Conspectus materiae tomi XXIX, fasciculi 3

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange | Address of the Editorial Board and of the exchange | Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches | Адрес редакци и книгообмен

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W

ACTA ARITHMETICA
XXIX (1976)

Nombres normaux et processus déterministes

par

G. Rauzy (Marseille)

Introduction. Soit r un entier supérieur ou égal à 2, et soit $B(r)$ l'ensemble des nombres r-normaux, c'est-à-dire des nombres réels α tels que la suite $(\alpha r^n)_{n\in N}$ soit équirépartie modulo 1. Nous nous proposons ici de répondre à une question posée par Mendès-France [6], à savoir: *caractériser l'ensemble $B^{\perp}(r)$ des nombres réels β tels que*:

$$\alpha\in B(r)\qquad \forall\alpha+\beta\in B(r).$$

Introduisons pour cela une définition: soit R l'ensemble $\{0,\ldots,r-1\}$ et pour tout entier $s\in\mathbf{N}$, soit E_s l'ensemble des fonctions de R^s dans R. Si γ est un nombre réel de développement r-aire:

$$\gamma=[\gamma]+\sum_{n=0}^{\infty}c_n/r^{n+1},$$

où $c_n\in R$ et n'est pas égal à $r-1$ à partir d'un certain rang, nous définissons pour $N\in\mathbf{N}$ les quantités:

$$\beta_s(\gamma,N)=\inf_{\varphi\in E_s}\frac{1}{N}\sum_{n<N}\inf\bigl(1,|c_n-\varphi(c_{n+1},\ldots,c_{n+s})|\bigr),$$

$$\underline{\beta}_s(\gamma)=\varliminf_{N\to\infty}\beta_s(\gamma,N),\qquad \bar{\beta}_s(\gamma)=\varlimsup_{N\to\infty}\beta_s(\gamma,N),$$

$$\underline{\beta}(\gamma)=\lim_{s\to\infty}\underline{\beta}_s(\gamma),\qquad \bar{\beta}(\gamma)=\lim_{s\to\infty}\bar{\beta}_s(\gamma)$$

(les limites définissant $\underline{\beta}$ et $\bar{\beta}$ existent bien, car il résulte immédiatement de la définition que $\beta_s(\gamma,N)$ donc $\bar{\beta}_s(\gamma)$ et $\underline{\beta}_s(\gamma)$ sont décroissants en s).

Nous nommerons $\underline{\beta}(\gamma)$ et $\bar{\beta}(\gamma)$ respectivement le *bruit inférieur* et le *bruit supérieur* du nombre γ en base r.

Nous nous proposons alors de montrer le résultat suivant:

Théorème. (i) *Quel que soit $\gamma\in\mathbf{R}$, $0\leqslant\underline{\beta}(\gamma)\leqslant\bar{\beta}(\gamma)\leqslant(r-1)/r$, et le nombre γ appartient à $B(r)$ si et seulement s'il est de "bruit maximum" c'est-à-dire, si et seulement si*:

$$\underline{\beta}(\gamma)=(r-1)/r.$$

(ii) *γ appartient à $B^{\perp}(r)$ si et seulement si, il est de "bruit nul" c'est-à-dire si et seulement si*:

$$\bar{\beta}(\gamma) = 0.$$

Dans ce dernier cas, nous dirons que *γ est r-déterministe* pour exprimer l'idée que $\bar{\beta}(\gamma) = 0$, si et seulement si, quand $s \to \infty$, la donnée de $(c_{n+1}, \ldots, c_{n+s})$ "détermine" en moyenne, celle de c_n.

Remarque. L'idée intuitive que l'on se fait du déterminisme consisterait à prévoir le présent à partir du passé, plutôt qu'à partir de l'avenir, et, il semblerait à priori plus naturel d'introduire des fonctions β' du type:

$$\beta_s'(\gamma, N) = \inf_{\varphi \in E_s} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \inf(1, |c_{n+s} - \varphi(c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+s-1})|).$$

Néanmoins, il est aisé de voir, que le résultat énoncé subsiste quand on effectue cette modification. D'autre part, nous allons dans ce qui suit, lier cette notion de nombre déterministe à celle de processus déterministe, où, la définition correspondant au choix des fonctions β s'introduit de manière plus naturelle que celle qui correspondrait au choix des fonctions β'. Il est à noter, du reste, que dans des cas plus généraux, les deux définitions ne coïncident pas nécessairement (voir par exemple [4]).

1. Notations

1.1. Processus. Quelque soit l'espace métrique compact Σ considéré, nous appellerons T la transformation de $\Sigma^{\mathbf{N}}$ dans lui-même, qui à $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe $Tx = (x_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

$\Sigma^{\mathbf{N}}$ étant muni de la topologie produit (donc, compact métrisable), T est une application continue de $\Sigma^{\mathbf{N}}$ sur lui-même.

Nous noterons $C(\Sigma^{\mathbf{N}})$ l'ensemble des fonctions continues (au sens de cette topologie) de $\Sigma^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{C}$, et par abus de langage, $C(\Sigma^s)$ (s entier $\geqslant 0$) l'ensemble des fonctions f de $C(\Sigma^{\mathbf{N}})$ telles que:

$$f(x) = \varphi(x_0, \ldots, x_{s-1})$$

où φ est une fonction continue de Σ^s dans $\mathbf{C}$.

Un *processus* sur $\Sigma^{\mathbf{N}}$ sera défini par la donnée d'une mesure μ sur $\Sigma^{\mathbf{N}}$ borélienne, positive, de masse totale 1 et *invariante*, c'est-à-dire telle que:

$$\forall f \in C(\Sigma^{\mathbf{N}}) \quad \mu(f) = \mu(f \circ T).$$

1.2. Disjonction. Soient Σ_1 et Σ_2 deux espaces métriques compacts et soit $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$.

