ACTA ARITHMETICA
XXVIII (1976)

О некоторых арифметических средних в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

В этой работе сообщается о некоторых закономерностях в вопросе о вертикальном распределении нулей дзета-функции Римана, которые получаются в связи с арифметическим средним дискретной совокупности.

1. Один ряд Тейлора. Пусть $S(t)$ обозначает известную функцию, [3], стр. 209, в теории $\zeta(s)$. Цель этой главы — получить одну теорему в теории $\zeta(s)$, исходя из ряда Тейлора функции $S(t)$ на определенных промежутках изменения t, и, из теоремы о среднем А. Зельберга, [3], стр. 365,

$$\int_0^T \{S(t)\}^2 dt \sim \frac{1}{2\pi^2} T \ln\ln T,$$

т.е.

$$\int_T^{2T} \{S(t)\}^2 dt \sim \frac{1}{2\pi^2} T \ln\ln T. \tag{1}$$

1.1. В этой части сформулируем упоминавшуюся теорему. Пусть γ', γ'' — ординаты соседних нулей. Положим

$$\bar{t} = \tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma''),$$

и, пусть $\{\bar{t}\}$ обозначает последовательность таких значений. Пусть, дальше,

$$\Delta^2(T) = \frac{\sum\limits_{\bar{t}\in(T,2T)} \delta^2(\bar{t})}{\sum\limits_{\bar{t}\in(T,2T)} 1}, \tag{2}$$

где

$$\delta^2(\bar{t}) = \int_{\gamma'}^{\gamma''} [S(\bar{t}) - S_1(\bar{t})\ln\bar{t}\cdot(t-\bar{t})]^2 dt, \tag{3}$$

и, см. (25),

$$S_1(\bar t) = \frac{L'(\bar t)+f'(\bar t)}{\ln \bar t} = \frac{1}{2\pi}+O\left(\frac{1}{\ln\bar t}\right). \tag{4}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если справедлива гипотеза Римана, и нули функции* $\zeta(s)$ *— простые, то*

$$\Delta^2(T)\sim\frac{1}{\pi}\frac{\ln\ln T}{\ln T}. \tag{5}$$

Дальше, из соотношения (3) получается

$$\delta^2(\bar t) = S^2(\bar t)(\gamma''-\gamma')+\frac{S_1^2(\bar t)}{12}(\ln\bar t)^2(\gamma''-\gamma')^3. \tag{6}$$

Из этого: с одной стороны

$$\delta^2(\bar t)\geqslant \frac{S_1^2(\bar t)}{12}(\ln \bar t)^2(\gamma''-\gamma')^3 > A(\ln\bar t)^2(\gamma''-\gamma')^3, \tag{7}$$

и, с другой стороны, если принять во внимание оценки Литтлвуда, [3], стр. 346, [2],

$$|S(T)|<A\frac{\ln T}{\ln\ln T},\quad \gamma''-\gamma'<\frac{A}{\ln\ln\gamma'}, \tag{8}$$

получается

$$\delta^2(\bar t)<\left[S^2(\bar t)+\frac{S_1^2(\bar t)}{12}(\ln\bar t)^2\right](\gamma''-\gamma')<A(\ln\bar t)^2(\gamma''-\gamma'). \tag{9}$$

Теперь, из теоремы 1, в силу (7), (9), получается

Следствие. *Если* $\delta^2(\bar t)\leqslant\Delta^2(T)$, *то*

$$\gamma''-\gamma'<A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'}, \tag{10}$$

и, если $\delta^2(\bar t)>\Delta^2(T)$, *то*

$$\gamma''-\gamma'>A\frac{\ln\ln\gamma'}{(\ln\gamma')^3}, \tag{11}$$

(напомним, что $\gamma'<\bar t<\gamma''$).

