$= a_{N+j+1} - a_{N+j} - r \to 0$. It follows that δ_j converges (to an integer) and so $a_{N+j} - (N+j)r = \delta_j + a_N + k - Nr$ converges as $j \to \infty$. Thus we have (1).

Now suppose r is not an integer. Choose a positive integer M such that Mr is an integer. Set $b_n = a_{Mn}$. Note that

$$b_n - b_{n-1} = (a_{Mn} - a_{Mn-1}) + (a_{Mn-1} - a_{Mn-2}) + \ldots + (a_{Mn-M+1} - a_{Mn-M}),$$

which eventually converges monotonically to Mr; and so $b_{n+1} + b_{n-1} - 2b_n$ converges to zero and changes sign only finitely many times. Thus the hypotheses of the first case of this lemma apply to $b_1, b_2, \ldots$ If (II) holds for this sequence, then by the proof above $b_n - n(Mr) = a_{Mn} - (nM)r \to s$; so also for fixed j

$$a_{Mn+j} - (Mn+j)r = \sum_{i=1}^{j} (a_{Mn+i} - a_{Mn+i-1}) - jr + a_{Mn} - Mnr \to s \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

On the other hand if (I) and thus (2) hold for $b_1, b_2, \ldots$, then (2) clearly holds also for $a_1, a_2, \ldots$

Some sequences to which Theorem 1 applies are n^w ($w < 2$), $(\log n)^w$ (any w), $n(\log n)^w$ (any w), $(\arctan n)^w$ (any w), $n(\arctan n)^w$ (any w), $\int_1^n (t+\sin t)^w dt$ ($w < 1$), and $\int_1^n (t+\cos t)^w dt$ ($w < 1$).

Note added in proof. P. Csillag in his paper *Über die Verteilung iterierter Summen von Positiven Nullfolgen* mod 1, Acta Litt. Sci. Szeged 4 (1929), pp. 151–154, has shown that if $f^{k}(x) \to \infty$ while $f^{(k+1)}(x) > 0$ and $f^{(k+1)}(x) \to 0$ then $\langle f(k)\rangle$ is dense in $(0, 1)$. This contains our result that if $k = 1$, then $\langle f(n)\rangle$ is dense in $(0, 1)$ but says nothing about density in the unit square. Recently John Daily in his Ph.D. dissertation has shown that under the above conditions $(\langle f(n)\rangle, \ldots, \langle f^{k}(n)\rangle)$ is dense in the n cube.

References

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Cambridge 1959, Chapter 23.

[2] G. Polya and G. Szego, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. 1, 2nd ed., Berlin 1954, p. 72.

PORTLAND STATE UNIVERSITY
ILLINOIS STATE UNIVERSITY

Received on 7. 6. 1974 (582)

ACTA ARITHMETICA
XXVIII (1976)

Eine Anwendung des Selbergschen Siebes auf algebraische Zahlkörper

von

HEIDRUN SARGES (Marburg)*

1. Mittels der Selbergschen Siebmethode bewiesen Jurkat und Richert [2] unter anderem folgende Resultate:

(a) Für $\varepsilon > 0$ und $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ existiert mindestens eine ganze Zahl n in dem Intervall

$$x - x^{\frac{14}{25}+\varepsilon} < n \leqslant x,$$

die höchstens zwei Primfaktoren besitzt.

(b) Für $\varepsilon > 0$, $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ und $(k, l) = 1$ existiert mindestens eine ganze Zahl n,

$$n \equiv l \bmod k, \quad 1 \leqslant n \leqslant k^{\frac{25}{11}+\varepsilon},$$

die höchstens zwei Primfaktoren besitzt.

Diese Ergebnisse wurden von Schaal [7] mit etwas abweichenden Methoden auf algebraische Zahlkörper übertragen. Richert [5] erreicht eine weitere Verschärfung der Ergebnisse aus [2], indem er neue Gewichtsfunktionen einführt ([5], Theorem 1). Zudem wird der Bereich der zugelassenen Mengen, auf die der Siebprozeß angewendet wird, erweitert ([5], Theorem A, Theorem B, Einführung der Funktion γ).

Als Anwendungen werden unter anderem folgende Resultate bewiesen:

(c) Für $x \geqslant x_0$ existiert mindestens eine ganze Zahl n in dem Intervall

$$x - x^{6/11} < n \leqslant x,$$

die höchstens zwei Primfaktoren besitzt.

Das Intervall ist hier etwas kürzer als unter (a).

(d) Sei $F(x)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $g \geqslant 1$ mit ganzen Koeffizienten und ohne festen Primteiler.