Si $f \in C(\Sigma_1^{\mathbf{N}})$, $g \in C(\Sigma_2^{\mathbf{N}})$ nous désignons par $f \otimes g$ l'élément de $C(\Sigma^{\mathbf{N}})$ qui $z = (x, y)$ ($x \in \Sigma_1^{\mathbf{N}}$, $y \in \Sigma_2^{\mathbf{N}}$) associe:

$$(f \otimes g)(z) = f(x)g(y).$$

L'espace vectoriel engendré par les fonctions $f \otimes g$ quand f et g parcourent respectivement $C(\Sigma_1^{\mathbf{N}})$ et $C(\Sigma_2^{\mathbf{N}})$ est dense au sens de la convergence uniforme dans $C(\Sigma^{\mathbf{N}})$, de sorte que, si μ_1 et μ_2 sont deux mesures boréliennes sur $\Sigma_1^{\mathbf{N}}$ et $\Sigma_2^{\mathbf{N}}$ on définit sans ambiguité une mesure borélienne $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $\Sigma^{\mathbf{N}}$ en posant:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(f \otimes g) = \mu_1(f)\mu_2(g).$$

Evidemment, si μ_1 et μ_2 sont invariantes, il en est de même de μ. Inversement étant donnée une mesure borélienne ν sur $\Sigma^{\mathbf{N}}$, nous noterons $\nu|_1$ et $\nu|_2$ les mesures boréliennes sur $\Sigma_1^{\mathbf{N}}$ et $\Sigma_2^{\mathbf{N}}$ définies par:

$$\forall f \in C(\Sigma_1^{\mathbf{N}}) \quad \nu|_1(f) = \nu(f \otimes 1) \quad \text{et} \quad \forall g \in C(\Sigma_2^{\mathbf{N}}) \quad \nu|_2(g) = \nu(1 \otimes g)$$

en désignant par 1, indifféremment, la fonction constante égale à 1 de $\Sigma_2^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{C}$ dans le premier cas et de $\Sigma_1^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{C}$ dans le second.

Soient alors deux mesures μ_1 et μ_2 définissant respectivement des processus sur $\Sigma_1^{\mathbf{N}}$ et $\Sigma_2^{\mathbf{N}}$. Nous dirons que *les processus ainsi définis (et, par abus de langage, les mesures correspondantes) sont disjoints, si pour toute mesure ν définissant un processus sur $\Sigma^{\mathbf{N}}$*:

$$\nu|_1 = \mu_1 \ \text{et}\ \nu|_2 = \mu_2 \Rightarrow \nu = \mu_1 \otimes \mu_2.$$

1.3. Lemme 1. *Soient données comme précédemment, deux mesures μ_1 sur $\Sigma_1^{\mathbf{N}}$ et μ_2 sur $\Sigma_2^{\mathbf{N}}$ définissant des processus sur $\Sigma_1^{\mathbf{N}}$ et $\Sigma_2^{\mathbf{N}}$. Supposons que, μ_1 soit la mesure produit $P^{\mathbf{N}}$ où P est une mesure borélienne positive de masse totale 1 sur Σ_1, non dégénérée (c'est-à-dire non concentrée en un point), et que l'ensemble Σ_2 soit fini. Il y a alors équivalence entre les deux propriétés suivantes*:

(i) *μ_1 et μ_2 sont disjointes,*

(ii) *le processus (ou par abus de langage la mesure) défini par μ_2 est déterministe, c'est-à-dire d'entropie nulle.*

Pour la définition de l'entropie d'un processus, ainsi que pour la démonstration de ce lemme, nous renvoyons à l'article de Kamae [3] "Subsequences of normal numbers" qui comporte de nombreuses références, ainsi que les théorèmes essentiels utilisés ici.

Une légère modification de la démonstration du lemme 3.1 de cet article (qui ne s'applique que dans le cas où $\Sigma_2 = \{0, 1\}$) est nécessaire pour démontrer que la condition (i) implique la condition (ii). On peut également utiliser ce lemme, tel quel, en tenant compte de la remarque, sur les suites stationnaires prenant les valeurs 0 ou 1, qui suit la démonstration du lemme I.1 de la première partie de [2].

1.4. Mesures associées. Σ désignant toujours un espace métrique compact, soit $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $\Sigma^{\mathbf{N}}$. Reprenant, les notations de l'article déjà cité de Kamae, nous dirons qu'une partie infinie S de N appartient à Ξ_c si par définition, quel que soit $f \in C(\Sigma^N)$, la limite lorsque N tend vers l'infini, en restant dans S, de la quantité $\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T^n c)$ existe. Nous noterons $\mu_c^S(f)$ cette limite, définissant ainsi une mesure μ_c^S borélienne, positive, de masse totale 1, évidemment invariante par T.

Une mesure μ sera dite, associée à c, s'il existe $S \in \Xi_c$ tel que: $\mu = \mu_c^S$.

Un élément de Σ^N sera dit déterministe (au sens de B. Weiss), si toute mesure qui lui est associée est déterministe.

Il est à noter que l'hypothèse Σ métrique compact, implique l'existence d'une suite dénombrable dense dans $C(\Sigma^N)$. Il en résulte qu'une mesure est associée à c, si et seulement si, elle est valeur d'adhérence au sens de la convergence faible de la suite de mesures $\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N}\delta_{T^n c}\right)_{N\in N}$.