1.2. В этой части получим явное выражение для членов $O\left(\frac{1}{T}\right)$ в формуле, [3], стр. 209,

$$N(T)=L(T)+S(T)+O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{12}$$

Это нетрудно сделать, исходя из соотношения, [3], стр. 210,

$$\Delta\arg\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\operatorname{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac14+i\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{13}$$

Полагая в соотношении, [4], стр. 173,

$$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac12)\ln z-z+\tfrac12\ln2\pi+\int_0^\infty\frac{[u]-u+\frac12}{u+z}\,du,$$

$z=\frac14+i\frac{T}{2}$, и, отделяя в получившемся соотношении мнимую часть, получается:

$$\operatorname{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac14+i\frac{T}{2}\right)\right\} = \operatorname{Im}\left\{\left(-\frac14+i\frac{T}{2}\right)\ln\left(\frac14+i\frac{T}{2}\right)\right\} - \\ -\frac{T}{2}-\frac12\int_0^\infty \frac{T}{\left(u+\frac14\right)^2+\frac{T^2}{4}}\left([u]-u+\frac12\right)du.$$

Так как

$$\ln\left(\frac14+i\frac{T}{2}\right)=\ln\left[i\frac{T}{2}\left(1-\frac{i}{2T}\right)\right] = \\ = i\frac{\pi}{2}+\ln\frac{T}{2}+\ln\left(1-\frac{i}{2T}\right) = \\ = i\frac{\pi}{2}+\ln\frac{T}{2}+\frac12\ln\left(1+\frac{1}{4T^2}\right)+i\arg\left(1-\frac{i}{2T}\right),$$

и, дальше,

$$\arg\left(1-\frac{i}{2T}\right)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2T}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2T},$$

то

$$\ln\left(\frac14+i\frac{T}{2}\right)=\ln\frac{T}{2}+\frac12\ln\left(1+\frac{1}{4T^2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2T}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im}\left\{\left(-\frac14+i\frac{T}{2}\right)\ln\left(\frac14+i\frac{T}{2}\right)\right\} = \\ = \frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac14\operatorname{arctg}\frac{1}{2T}+\frac{T}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4T^2}\right),$$

и, наконец,

$$\operatorname{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac14+i\frac T2\right)\right\}=\frac T2\ln\frac T2-\frac T2-\frac\pi8+\frac14\operatorname{arctg}\frac1{2T}+\frac T4\ln\left(1+\frac1{4T^2}\right)-$$
$$-\frac12\int_0^\infty\frac{T}{\left(u+\frac14\right)^2+\frac{T^2}{4}}\left([u]-u+\frac12\right)du.$$

Из последнего соотношения, в силу (13), получается

$$(14)\qquad O\left(\frac1T\right)=\frac14\operatorname{arctg}\frac1{2T}+\frac T4\ln\left(1+\frac1{4T^2}\right)-$$
$$-\frac12\int_0^\infty\frac{T}{\left(u+\frac14\right)^2+\frac{T^2}{4}}\left([u]-u+\frac12\right)du=f(T)=f_1(T)+f_2(T),$$

где введены обозначения

$$(15)\qquad f_1(T)=\frac14\operatorname{arctg}\frac1{2T}+\frac T4\ln\left(1+\frac1{4T^2}\right),$$

$$(16)\qquad f_2(T)=-\frac12\int_0^\infty\frac{T}{\left(u+\frac14\right)^2+\frac{T^2}{4}}\left([u]-u+\frac12\right)du.$$

Теперь формулу (12) будем писать так:

$$(17)\qquad N(t)=L(t)+S(t)+f(t),$$

где

$$(18)\qquad L(t)=\frac1{2\pi}t\ln t-\frac{1+\ln2\pi}{2\pi}t+\frac78.$$

(Обозначение $f(t)$ использовано в [3], стр. 350.)

1.3. В этой части получим ряд Тейлора для функции $S(t)$, по степеням $(t-\bar t)$, $t\in(\gamma',\gamma'')$.