---

* Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Mathematik der Universität Marburg im September 1973 als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr. W. Schaal, der dieses Thema anregte, danke ich für seine Unterstützung.

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ \Omega(F(n))\leqslant g+1}} 1 \geqslant \frac{2}{3}\prod_p \frac{1-\frac{\varrho(p)}{p}}{1-\frac{1}{p}}\frac{N}{\log N} \quad \text{für} \quad N\geqslant N_0(F).$$

Dabei bedeutet $\varrho(p)$ die Anzahl der Lösungen $\bmod p$ von

$$F(x)\equiv 0 \bmod p$$

und $\Omega(m)$ die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Primteiler von m.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese beiden Resultate auf algebraische Zahlkörper zu übertragen. Dabei folge ich zunächst der Arbeit von Schaal [7] und leite den dortigen Hauptsatz für einen größeren Anwendungsbereich her. Entsprechend der Methode von Richert kann man daraus eine untere Abschätzung gewinnen, die die zu (c) und (d) analogen Ergebnisse für Zahlkörper liefert:

Sei Q der Körper der rationalen Zahlen. Sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über Q mit der Diskriminante d. Die Konjugierten der Zahlen $\xi\in K$ werden mit $\xi^{(i)}$, $i=1,\ldots,n$, bezeichnet; sei $N\xi=\xi^{(1)}\ldots\xi^{(n)}$.

Satz A. *Sei $y_i>0$, $i=1,\ldots,n$, und $y:=y_1\ldots y_n$. Dann gilt: Für $y\geqslant Y_0(K)$ existiert mindestens eine ganze Zahl $\xi\in K$ mit*

$$y_i-y_i^{6/11}<\xi^{(i)}\leqslant y_i, \qquad i=1,\ldots,n,$$

die höchstens zwei Primidealfaktoren besitzt.

Dieses Ergebnis enthält eine leichte Verschärfung von [7], Satz 2.

Satz B. *Sei $y_i\geqslant 1$, $i=1,\ldots,n$, und $y:=y_1\ldots y_n$. Sei $F(x)\in K[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $g\geqslant 1$ mit ganzen algebraischen Koeffizienten und ohne festen Primidealteiler. Sei*

$$M:=\{F(\xi)\,|\,\xi\in K,\ \xi \text{ ganz},\ 0<\xi^{(i)}\leqslant y_i,\ i=1,\ldots,n\}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha\in M\\ \Omega(\alpha)\leqslant g+1}} 1 \geqslant \frac{2}{3}\frac{B}{a_K}\prod_{\mathfrak p} \frac{1-\frac{\gamma(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}}{1-\frac{1}{N\mathfrak p}}\frac{y}{\log y} \quad \textit{für} \quad y\geqslant Y_0(K,F).$$

Dabei bedeutet $\gamma(\mathfrak p)$ die Anzahl der Lösungen $\bmod\mathfrak p$ von

$$F(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak p,$$

$\mathfrak p$ Primideal aus K, a_K das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ von K, $\Omega(\alpha)$ die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Primidealteiler des Hauptideals (α) und $B=1/|\sqrt{d}|$.

Die Einschränkung von K auf total reelle Zahlkörper ist in Satz B leicht zu vermeiden, macht aber die Formulierungen übersichtlicher.

2. Sei $F(x)\in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen algebraischen Koeffizienten und ohne festen Primidealteiler.

(2.1) Seien $y_1,\ldots,y_n$ positive Zahlen, und sei $y:=y_1\ldots y_n$.

(2.2) Seien $h_1,\ldots,h_n$ positive Zahlen mit $h_i\leqslant y_i$, $i=1,\ldots,n$, und sei $h:=h_1\ldots h_n$.

(2.3) Sei $I:=\{\xi\in K|\ \xi \text{ ganz},\ y_i-h_i<\xi^{(i)}\leqslant y_i,\ i=1,\ldots,n\}$.

(2.4) Dann sei $M:=\{F(\xi)|\ \xi\in I\}$.

Sei $\mathfrak a$ ein ganzes Ideal aus K. Man definiere

$$M_{\mathfrak a}:=\{\alpha\in M|\ \alpha\equiv 0 \bmod \mathfrak a\}. \tag{2.5}$$

Auf die Elemente von $M_{\mathfrak a}$ wird später der Siebprozeß angewendet.

(2.6) Sei $\gamma(\mathfrak a)$ die Anzahl der Lösungen $\bmod\mathfrak a$ von $F(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak a$.

