}\frac{1}{|\gamma_1-\gamma_2|}e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r}$$
$$\ll\sum_{0<\gamma_1\leqslant X_r}X_r^{2\sigma_\nu-1}(\log X_r)^2\ll N(\sigma_\nu,X_r)X_r^{2\sigma_\nu-1}(\log X_r)^2$$

wegen

$$\sum_{0<\gamma_2\leqslant\gamma_1-1}\frac{1}{|\gamma_2-\gamma_1|}\ll\log^2\gamma_1.$$

Ferner hat man wegen $\sigma_\nu\leqslant 1$

$$(9)\qquad \sum_{\gamma_1>X_r}(\gamma_1+1)^{\sigma_\nu-\frac12}\sum_{0<\gamma_2\leqslant\gamma_1}(\gamma_2+1)^{\sigma_\nu-\frac12}e^{-\gamma_1\lambda_r}$$
$$\ll\sum_{\gamma_1>X_r}\gamma_1 N(\sigma_\nu,\gamma_1)e^{-\frac12\gamma_1\lambda_r}\cdot e^{-\frac12 X_r\lambda_r}$$
$$\ll e^{-\frac12 B\log N}\sum_{\gamma_1>X_r}\gamma_1^2\log\gamma_1 e^{-\frac12\gamma_1\lambda_r}\ll e^{-\frac12 B\log N}$$

mit genügend großem, konstantem B. Insgesamt folgt

$$(10)\qquad \int_{-\delta}^{\delta}|S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha+O\big(Ne^{-c_1\frac{\log N}{\log\log N}}\big)$$
$$\ll\sum_r\Big(\frac{\delta}{2^r}\Big)^{1-2\sigma_\nu}X_r^{2\sigma_\nu-1}N(\sigma_\nu,X_r)(\log X_r)^2$$
$$\ll N^{2\sigma_\nu-1}(\log N)^{(2\sigma_\nu-1)}\sum_r N(\sigma_\nu,X_r)\log^2 X_r.$$

Es werde nun (1) als richtig angenommen. Dann ist dieser Ausdruck

$$\ll N(\log N)^{b+4}\sum_r\Big(\frac{\delta}{2^r}\Big)^{2(1-\sigma_\nu)}.$$

Sei nun $1-\sigma_\nu\geqslant\eta$ wobei die Konstante η, $\eta<\frac14$ später noch genauer bestimmt wird. Dann erhält man

$$(11)\qquad \int_{-\delta}^{\delta}|S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha\ll N\delta^{2\eta}(\log N)^{b+4},$$

wobei die Konstante in $\ll$ von η abhängen kann. Für $1-\sigma_\nu\leqslant\eta$ verwenden wir (3) und erhalten aus (10)

$$(12)\qquad \int_{-\delta}^{\delta}|S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha+O\big(Ne^{-c_1\frac{\log N}{\log\log N}}\big)$$
$$\ll N^{2\sigma_\nu-1}(\log N)^3\sum_r\Big(N\frac{\delta}{2^r}\log N\Big)^{167(1-\sigma_\nu)^{3/2}}(\log N)^{17}$$
$$\ll N^{1-\alpha_\nu}\delta^{167(1-\sigma_\nu)^{3/2}}(\log N)^{21}$$

mit

$$\alpha_\nu=2(1-\sigma_\nu)-167(1-\sigma_\nu)^{3/2}=(1-\sigma_\nu)\{2-167(1-\sigma_\nu)^{1/2}\}$$

etwa für

$$1-\sigma_\nu\leqslant 10^{-4};$$

der Ausdruck in der geschlungenen Klammer ist dann $>\frac14$. Man weiß nun nach Korobov (und unabhängig davon auch I. M. Vinogradov), daß

$$N(\sigma_\nu,X_r)=0$$

ist für

$$1-\sigma_\nu\leqslant\frac{1}{(\log N)^{\alpha}}$$

für $a > \frac{2}{3}$. Somit braucht man in (12) nur jene ν zu berücksichtigen, für die