Из соотношения (18), нетрудно убедиться индукцией, что имеет место

Лемма 1.

$$L^{(l)}(t)=\frac{d^lL(t)}{dt^l}=\frac{(-1)^{l-2}(l-2)!}{2\pi}\frac1{t^{l-1}},\qquad l=2,3,\ldots$$

Так как формула (15) дает

$$(19)\qquad f_1'(t)=\frac14\left[\ln\left(1+\frac1{4t^2}\right)-\frac{4}{1+4t^2}\right]=$$
$$=\frac14\left[\ln\left(t+\frac i2\right)+\ln\left(t-\frac i2\right)-2\ln t+\frac1i\frac1{t+\frac12i}-\frac1i\frac1{t-\frac12i}\right],$$

то, из этого, индукцией, получается

Лемма 2.

$$f_1^{(l)}(t)=\frac14\left\{(-1)^{l-2}(l-2)!\left[\left(t+\frac i2\right)^{-l+1}+\left(t-\frac i2\right)^{-l+1}-2t^{-l+1}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^l}{i}(l-1)!\left[\left(t+\frac i2\right)^{-l}-\left(t-\frac i2\right)^{-l}\right]\right\},\qquad l=2,3,\ldots$$

Так как, сначала, из соотношения (16), получается

$$(20)\qquad f_2(t)=-\int_0^\infty\left\{\frac1{t+i(2u+\frac12)}+\frac1{t-i(2u+\frac12)}\right\}([u]-u+\tfrac12)\,du,$$

дальше, из этого

$$(21)\qquad f_2'(t)=\int_0^\infty\left\{\frac1{[t+i(2u+\frac12)]^2}+\frac1{[t-i(2u+\frac12)]^2}\right\}([u]-u+\tfrac12)\,du,$$

то, из последнего, индукцией, получается

Лемма 3.

$$f_2^{(l)}(t)=(-1)^{l+1}l!\int_0^\infty\{[t+i(2u+\tfrac12)]^{-l-1}+$$
$$+[t-i(2u+\tfrac12)]^{-l-1}\}([u]-u+\tfrac12)\,du,\qquad l=2,3,\ldots$$

Если теперь принять во внимание, что на промежутке (γ',γ'') функция $N(t)$ постоянная, то из формулы (17) получается

$$(22)\qquad S^{(r)}(t)=-L^{(r)}(t)-f^{(r)}(t),\qquad r=1,2,\ldots,\ t\in(\gamma',\gamma'').$$

Так как

$$|[t+i(2u+\tfrac12)]^{-l-1}|=\frac1{[t^2+(2u+\frac12)^2]^{(l+1)/2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac1{t^{l+1}}\frac1{\left[1+\frac{(2u+\frac12)^2}{t^2}\right]^{3/2}}<\frac1{t^{l+1}}\frac1{1+\left(\frac{2u+\frac12}{t}\right)^2}=\frac1{t^l}\frac{\frac1t}{1+\left(\frac{2u+\frac12}{t}\right)^2},$$

то, из леммы 3 получается (напомним, что $|[u]-u+\frac{1}{2}|\leqslant\frac{1}{2}$)

$$(23)\qquad |f_2^{(l)}(t)|<\frac{l!}{2t^l}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{2u+\frac{1}{2}}{t}\right)}{1+\left(\frac{2u+\frac{1}{2}}{t}\right)^2}<\frac{l!}{2t^l}\int_0^\infty\frac{dw}{1+w^2}=\frac{\pi}{4}\frac{l!}{t^l},$$

$$l=2,3,\ldots$$

Дальше, используя лемму 2, получается

$$(24)\qquad |f_1^{(l)}(t)|<\frac{(l-1)!}{4t^{l-1}}\left(\frac{4}{l-1}+\frac{2}{t}\right)<\frac{(l-1)!}{t^{l-1}}\left(1+\frac{1}{2t}\right)<2\frac{(l-1)!}{t^{l-1}},$$

$$l=2,3,\ldots,\ t>1.$$

Следовательно, используя (22), лемму 1, (23), (24):

$$|S^{(l)}(t)|<\frac{(l-2)!}{2\pi}\frac{1}{t^{l-1}}+\frac{\pi}{4}\frac{l!}{t^l}+2\frac{(l-1)!}{t^{l-1}}=$$

$$=\frac{l!}{t^{l-1}}\left[\frac{1}{l(l+1)}+\frac{\pi}{4t}+\frac{2}{l}\right]<\left(\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\frac{l!}{t^{l-1}},\qquad t>1,$$