2. Plan de la démonstration

2.1. Dans le paragraphe 3, nous nous intéressons aux liens entre le bruit d'un nombre réel γ et les processus (ou mesures) associés dans R^N, à la suite $c = (c_n)_{n\in N}$ des chiffres en base r de la partie fractionnaire de γ. Nous démontrerons ainsi, la partie (i) du théorème, ainsi que le lemme suivant:

Lemme 2. *γ est r-déterministe (au sens de la définition donnée dans l'introduction), si et seulement si, tout processus associé à c est déterministe (c'est-à-dire si c est déterministe au sens de B. Weiss).*

Nous donnerons également un exemple de nombre déterministe

2.2. Dans le paragraphe 4, nous démontrons le lemme suivant:

Lemme 3. *$\beta \in B^\perp(r)$, si et seulement si, pour tout $a \in B(r)$, on a en désignant par $a = (a_n)_{n\in N}$, $b = (b_n)_{n\in N}$ les suites des chiffres en base r de la partie fractionnaire de a et β respectivement:*

$$\forall S \in \Xi_{(a,b)} \quad \mu_{(a,b)}^S = \mu_a^S \otimes \mu_b^S.$$

2.3. Enfin, dans le paragraphe 5, nous en déduisons, en utilisant un lemme démontré par Kamae dans l'article déjà cité, une autre caractérisation de $B^\perp(r)$.

Lemme 4. *$\beta \in B^\perp(r)$, si et seulement si, toute mesure associée (au sens de la définition du paragraphe 1.4), à $b = (b_n)_{n\in N}$ (mêmes notations que dans le lemme précédent) est disjointe de la mesure $\lambda = P^N$ sur R^N où P est la mesure sur R telle que:*

$$\forall i \in R \quad P(\{i\}) = 1/r.$$

D'après le lemme 1, cette condition est réalisée si et seulement si toute mesure associée à b est déterministe, donc, si et seulement si, β est r-déterministe en vertu du lemme 2. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. Des résultats tout à fait analogues pourraient être obtenus en remplaçant l'addition dans $\boldsymbol{R}$ par une addition dans R^N (par exemple, en identifiant R^N au groupe $(\boldsymbol{Z}/r\boldsymbol{Z})^N$ ou au groupe $\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{Z}/r^k\boldsymbol{Z})$, avec dans ce cas une difficulté supplémentaire provenant du fait que l'addition ne commute pas avec T).

3. Processus et r-déterminisme

3.1. Soit γ un nombre réel, c la suite des chiffres en base r de sa partie fractionnaire, S un élément de Ξ_c et $\mu = \mu_c^S$ la mesure associée.

Nous allons montrer que lorsque N tend vers l'infini en restant dans S, $\beta_s(\gamma, N)$ a une limite et exprimer cette limite en fonction de μ.

Posons pour $x = (x_n)_{n\in N} \in R^N$, et $\varphi \in E_s$:

$$\varrho(x, \varphi) = \inf\big(1, |x_0 - \varphi(x_1, \ldots, x_s)|\big)$$

et soit:

$$\beta_s(\gamma, N, \varphi) = \frac{1}{N}\sum_{n<N}\inf\big(1, |c_n - \varphi(c_{n+1}, \ldots, c_{n+s})|\big).$$

La fonction qui à x associe $\varrho(x, \varphi)$ est continue, et, par ailleurs:

$$\beta_s(\gamma, N, \varphi) = \frac{1}{N}\sum_{n<N}\varrho(T^n c, \varphi).$$

Par définition de μ, on en déduit, que lorsque N tend vers l'infini en restant dans S:

$$\beta_s(\gamma, N, \varphi) \to \int \varrho(x, \varphi)\,d\mu(x).$$

Il en résulte alors immédiatement que dans les mêmes conditions:

$$\beta_s(\gamma, N) \to \inf_{\varphi\in E_s}\int \varrho(x, \varphi)\,d\mu(x) \tag{3.1}$$

(car E_s est fini).

3.2. Pour tout $s \in \boldsymbol{N}$, et tout $(s+1)$-uplet $(x_0, \ldots, x_s) \in R^{s+1}$, soit $A(x_0, \ldots, x_s)$ l'ensemble des $z = (z_n)_{n\in N} \in R^N$ tels que $z_0 = x_0, \ldots, z_s = x_s$ et soit:

$$p(x_0, \ldots, x_s) = \mu\big(A(x_0, \ldots, x_s)\big).$$

Par suite de l'invariance de μ, on a évidemment:

$$p(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i\in R} p(i, x_1, \ldots, x_s).$$

Soit alors $B(s)$ l'ensemble des s-uplets $(x_1, \ldots, x_s)$ tels que $p(x_1, \ldots, x_s) \neq 0$ et pour $(x_1, \ldots, x_s) \in B(s)$ et $i \in R$ posons:

$$p(i| x_1, \ldots, x_s) = p(i, x_1, \ldots, x_s)/p(x_1, \ldots, x_s).$$

Avec ces notations, on a alors:

$$(3.2)\quad \inf_{\varphi\in E_s}\int \varrho(x,\varphi)\,d\mu(x) = \sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)\big(1-\sup_{i\in R} p(i|\ x_1,\dots,x_s)\big).$$

En effet, on a:

$$\int \varrho(x,\varphi)\,d\mu(x) = \sum_{(x_0,\dots,x_s)\in R^{s+1}} p(x_0,\dots,x_s)\inf\big(1,\,|x_0-\varphi(x_1,\dots,x_s)|\big)$$

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)\sum_{i\in R} p(i|\ x_1,\dots,x_s)\inf\big(1,\,|i-\varphi(x_1,\dots,x_s)|\big).$$

Tenant compte du fait que $\inf\big(1,\,|i-\varphi(x_1,\dots,x_s)|\big)$ est nul si $i=\varphi(x_1,\dots,x_s)$, égal à 1 sinon.

$$\int \varrho(x,\varphi)\,d\mu(x) = \sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)\Big(1-p\big(\varphi(x_1,\dots,x_s)|\ x_1,\dots,x_s\big)\Big)$$

d'où on déduit aisément la formule (3.2). Remarquons que la fonction φ pour laquelle la borne inférieure est atteinte est celle qui associe à $(x_1,\dots,x_s)$, un quelconque des $i\in R$ maximisant $p(i|\ x_1,\dots,x_s)$.