$$1-\sigma_\nu > \frac{1}{(\log N)^a}$$

gilt. Wenn wir also etwa $\eta = 10^{-4}$ setzen, so hat man für

$$\frac{1}{(\log N)^a} < 1-\sigma_\nu \leqslant \eta$$

jedenfalls

$$\int_{-\delta}^{\delta} |S_1^{(\nu)}(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^{1-\frac{1}{4(\log N)^a}} (\log N)^{21} \ll N e^{-\frac{1}{5}(\log N)^{1-a}}. \tag{13}$$

Insgesamt erhält man aus (4), (6), (11) und (13)

$$\int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll N\delta^{2\eta}(\log N)^{b+8}.$$

Wie in § 1 schließt man dann, daß die Gleichung

$$|p+p'-N| < (\log N)^A$$

für alle großen N Lösungen in Primzahlen hat, sobald

$$A2\eta > b+8$$

gilt, d.h.

$$A > 5000(b+8);$$

dies alles unter der Annahme der Richtigkeit der Dichtehypothese (1).

Literaturverzeichnis

[1] Ю. В. Линник, *Некоторые условные теоремы касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха*, Изв. АНСССР, сер. матем. 16 (1952), S. 503–520.
[2] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
[3] K. Prachar, *Über den Primzahlsatz von A. Selberg*, Acta Arith. 28 (1975), S. 277–297.
[4] A. Selberg, *On the normal density of primes in small intervals and the difference of consecutive primes*, Arch. for Math. og Naturv. B, 47 (1943), No. 6.

Eingegangen 29. 6. 1974

ACTA ARITHMETICA
XXIX (1976)

On the non-linear sieve

by

J. W. Porter (Cardiff)

1. Introduction. In [8] Jurkat and Richert obtained definitive bounds for what may be called the linear sieve problem, and in [10] Richert used these bounds to obtain elegant results in various applications, including the distribution of almost-primes in the sequence of values taken by an irreducible polynomial. To date the best bounds available for the non-linear sieve problem, corresponding to the investigation of reducible polynomials in the above type of application, are those due to Ankeny and Onishi [1]. The present writer [9] investigated their bounds numerically and Halberstam and Richert [6] gave a detailed treatment of the applications. Hagedorn [4] also studied the properties of their bounds. It has been realized for some time (cf. Selberg [11]), that improvements on the bounds of Ankeny and Onishi could be obtained by means of an iterative technique based on the Buchstab identity ((2.7) below), and it is the purpose of this paper to give a detailed treatment of the first step in this iterative process and investigate some of the properties of the resultant improved bounds.

2. Notation and statement of results. We follow the notation of Halberstam and Richert ([6] and [7]).

Let $\mathscr{A}$ be a finite sequence of not necessarily distinct integers. For any integer d we denote by $\mathscr{A}_d$ the subsequence of $\mathscr{A}$ consisting of those elements divisible by d. We use $|\mathscr{A}|$ and $|\mathscr{A}_d|$ to denote the number of elements of $\mathscr{A}$ and $\mathscr{A}_d$ respectively.

Further, let $\mathscr{P}$ be a set of primes and denote by $\overline{\mathscr{P}}$ the complement of $\mathscr{P}$ in the set of all primes. For any $z \geqslant 2$ we write

$$P(z) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p<z}} p.$$

We define the sifting function $S(\mathscr{A}_q; \mathscr{P}, z)$ for $z \geqslant 2$ and an integer q satisfying (i) $\mu(q) \neq 0$, (ii) $(q, P(z)) = 1$, (iii) $(q, p) = 1$ for all $p \in \overline{\mathscr{P}}$ by

$$S(\mathscr{A}_q; \mathscr{P}, z) = \left|\{a \in \mathscr{A}_q; (a, P(z)) = 1\}\right|.$$