т.е., имеет место (напомним, [3], стр. 384, что $\gamma_1\doteq 14{,}13$)

Лемма 4.

$$\frac{|S^{(l)}(t)|}{l!}<\frac{A}{t^{l-1}},\qquad l=2,3,\ldots,\ t\in(\gamma',\gamma''),$$

где A — абсолютная постоянная.

В силу (18), (19), (21), (22), обозначим

$$(25)\qquad S'(\bar t)=-L'(\bar t)-f'(\bar t)=-\frac{1}{2\pi}\left[1+O\left(\frac{1}{\ln\bar t}\right)\right]\ln\bar t=-S_1(\bar t)\ln\bar t.$$

Теперь, в силу леммы 4, имеет место

Лемма 5. *При* $t\in(\gamma',\gamma'')$,

$$(26)\qquad S(t)=S(\bar t)-S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{S^{(l)}(\bar t)}{l!}(t-\bar t)^l.$$

В связи с рядом Тейлора (26), заметим следующее. Графиком функции $S(t)$ на промежутке (γ',γ''), в первом приближении, является отрезок, проходящий точкой $[\bar t, S(\bar t)]$, с угловым коэффициентом

$$\operatorname{tg}\alpha(\bar t)\sim-\frac{1}{2\pi}\ln\bar t.$$

Угловой коэффициент изменяется скачкообразно, со скачком

$$\Delta\operatorname{tg}\alpha(\bar t)\sim-\frac{1}{2\pi\bar t}(\bar t'-\bar t),\qquad \gamma'<\bar t<\gamma''<\bar t'<\gamma'''.$$

Значит, упоминавшийся отрезок, с возрастанием $\bar t$, скачкообразно поворочивается в отрицательном направлении.

1.4. Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$(27)\qquad B(t)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{S^{(l)}(\bar t)}{l!}(t-\bar t)^l.$$

Пусть

$$(28)\qquad \varepsilon(\bar t)<\frac{\gamma''-\gamma'}{2},\qquad \tilde\gamma'=\gamma'+\varepsilon,\qquad \tilde\gamma''=\gamma''-\varepsilon.$$

В силу леммы 4, (8), получается

$$\int_{\tilde\gamma'}^{\tilde\gamma''}B(t)\,dt=O\left\{\frac{(\gamma''-\gamma')^3}{\bar t}\right\}=O\left(\frac{1}{\bar t}\right),$$

$$(29)\qquad \int_{\tilde\gamma'}^{\tilde\gamma''}(t-\bar t)B(t)\,dt=O\left\{\frac{(\gamma''-\gamma')^5}{\bar t^2}\right\}=O\left(\frac{1}{\bar t^2}\right),$$

$$\int_{\tilde\gamma'}^{\tilde\gamma''}B^2(t)\,dt=O\left\{\frac{(\gamma''-\gamma')^5}{\bar t^2}\right\}=O\left(\frac{1}{\bar t^2}\right),$$

ли использовать соотношения

$$(30)\qquad \int_{\tilde\gamma'}^{\tilde\gamma''}(t-\bar t)^r\,dt=\frac{1+(-1)^r}{r+1}\left(\frac{\tilde\gamma''-\tilde\gamma'}{2}\right)^{r+1},\qquad r=1,2,\ldots$$

В силу (26), (27), имеет место

$$(31)\qquad S^2(t)=[S(\bar t)-S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)]^2+$$
$$+2S(\bar t)B(t)-2S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)B(t)+B^2(t).$$