3.3. Montrons maintenant la partie (i) du théorème. Tout d'abord, en prenant pour φ la fonction constante égale à i, où i est un élément de R maximisant $\operatorname{card}\{n<N,\ c_n=i\}$, ce nombre est supérieur ou égal à N/r, donc pour cette fonction φ:

$$\beta_s(\gamma,N,\varphi)\leqslant (r-1)/r$$

et on en déduit bien: $0\leqslant \underline{\beta}(\gamma)\leqslant \bar{\beta}(\gamma)\leqslant (r-1)/r$.

Supposons alors $\gamma\in B(r)$, c'est-à-dire $\mathbf{N}\in\Xi_c$, la mesure μ associée étant telle que:

$$\forall (x_0,\dots,x_s)\in R^{s+1}\qquad p(x_0,\dots,x_s)=1/r^{s+1}.$$

Les formules (3.1) et (3.2) montrent alors que:

$$\forall s\in\mathbf{N}\quad \underline{\beta}_s(N)=\bar{\beta}_s(N)=(r-1)/r,\qquad \text{d'où}\quad \underline{\beta}(\gamma)=\bar{\beta}(\gamma)=(r-1)/r.$$

Réciproquement si γ n'est pas r-normal, un raisonnement diagonal montre l'existence d'une mesure μ associée à c qui soit différente de la mesure produit $P^{\mathbf{N}}$.

Pour cette mesure μ, il existe donc un entier s et un s-uplet

$$(x_1^{(0)},\dots,x_s^{(0)})\in B(s)$$

tel que $p(i|\ x_1^{(0)},\dots,x_s^{(0)})$ ne soit pas égal à $1/r$ pour tout i, et donc que:

$$\sup_{i\in R} p(i|\ x_1^{(0)},\dots,x_s^{(0)})>1/r.$$

Les formules (3.1) et (3.2) permettent d'en déduire:

$$\underline{\beta}(\gamma)\leqslant \underline{\beta}_s(\gamma)<(r-1)/r.$$

3.4. Démonstration du lemme 2. Les formules (3.1) et (3.2) montrent *que si γ est r-déterministe*, pour toute mesure μ associée à c

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)\big(1-\sup_{i\in R} p(i|\ x_1,\dots,x_s)\big)=0.$$

Réciproquement, *si γ n'est pas r-déterministe, on peut construire par raisonnement diagonal une mesure μ associée à c telle* que cette limite soit non nulle.

En effet, si $\bar{\beta}(\gamma)=\delta>0$, $\bar{\beta}_s(\gamma)\geqslant\delta$ pour tout entier s, d'où l'existence pour tout entier M et tout entier s, d'un entier $N>M$ tel que: $\beta_s(\gamma,N)\geqslant\delta/2>0$. On peut ainsi fabriquer une suite strictement croissante $(N(s))_{s\in\mathbf{N}}$ telle que:

$$\forall s\in\mathbf{N}\,\forall t\in\mathbf{N}\qquad t\geqslant s\Rightarrow \beta_s\big(\gamma,N(t)\big)\geqslant\delta/2.$$

L'ensemble S_0 des N de la forme $N(s)$ pour un $s\in\mathbf{N}$ est infini, et pour tout $s\in\mathbf{N}$

$$\overline{\lim_{N\in S_0}}\,\beta_s(\gamma,N)\geqslant\delta/2.$$

Il suffit alors de prendre $S\subset S_0$, $S\in\Xi_c$ pour obtenir pour la mesure μ associée:

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)\big(1-\sup_{i\in R} p(i|\ x_1,\dots,x_s)\geqslant\delta/2>0.$$

Il résulte de ce qui précède, qu'il suffit de montrer pour l'une quelconque des mesures μ associée à c l'équivalence:

$$h_\mu(T)=0\Leftrightarrow\lim_{s\to\infty}\sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)\big(1-\sup_{i\in R} p(i|\ x_1,\dots,x_s)\big)=0$$

où $h_\mu(T)$ désigne l'entropie de T définie par la formule:

$$h_\mu(T)=\lim_{s\to\infty}\sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)H(x_1,\dots,x_s)$$

où $H(x_1,\dots,x_s)=\sum_{i\in R}\eta\big(p(i|\ x_1,\dots,x_s)\big)$, η étant la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, nulle en 0, égale à $-u\operatorname{Log}u$ pour $u\neq0$.

Posant $K(x_1,\dots,x_s)=1-\sup_{i\in R} p(i|\ x_1,\dots,x_s)$, il suffit donc de montrer:

$$(3.4)\qquad \lim_{s\to\infty}\sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)H(x_1,\dots,x_s)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{s\to\infty}\sum_{(x_1,\dots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\dots,x_s)K(x_1,\dots,x_s)=0.$$

Quand u tend vers 0 ou vers 1, $\eta(u)$ tend vers 0. D'autre part, si r nombres positifs ou nuls ont pour somme 1, et si l'un d'entre eux est supérieur à $1-\varepsilon$ (où $0<\varepsilon<1/2$) tous les autres sont inférieurs à ε.