Дальше, в силу (8), с одной стороны,

$$(32)\qquad \int_{\tilde\gamma'}^{\tilde\gamma''}S^2(t)\,dt=\int_{\gamma'}^{\gamma''}S^2(t)\,dt+O\left\{\varepsilon\left(\frac{\ln\bar t}{\ln\ln\bar t}\right)^2\right\},$$

и, с другой стороны,

$$(33)\quad \int_{\tilde\gamma'}^{\tilde\gamma''} [S(t)-S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)]^2 dt =$$
$$= \int_{\gamma'}^{\gamma''} [S(t)-S_1(\bar t)\ln\bar t\cdot(t-\bar t)]^2 dt + O\{\varepsilon(\ln\bar t)^2\} = \delta^2(\bar t)+O\{\varepsilon(\ln\bar t)^2\}.$$

Теперь, интегрируя соотношение (31) на промежутке $\langle\tilde\gamma',\tilde\gamma''\rangle$, учитывая при этом (29), (32), (33), получается

$$(34)\quad \delta^2(\bar t) = \int_{\gamma'}^{\gamma''} S^2(t)\,dt + O\left(\frac{\ln\bar t}{\bar t\ln\ln\bar t}\right)+O\left(\frac{\ln\bar t}{\bar t^2}\right)+O\left(\frac{1}{\bar t^2}\right)+$$
$$+O\{\varepsilon(\ln\bar t)^2\}+O\left\{\varepsilon\left(\frac{\ln\bar t}{\ln\ln\bar t}\right)^2\right\} =$$
$$= \int_{\gamma'}^{\gamma''} S^2(t)\,dt + O\left(\frac{\ln\bar t}{\bar t\ln\ln\bar t}\right)+O\{\varepsilon(\ln\bar t)^2\}.$$

Так как, [1], стр. 211,

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\ln T-\frac{1+\ln 2\pi}{2\pi}T+O(\ln T),$$

то

$$(35)\quad N(2T)-N(T)\sim\frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Следовательно, для числа значений $\bar t\in(T,2T)$, получается

$$(36)\quad \sum_{\bar t\in(T,2T)} 1\sim N(2T)-N(T)\sim\frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Дальше, в силу (8)

$$(37)\quad \sum_{\bar t}\int_{\gamma'}^{\gamma''} S^2(t)\,dt = \int_T^{2T} S^2(t)\,dt+O\left\{\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^2\right\}.$$

Беря арифметическое среднее чисел $\delta^2(\bar t)$, в силу (34), (2), (37):

$$(38)\quad \Delta^2(T)=\frac{\int_T^{2T} S^2(t)\,dt+O\left\{\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^2\right\}}{\sum_{\bar t\in(T,2T)} 1}+O\left(\frac{\ln T}{T\ln\ln T}\right)+O\{\bar\varepsilon(\ln T)^2\},$$

где

$$\bar\varepsilon=\max_{\bar t\in(T,2T)}\{\varepsilon(\bar t)\}.$$

Если теперь положим (см. также (28)),

$$\min_{\bar t\in(T,2T)}(\gamma''-\gamma')=\bar\gamma(T),\qquad \varepsilon(\bar t)<\frac{\bar\gamma(T)}{2T}<\frac{A}{T},$$

то, в силу (1), (36), (38), получается

$$\Delta^2(T)\sim\frac{1}{\pi}\frac{\ln\ln T}{\ln T}.$$

2. Одно кубическое соотношение. Введем арифметические средние:

$$(39)\quad a_i(T)=\frac{\sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma')^i}{\sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}1},\quad i=1,2,3,$$

и, следующе центральные арифметические средние

$$(40)\quad c_j(T)=\frac{\sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}[(\gamma''-\gamma')-a_1(T)]^j}{\sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}1},\quad j=2,3.$$

В этой главе покажем, что имеет место

Теорема 2. *Если справедлива гипотеза Римана, и нули функции $\zeta(s)$ простые, то имеет место:*

$$(41)\quad a_1(T)\sim\frac{2\pi}{\ln T},$$

$$(42)\quad \frac{A}{(\ln T)^2}<a_2(T)<\frac{A}{\ln T},$$

$$(43)\quad a_3(T)<A\frac{\ln\ln T}{(\ln T)^3},$$

$$(44)\quad c_2(T)<\frac{A}{\ln T},$$

$$(45)\quad -\frac{A}{(\ln T)^2}<c_3(T)<A\frac{\ln\ln T}{(\ln T)^3}.$$

2.1. Прежде всего, в силу (36),

$$(46)\quad \sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}1\sim\frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Теперь, в силу (8) — вторая оценка, (39), (46),

$$(47)\quad T \sim \sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)} (\gamma''-\gamma') = a_1(T) \sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)} 1 \sim a_1(T)\cdot\frac{1}{2\pi}T\ln T,$$

значит, имеет место

$$a_1(T) \sim \frac{2\pi}{\ln T},$$

т.е. (41).

2.2. В этой части покажем, какие оценки величин $a_j(T)$, $j=2,3$, возможно получить, исходя из оценки Литтлвуда

$$(48)\qquad \gamma''-\gamma' < \frac{A}{\ln\ln\gamma'}.$$

Так как, в силу (48), $\gamma''-\gamma'<1$ начиная с некоторого γ, то

$$(49)\qquad (\gamma''-\gamma')^j < \gamma''-\gamma', \quad j=2,3.$$

Следовательно, из (39), в силу (49), (41), получается

$$(50)\qquad a_j(T) < a_1(T) < \frac{A}{\ln T}, \quad j=2,3.$$

Так как, дальше,

$$(51)\qquad [(\gamma''-\gamma')-a_1(T)]^2 = (\gamma''-\gamma')^2 - 2(\gamma''-\gamma')a_1 + a_1^2,$$

то, из этого, в силу (39), получается

$$(52)\qquad a_2 - 2a_1^2 + a_1^2 = a_2(T) - a_1^2(T) \geqslant 0.$$

Однако, в силу (41),

$$(53)\qquad a_1(T) > \frac{A}{\ln T}.$$

Следовательно, из (52), в силу (53), получается

$$(54)\qquad a_2(T) > \frac{A}{(\ln T)^2},$$

т.е., в силу (50) и (54) получается (42).

2.3. В этой части существенно улучшим оценку, см. (50)

$$a_3(T) < \frac{A}{\ln T}.$$

Для этой цели используем кубическое (относительно $\gamma''-\gamma'$) соотношение (6). Из этого соотношения, в силу (4), получается

$$(55)\qquad (\gamma''-\gamma')^3 = \frac{12}{S_1^2(\bar t)}\frac{\delta^2(\bar t)}{(\ln\bar t)^2} - \frac{12}{S_1^2(\bar t)}\frac{S^2(\bar t)}{(\ln\bar t)^2}(\gamma''-\gamma') \leqslant$$
$$\leqslant \frac{12}{S_1^2(\bar t)}\frac{\delta^2(\bar t)}{(\ln\bar t)^2} < \frac{A}{(\ln T)^2}\delta^2(\bar t), \quad \bar t\in(T,2T).$$

Из этого последнего, в силу (39), (2), (5), получается (43).

2.4. В этой части получим оценки для центральных арифметических средних $c_2(T)$, $c_3(T)$.

Сейчас отметим, что в силу (48), (53),

$$(56)\qquad [(\gamma''-\gamma')-a_1(T)]^j < \left[\frac{A}{\ln\ln T} - \frac{A}{\ln T}\right]^j < \frac{A}{(\ln\ln T)^2}, \quad j=2,3.$$

Следовательно

$$(57)\qquad c_2(T) < \frac{A}{(\ln\ln T)^2}, \qquad |c_3(T)| < \frac{A}{(\ln\ln T)^3}.$$

Однако, нетрудно получить более точные оценки. Принимая во внимание (40), (50), (51), (52), получается

$$(58)\qquad c_2(T) = a_2(T) - a_1^2(T) < a_2(T) < \frac{A}{\ln T},$$

т.е. (44).