Il en résulte, étant donné $\varepsilon>0$, l'existence d'un $\delta>0$ tel que:

(3.4-1) $$\forall s\in\boldsymbol{N}\,\forall(x_1,\ldots,x_s)\in B(s)\quad K(x_1,\ldots,x_s)<\delta\Rightarrow H(x_1,\ldots,x_s)<\varepsilon/2.$$

De la même manière, on montrerait que on peut choisir δ tel que:

(3.4-2) $$\forall s\in\boldsymbol{N}\,\forall(x_1,\ldots,x_s)\in B(s)\quad H(x_1,\ldots,x_s)<\delta\Rightarrow K(x_1,\ldots,x_s)<\varepsilon/2.$$

Remarquons d'autre part que H et K sont bornés par $C=\sup(1,\operatorname{Log} r)$.

Supposons alors que pour un $s\in\boldsymbol{N}$ on ait:

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B(s)} p(x_1,\ldots,x_s)H(x_1,\ldots,x_s)<\varepsilon\delta/2C.$$

Si B_1 est l'ensemble des s-uplets de $B(s)$ tels que $H(x_1,\ldots,x_s)<\delta$, et B_2 est son complémentaire dans $B(s)$, on a d'après (3.4-1):

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B_1} p(x_1,\ldots,x_s)K(x_1,\ldots,x_s)<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B_1} p(x_1,\ldots,x_s)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B_2} p(x_1,\ldots,x_s)K(x_1,\ldots,x_s)\leqslant C\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B_2} p(x_1,\ldots,x_s)$$

et

$$C\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B_2} p(x_1,\ldots,x_s)\leqslant\frac{C}{\delta}\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B_2} p(x_1,\ldots,x_s)H(x_1,\ldots,x_s)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit alors:

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in B} p(x_1,\ldots,x_s)H(x_1,\ldots,x_s)<\varepsilon.$$

De la même manière, on déduirait des inégalités en sens inverse, ce qui par passage à la limite démontre l'équivalence (3.4) ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Remarque. On aurait pu également montrer cette équivalence en utilisant le fait qu'une mesure μ est déterministe, si et seulement si, la fonction de $C(R^{\boldsymbol{N}})$ qui à $x=(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ associe x_0, appartient à la clôture dans $L^1(\mu)$ de l'espace engendré par les fonctions qui à x associent x_n pour $n\geqslant 1$ ("l'avenir"), c'est-à-dire si et seulement si:

$$\inf_{\varphi\in E_s}\int|x_0-\varphi(x_1,\ldots,x_s)|\,d\mu(x)\to 0\quad\text{quand}\quad s\to\infty.$$

3.5. Exemple. Supposons que, la suite $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ soit presque périodique au sens de Besicovitch [1]. Il résulte alors des résultats de Kamae d'une part [3], et de Mendès-France et Daboussi [1], d'autre part, que γ est r-déterministe (au moins dans le cas $r=2$). Montrons-le directement: si Φ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire s'il existe des nombres complexes $(a_k)_{k=1,\ldots,p}$ et des nombres réels $(\gamma_k)_{k=1,\ldots,p}$ tels que:

$$\forall n\in\boldsymbol{N}\quad \Phi(n)=\sum_{k=1}^{p}a_k e(\lambda_k n)\quad\text{où}\quad e(x)=e^{2i\pi x}$$

il est aisé de voir que à tout $\varepsilon>0$ on peut associer un entier $s\geqslant 1$ de manière que

$$\forall n\in\boldsymbol{N}\quad |\Phi(n)-\Phi(n+s)|<\varepsilon.$$

Par passage à la limite, il en résulte que si $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est presque périodique au sens de Besicovitch, à tout $\varepsilon>0$ on peut associer un entier $s\geqslant 1$ tel que:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n<N}|c_n-c_{n+s}|<\varepsilon.$$

Il en résulte immédiatement que si $\gamma=\sum_{n=0}^{\infty}c_n/r^{n+1}$, γ est r-déterministe.

4. Démonstration du lemme 3

4.1. Soient α et β réels et soient p et q des entiers tels que $p\neq 0$. Si $\alpha\in B(r)$, il résulte du critère de Weyl que $p\alpha$ appartient aussi à $B(r)$. (Ce résultat reste d'ailleurs valable quand p est un nombre rationnel, [5].) D'autre part, $B^{\perp}(r)$ est par définition même un groupe additif (et même un $\boldsymbol{Q}$ espace vectoriel vu le résultat de Maxfield cité plus haut).

Il en résulte que: $\alpha\in B(r)$, $\beta\in B^{\perp}(r)\Rightarrow p\alpha+q\beta\in B(r)$ en particulier, d'après le critère de Weyl:

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N}e\big(r^n(p\alpha+q\beta)\big)\to 0\quad\text{quand}\quad N\to\infty.$$

Désignant par e_p la fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{C}$ telle que: $e_p(x)=e(px)$ il en résulte encore que si $\alpha\in B(r)$ et $\beta\in B^{\perp}(r)$:

$$\forall p,q\in\boldsymbol{Z}\quad \frac{1}{N}\sum_{n<N}e_p(r^n\alpha)e_q(r^n\beta)-\frac{1}{N}\sum_{n<N}e_q(r^n\beta)x\int_0^1 e_p(x)\,dx\to 0$$

quand $N\to\infty$.