Дальше, имеет место

$$(59)\qquad [(\gamma''-\gamma')-a_1(T)]^3 = (\gamma''-\gamma')^3 - 3(\gamma''-\gamma')^2 a_1 + 3(\gamma''-\gamma')a_1^2 - a_1^3.$$

Из этого последнего, в силу (39), (40), получается

$$(60)\qquad c_3(T) = a_3 - 3a_2a_1 + 3a_1^3 - a_1^3 = a_3 + 2a_1^3 - 3a_2a_1.$$

Следовательно

$$(61)\qquad -3a_1a_2 < c_3(T) < a_3 + 2a_1^3.$$

Так как, с одной стороны, в силу (41), (43),

$$a_3 + 2a_1^3 < A\frac{\ln\ln T}{(\ln T)^3},$$

и, с другой стороны, в силу (50),

$$3a_1 a_2 < \frac{A}{(\ln T)^2},$$

то получается

$$-\frac{A}{(\ln T)^2} < e_3(T) < A\frac{\ln\ln T}{(\ln T)^3},$$

т.е. (45).

3. Применение одного неравенства П. Л. Чебышева. В этой главе, исходя из одного неравенства П. Л. Чебышева, попробуем показать, каков смысл неравенства (см. также (10))

$$\gamma'' - \gamma' \geqslant A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'}, \tag{62}$$

с точки зрения теории вероятностей.

3.1. Для пояснения следующих выкладок, заметим, что здесь строится вспомогательная случайная величина $\omega(T)$, для которой математическое ожидание $M[\omega(T)]$, просто оценивается сверху, посредством арифметического среднего $a_1(T)$.

Пусть

$$\max_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma') = \bar{\bar{\gamma}}(T), \qquad \min_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma') = \bar{\gamma}(T),$$

конечно,

$$\bar{\bar{\gamma}}(T) < \frac{A}{\ln\ln T},$$

в силу (48). Введем обозначение

$$G(T) = \frac{2\pi}{\ln T},$$

и построим (конечную) последовательность чисел

$$\{G(T)\}^2, 2\{G(T)\}^2, \ldots, n(T)\{G(T)\}^2,$$
$$n(T) = [\bar{\bar{\gamma}}(T)\{G(T)\}^{-2}]+1,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть. Пусть w_k обозначает число промежутков $(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)$, такого рода, что

$$k\{G(T)\}^2 < \gamma''-\gamma' \leqslant (k+1)\{G(T)\}^2,$$

и, обозначим

$$\Delta_k = \left(k\{G(T)\}^2, (k+1)\{G(T)\}^2\right\rangle, \quad k = 0, 1, \ldots, n(T).$$

Однако, предполагается справедливой гипотеза Римана, и нули предполагаются простыми, так что, для числа $Q(T)$ промежутков $(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)$, в силу (46), получается

$$Q(T) \sim \frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Следовательно,

$$P_k = \frac{w_k}{Q(T)} \sim 2\pi\frac{w_k}{T\ln T}, \quad k = 0, 1, \ldots, n(T), \tag{63}$$

дает вероятнось события, состоящего в попадании числа $\gamma''-\gamma'$ в промежуток Δ_k. Наконец:

(a) числам $\gamma''-\gamma' \in \Delta_k$, $k = 1, \ldots, n(T)$, приводится в соответствие число

$$\omega_k = k\{G(T)\}^2,$$

(b) числам $\gamma''-\gamma' \in \Delta_0$, приводится в соответствие число

$$\omega_0 = \bar{\gamma}(T).$$

В силу сказанного, делаем следующее

Примечание. Функция $\zeta(s)$ порождает на промежутке $(T, 2T)$, $T\to+\infty$, дискретную случайную величину $\omega(T)$, принимающую значения ω_k, $k = 0, 1, \ldots, n(T)$.