Réciproquement, si cette condition est réalisée, le critère de Weyl montre que $\alpha+\beta\in B(r)$. L'espace vectoriel engendré par les fonctions $(e_p)_{p\in\boldsymbol{Z}}$ étant dense au sens de la convergence uniforme dans l'espace $C(\boldsymbol{T})$

des fonctions périodiques de période 1, continues de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{C}$ il en résulte par linéarité et passage à la limite l'équivalence:

(4.1) $\beta \in B(r)$ si et seulement si pour tout $\alpha \in B(r)$ $\forall f, g \in C(\boldsymbol{T})$

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(r^n\alpha)g(r^n\beta) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} g(r^n\beta)x\int_0^1 f(x)\,dx \to 0 \quad \text{quand} \quad N\to\infty.$$

4.2. Désignons par π la fonction de R^N dans $\boldsymbol{R}$ qui à $x = (x_n)_{n\in N}$ associe le nombre:

$$\pi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n/r^{n+1}$$

on a évidemment pour tout $x\in R^N$: $\pi(Tx) = r\pi(x)$ (mod1), en outre la fonction π est continue.

Supposons alors le nombre réel β tel que, pour tout $\alpha\in B(r)$ on ait avec les notations du lemme:

$$\forall S\in \Xi_{(a,b)} \qquad \mu^S_{(a,b)} = \mu^S_a \otimes \mu^S_b.$$

Si la quantité:

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(r^n\alpha)g(r^n\beta) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} g(r^n\beta)x\int_0^1 f(x)\,dx$$

ne tendait pas vers 0 pour un couple de fonctions f et g de $C(\boldsymbol{T})$, on en déduirait par raisonnement diagonal l'existence d'un $S\in \Xi_{(a,b)}$ tel que cette limite quand N tend vers l'infini en restant dans S soit non nulle.

Désignant par F et G les fonctions $f\circ\pi$ et $g\circ\pi$ on en déduirait une contradiction, car, par définition:

$$\lim_{\substack{N\in S\\ N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(r^n\alpha)g(r^n\beta) = \mu^S_{(a,b)}(F\otimes G),$$

$$\lim_{\substack{N\in S\\ N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n<N} g(r^n\beta) = \mu^S_b(G)$$

et puisque $\alpha\in B(r)$,

$$\mu^S_a(F) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Avec ces hypothèses, *il en résulte donc que $\beta\in B^\perp(r)$.*

4.3. Pour achever la démonstration du lemme, il nous faut montrer la réciproque, c'est-à-dire que: *si $\alpha\in B(r)$, $\beta\in B^\perp(r)$ et si $S\in\Xi_{(a,b)}$ on a pour tout couple F, G d'éléments de $C(R^N)$*:

(4.3) $$\mu^S_{(a,b)}(F\otimes G) = \mu^S_a(F)\mu^S_b(G).$$

Posons $\mu^S_{(a,b)} = \nu$, $\mu^S_a = \lambda$, $\mu^S_b = \mu$.

Remarquons, d'autre part, qu'en vertu de l'équivalence (4.1), l'égalité (4.3) est vraie, si il existe f et g appartenant à $C(\boldsymbol{T})$ et tels que:

$$F = f\circ\pi, \qquad G = g\circ\pi.$$

Dans une première étape, nous allons montrer que *l'égalité (4.3) reste vraie pour tout couple F, G d'éléments de $C(R^N)$ tels qu'il existe $g\in C(\boldsymbol{T})$ vérifiant $G = g\circ\pi$.*

$\bigcup_{s=0}^{\infty} C(R^s)$ étant dense au sens de la convergence uniforme dans $C(R^N)$, il suffit pour cela, de montrer que, si $F\in C(R^s)$ pour un entier $s\in\boldsymbol{N}$, et si $G = g\circ\pi$ avec $g\in C(T)$, l'égalité (4.3) est vérifiée.

Désignons alors par $W(F)$ l'ensemble des éléments x, $x = (x_n)_{n\in N}$ de R^N, tels qu'il existe $y = (y_n)_{n\in N}$ avec $\pi(x) = \pi(y)$ mais $F(x) \neq F(y)$.

$W(F)$ est évidemment contenu dans l'ensemble fini des éléments $c = (c_n)_{n\in N}$ tels que $c_n = 0$ pour $n\geqslant s$ ou $c_n = r-1$ pour $n\geqslant s$, et si f désigne la fonction de $\boldsymbol{R}$ dans C, périodique de période 1, telle que pour $u\in[0,1[$:

$$f(u) = \inf_{\pi(x)=u} F(x),$$

f est une fonction continue sauf peut-être aux points images par π de $W(F)$ et telle que:

$$\forall x\in R^N - W(F) \qquad F(x) = f\circ\pi(x).$$

Soit d'autre part, pour $k\in\boldsymbol{N}$ et $c\in R^N$, $A(k, c)$ l'ensemble des $x = (x_n)_{n\in N}$ de R^N tels que $x_n = c_n$, pour $n = 0, \ldots, k$ et soit $v_{k,c}$ la fonction caractéristique de $A(k, c)$.

Posant pour $u\in\boldsymbol{R}$

$$f_1(u) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(u+t)\,dt \quad \text{où} \quad \varepsilon > 0$$

est choisi suffisamment petit, on en déduit pour tout entier k, l'existence d'une fonction $F_1 = f_1\circ\varphi$ avec $f_1\in C(\boldsymbol{T})$ et telle que:

$$\forall x\in R^N \qquad |F_1(x) - F(x)| \leqslant \|F\| \sum_{c\in W(F)} v_{k,c}(x)$$

où $\|F\| = \sup_{x\in R^N} |F(x)|$.

En particulier,

$$F_1(x) = F(x) \quad \text{si} \quad x\notin \bigcup_{c\in W(F)} A(k, c).$$

Mais l'égalité (4.3) est vérifiée pour le couple F_1, G d'après ce qui précède.

D'autre part:

$$|\nu(F_1\otimes G)-\nu(F\otimes G)|\leqslant \nu(|F_1-F|\otimes\|G\|) = \|G\|\lambda(|F_1-F|)$$

de même:

$$|\lambda(F_1)\mu(G)-\lambda(F)\mu(G)|\leqslant \|G\|\lambda(|F_1-F|)$$

et on en déduit:

$$|\nu(F\otimes G)-\lambda(F)\mu(G)|\leqslant 2\,\|F\|\,\|G\|\sum_{c\in W(G)}\lambda(v_{k,c}).$$

Or $\lambda(v_{k,c}) = 1/r^k$, tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Par passage à la limite, on en déduit l'égalité (4.3) pour le couple F, G considéré ce qui achève la première étape.

4.4. Pour $c\in R^N$, remarquons que $A(k+1, c)\subset A(k, c)$ et donc que $\mu(v_{k,c})$ décroit en k. Posons alors:

$$\chi(c) = \inf_{k\in N}\mu(v_{k,c}) = \lim_{k\to\infty}\mu(v_{k,c}).$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que si $F\in C(R^N)$ et si $G\in C(\boldsymbol{R}^s)$ on a l'inégalité:

$$|\nu(F\otimes G)-\lambda(F)\mu(G)|\leqslant 2\,\|F\|\,\|G\|\sum_{c\in W(G)}\chi(c). \tag{4.4}$$

Si $c_1, \ldots, c_p$ sont des points distincts de R^N, les ensembles $A(k, c_1), \ldots$ $\ldots, A(k, c_p)$ sont disjoints dès que k est assez grand, et la somme $v_{k,c_1}+\ldots$ $\ldots+v_{k,c_p}$ est donc bornée par 1.

Il en résulte que l'ensemble C des $c\in R^N$ tels que $\chi(c)>0$ est dénombrable et qu'en outre: $\sum_{c\in C}\chi(c)\leqslant 1$.

Soit alors $F\in C(R^N)$, $G = C(R^s)$ et posons pour $k>s$:

$$G_k = G\times\sum_{c\in W(G)}v_{k,c},\qquad H_k = G-G_k.$$

Quelque soit l'élément c de R^N, dès que k est assez grand, c n'appartient pas à $W(H_k)$: en effet, si $c\notin W(G)$ et si x est tel que $\pi(x) = \pi(c)$, x n'appartient pas non plus à $W(G)$, et donc ni x, ni c n'appartiennent lorsque k est suffisamment grand à $\bigcup_{c\in W(G)}A(k, c)$, d'où $H_k(x) = G(x)$ $= G(c) = H_k(c)$.

Si par contre $c\in W(G)$, alors x appartient également à $W(G)$ et $H_k(c)$ et $H_k(x)$ sont nuls donc égaux.

Il en résulte que la somme $\sum_{c\in W(H_k)}\chi(c)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

L'inégalité (4.4) entraîne alors que:

$$|\nu(F\otimes H_k)-\lambda(F)\mu(H_k)|\to 0\quad\text{quand}\quad k\to\infty.$$

Par ailleurs dès que $k>s$, les ensembles $A(k, c)$ où $c\in W(G)$ sont tous disjoints.

On a donc

$$G_k = \sum_{c\in W(G)}G(c)v_{k,c}$$

et par conséquent:

$$\mu(G_k)\to\sum_{c\in W(G)}G(c)\chi(c)\quad\text{quand}\quad k\to\infty.$$

Pour démontrer que l'inégalité (4.3) est valable pour le couple F, G, donc, pour tout couple d'éléments de $C(R^N)$ ce qui achève la démonstration du lemme, il suffit donc de montrer le lemme suivant:

LEMME 5. *Pour tout $c\in R^N$ et tout $F\in C(R^N)$ on a:*

$$\nu(F\otimes v_{k,c})\to\lambda(F)\chi(c)\quad\textit{quand}\quad k\to\infty.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que cette proposition est évidente quand $\chi(c) = 0$. Nous supposerons donc $c\in C$.

Désignons alors par V_n la fonction de R^N dans $\{0, 1\}^N$ qui à $x\in R^N$ associe:

$$V_n(x) = \big(v_{n,c}(T^kx)\big)_{k\in\boldsymbol{N}},$$

V_n est une application continue et $T\circ V_n = V_n\circ T$.

Nous pouvons définir ainsi une mesure L_n sur $R^N\times\{0, 1\}^N$ en posant pour $f\in C(R^N)$ et $g\in C(\{0, 1\}^N)$:

$$L_n(f\otimes g) = \nu\big(f\otimes(g\circ V_n)\big). \tag{5.1}$$

L_n est évidemment invariante et désignant par e la fonction de $\{0, 1\}^N$ dans C qui à $u = (u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ associe u_0, on a:

$$L_n(f\otimes e) = \nu(f\otimes v_{n,c}). \tag{5.2}$$

Nous allons alors montrer que *lorsque n tend vers l'infini, L_n converge au sens de la convergence faible vers une mesure L* que nous caractériserons.

Soient, en effet, $f\in C(R^N)$, $g\in C(\{0, 1\}^s)$, où s est un entier arbitraire, il suffit de montrer que la suite $\big(L_n(f\otimes g)\big)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est une suite de Cauchy.

Or si p et q sont des entiers:

$$|L_p(f\otimes g)-L_q(f\otimes g)|\leqslant\|f\|\,\mu(|g\circ V_p-g\circ V_q|).$$

Et $g\circ V_p(x) = g\circ V_q(x)$, sauf si x appartient à l'ensemble A des $x\in R^N$ tels qu'il existe $i\in\{0, \ldots, s-1\}$ avec $v_{p,c}(T^ix)\neq v_{q,c}(T^ix)$ ensemble dont la mesure $\mu(A)$ est majorée par $s\mu(|v_{p,c}-v_{q,c}|)$.