3.2. В этой части покажем, что имеет место

Лемма 6. *Если справедлива гипотеза Римана и нули функции $\zeta(s)$ простые, то*

$$M[\omega(T)] < \frac{A}{\ln T}.$$

Действительно:

$$M[\omega(T)] = \sum\omega P(\omega) = \sum_{k=0}^{n(T)}\omega_k P_k = \sum_{k=0}^{n(T)}\omega_k\frac{w_k}{Q(T)} = \frac{1}{Q(T)}\sum_{k=0}^{n(T)}\omega_k w_k =$$
$$= \frac{1}{Q(T)}\sum_{k=0}^{n(T)}\sum_{\substack{(\gamma',\gamma'')\\ \gamma''-\gamma'\in\Delta_k}}\omega_k < \frac{1}{Q(T)}\sum_{k=0}^{n(T)}\sum_{\substack{(\gamma',\gamma'')\\ \gamma''-\gamma'\in\Delta_k}}(\gamma''-\gamma') =$$
$$= \frac{1}{Q(T)}\sum_{(\gamma',\gamma'')\subset(T,2T)}(\gamma''-\gamma') = a_1(T) < \frac{A}{\ln T}.$$

Напомним, [1], стр. 99, что для случайной величины X, принимающей только неотрицательные значения, имеет место неравенство П. Л. Чебышева:

$$\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{M[X]}{a}, \quad a > 0,\ M[X] < +\infty, \tag{64}$$

т.е., вероятность того, что случайная величина X примет значение не меньше a, не больше $\frac{M[X]}{a}$, если $M[X]$ конечное.

Применяя неравенство (64) в случае

$$X = \omega(T), \quad a = A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'}, \quad \gamma' \in (T, 2T),$$

и, используя лемму 6, получается

$$\mathrm{P}\left(\omega_k \geqslant A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'}\right) \leqslant \frac{A\ln\gamma'}{(\ln\ln\gamma')^{1/3}} M[\omega(T)] <$$

$$< A\frac{\ln\gamma'}{\ln T}\frac{1}{(\ln\ln\gamma')^{1/3}} < \frac{A}{(\ln\ln T)^{1/3}},$$

т.е.,

$$\mathrm{P}\left(\gamma''-\gamma' \geqslant A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'};\ (\gamma', \gamma'') \subset (T, 2T)\right) < \frac{A}{(\ln\ln T)^{1/3}}.$$

Результат сформулируем так:

Теорема 3. *Если справедлива гипотеза Римана и нули функции $\zeta(s)$ простые, то*

$$\lim_{T\to+\infty} \mathrm{P}\left(\gamma''-\gamma' \geqslant A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'};\ (\gamma', \gamma'') \subset (T, 2T)\right) = 0.$$

Следствие.

$$\lim_{T\to+\infty} \mathrm{P}\left(\gamma''-\gamma' < A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'};\ (\gamma', \gamma'') \subset (T, 2T)\right) = 1.$$

Значит, при $T\to+\infty$, попадание числа $\gamma''-\gamma'$, $(\gamma', \gamma'') \subset (T, 2T)$, в промежуток

$$\left(0,\ A\frac{(\ln\ln\gamma')^{1/3}}{\ln\gamma'}\right)$$

является почти достоверным событием.

Литература

[1] И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов, *Теория вероятностей и математическая статистика в технике* (общая часть), Москва 1955.

[2] J. E. Littlewood, *Two notes on the Riemann zeta-function*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 22 (1924), стр. 234–242.

[3] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[4] — *Теория функций*, Москва, Ленинград 1951.

Поступило 24.1.1974
и в исправленной форме 16.5.1974 (540)