On en déduit la majoration:

$$|L_p(f\otimes g)-L_q(f\otimes g)|\leqslant s\|f\|\|g\|\mu(|v_{p,c}-v_{q,c}|).$$

La suite $(v_{n,c})_{n\in N}$ converge vers 0 et est majorée par 1, donc, est une suite de Cauchy dans $L^1(\mu)$ ce qui entraîne que $L_n(f\otimes g)$ est une suite de Cauchy.

Soit alors l la restriction $L|_2$ de L au 2me facteur. *Nous allons montrer que l est déterministe.*

Par définition si $g\in C(\{0,1\}^N)$

$$l(g)=\lim_{n\to\infty}L_n(1\otimes g)=\lim_{n\to\infty}\mu(g\circ V_n)$$

et en particulier si $g=|e-e\circ T^s|$ où $s\in N$

$$l(|e-e\circ T^s|)=\lim_{n\to\infty}\mu(|v_{n,c}-v_{n,c}\circ T^s|).$$

D'autre part, la formule: $v_{k,Tc}\circ T=\sum_{Td=Tc}v_{k+1,d}$ valable pour $k\geqslant 1$ montre que: $\chi(Tc)=\sum_{Td=Tc}\chi(d)$ (car μ est invariante). En particulier, $\chi(Tc)\geqslant\chi(c)$, et par récurrence $\chi(T^sc)\geqslant\chi(c)$. Comme $c\in C$ et que $\sum_{d\in c}\chi(d)\leqslant 1$, il en résulte que l'ensemble $\{T^sc,\ s\in N\}$ est fini et donc qu'il existe $s\geqslant 1$ et $t\geqslant 0$ tels que:

$$\forall n\geqslant t\qquad T^{n+s}c=T^nc.$$

En outre, si t est le plus petit entier tel que cette propriété soit vraie, on a certainement $t=0$ sinon, on aurait:

$$\chi(T^{s+t-1}c)=\sum_{T^sd=T^{s+t-1}c}\chi(d)$$

d'où si $T^{t-1}c\neq T^{s+t-1}c=T^{2s+t-1}c$, $\chi(T^{t-1}c)=0$ ce qui est impossible.

Il existe donc un entier $s\geqslant 1$ tel que:

$$\forall n\in N\qquad c_{n+s}=c_n.$$

En outre, si d est tel que $T^sd=c$ et $d\neq c$ on a nécessairement: $\chi(d)=0$. Or:

$$|v_{n,c}-v_{n,c}\circ T^s|\leqslant\sum_{\substack{T^sd=c\\ d\neq c}}v_{n,d}.$$

On en déduit que pour cet entier $s\geqslant 1$

$$l(|e-e\circ T^s|)=0.$$

C'est-à-dire que e est presque partout égale à une fonction de l'espace engendré par les fonctions $e\circ T^s$ pour $s\geqslant 1$, c'est-à-dire encore que l est déterministe.

Par ailleurs, $L|_1$ restriction de L au 1er facteur est évidemment égale à $\lambda=P^N$, et, d'autre part, L est limite de mesures invariantes donc elle-même invariante.

En vertu du lemme 1 du paragraphe 1.3, λ et l sont disjointes, c'est-à-dire: $L=\lambda\otimes l$.

En particulier: $\nu(f\otimes v_{n,c})=L_n(f\otimes e)\to\lambda(f)l(e)=\lambda(f)\chi(c)$ et le lemme est complètement démontré.

5. Demonstration du lemme 4

5.1. Supposons que *toute mesure associée à b, soit disjointe de la mesure λ.* Si $\alpha\in B(r)$, $a=(a_n)_{n\in N}$ la suite des chiffres en base r de sa partie fractionnaire, et si $S\in\Xi_{(a,b)}$, la mesure $\mu^S_{(a,b)}$ a pour projection sur le premier facteur $\mu^S_a=\lambda$ et sur le second μ^S_b associée à b, donc, disjointe de λ. On en déduit $\mu^S_{(a,b)}=\mu^S_a\otimes\mu^S_b$ ce qui entraîne d'après le lemme 3, $\beta\in B^\perp(r)$.

5.2. Réciproquement *supposons qu'il existe une mesure associée à b, soit $\mu=\mu^S_b$, non disjointe de λ.* Alors, il existe une mesure invariante ν sur $R^N\times R^N$, telle que $\nu\neq\lambda\otimes\mu$ et $\nu|_1=\lambda$, $\nu|_2=\mu$.

D'après le théorème 2 de l'article déjà cité de Kamae, il existe un élément a de R^N, générique pour la mesure λ (c'est-à-dire tel que $N\in\Xi_a$) et tel que $\nu=\mu^S_{(a,b)}$.

Prenant $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}a_n/r^{n+1}$, on en déduit que $\alpha\in B(r)$ et que par ailleurs $\mu^S_{(a,b)}\neq\mu^S_a\otimes\mu^S_b$, donc, toujours d'après le lemme 3 du paragraphe 2.2 que $\beta\notin B^\perp(r)$.

Bibliographie

[1] H. Daboussi and M. Mendès-France, *Spectrum, almost periodicity and equidistribution modulo 1.* (A paraître).

[2] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory 1–1 (1967), p. 1–49.

[3] T. Kamae, *Subsequences of normal sequences*, Israel J. Math. 16 (2) (1973).

[4] U. Krengel, *Transformations without finite invariant measure have finite strong generators*, Lectures Notes in Mathematics N° 160 (Contributions to ergodic theory and probability).

[5] J. E. Maxfield, *Normal k-tuples*, Pacific J. Math. 3 (1953), p. 189–196.

[6] M. Mendès-France, *Les ensembles de Bésineau*, Séminaire Delange-Poitou-Pisot (Paris-Année 1973–74, N° 7).

Reçu le 23. 5. 1974 (577)