Auf die Funktion $\gamma(\mathfrak a)$ wird man bei der Bestimmung von $|M_{\mathfrak a}|$ geführt, denn es gilt:

$$|M_{\mathfrak a}|=\gamma(\mathfrak a)\left\{B\frac{h}{N\mathfrak a}+O\left[\left(\frac{h}{N\mathfrak a}\right)^{1-\frac{1}{n}}+1\right]\right\} \quad \text{mit} \quad B:=\frac{1}{|\sqrt{d}|}. \tag{2.7}$$

Das ergibt sich mit den Bezeichnungen (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) folgendermaßen:

$$|M_{\mathfrak a}|=\sum_{\substack{\xi\in I\\ F(\xi)\equiv 0 \bmod \mathfrak a}} 1=\sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak a\\ F(\beta)\equiv 0 \bmod \mathfrak a}} 1 \sum_{\substack{\xi\in I\\ \xi\equiv\beta \bmod \mathfrak a}} 1.$$

Wegen [6], Hilfssatz 9, ist

$$\sum_{\substack{\xi\in I\\ \xi\equiv\beta \bmod \mathfrak a}} 1=B\frac{h}{N\mathfrak a}+O\left[\left(\frac{h}{N\mathfrak a}\right)^{1-\frac{1}{n}}+1\right].$$

Die dortige Bedingung (85) ist erfüllt, wenn man berücksichtigt, daß man aufgrund einer Bemerkung von Siegel ([8], Hilfssatz 6) durch Multiplikation mit einer geeigneten Einheit von K stets erreichen kann:

$$h_i\leqslant c_1 h^{1/n}, \qquad i=1,\ldots,n, \qquad c_1=c_1(K).$$

Damit und mit (2.6) ergibt sich (2.7).

Fortan bezeichne $\mathfrak{p}$ Primideale aus K. Folgende Eigenschaften von $\gamma(\mathfrak{a})$ ergeben sich sofort:

$\gamma(\mathfrak{a})$ ist multiplikativ, und für alle $\mathfrak{p}$ ist $\gamma(\mathfrak{p}) \leqslant N\mathfrak{p}-1$, $\gamma(\mathfrak{p}) \leqslant g$.

(2.8) Sei θ die Diskriminante von $F(x)$.

Dann läßt sich eine weitere Eigenschaft von $\gamma(\mathfrak{a})$ zeigen:

$$\gamma(\mathfrak{p}^l) = \gamma(\mathfrak{p}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{p}\nmid\theta,\ l \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Für den rationalen Fall sind diese Fragen von Nagell [4] aus führlicher behandelt. Die dortigen Beweise gelten entsprechend auch im Zahlkörper.

Eine Folgerung aus (2.9) ist:

$$\gamma(\mathfrak{p}^l) \leqslant \max_{\mathfrak{p}'|\theta}\{g, \gamma(\mathfrak{p}'^l)\}. \tag{2.10}$$

Es werden noch die folgenden Hilfsfunktionen eingeführt, die im Zusammenhang mit $\gamma(\mathfrak{a})$ stehen:

(2.11) Für $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \mathfrak{p}^{l_\mathfrak{p}}$ sei $G(\mathfrak{a}) := \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \gamma(\mathfrak{p})^{l_\mathfrak{p}}$.

Es gilt: $G(\mathfrak{a})$ ist vollständig multiplikativ und falls $\mu^2(\mathfrak{a}) = 1$ ist, ist $G(\mathfrak{a}) = \gamma(\mathfrak{a})$.

(2.12) Sei $\dfrac{1}{f(\mathfrak{a})} := \dfrac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \dfrac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})}$, bzw. sei für $G(\mathfrak{a}) = 0$

$$\frac{N\mathfrak{a}}{G(\mathfrak{a})f(\mathfrak{a})} := \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \frac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})}.$$

Es ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{N\mathfrak{a}}{G(\mathfrak{a})f(\mathfrak{a})} = \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{a}} \frac{1}{f(\mathfrak{t})} \quad \text{für} \quad \mu^2(\mathfrak{a}) = 1, \tag{2.13}$$

$$\frac{G(\mathfrak{a})f(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}}, \tag{2.14}$$

$$\frac{N\mathfrak{a}}{G(\mathfrak{a})} = \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{a}} f(\mathfrak{t}) \quad \text{für} \quad G(\mathfrak{a}) \neq 0. \tag{2.15}$$

Wie in [7] werde eine Anordnung der Primideale erklärt: Es sei $\mathfrak{p}_0 := (1)$, $\mathfrak{p}_i$ sei vor $\mathfrak{p}_j$, falls $N\mathfrak{p}_i < N\mathfrak{p}_j$. Die Primideale gleicher Norm ordne man beliebig, aber fest an. Durch diese Anordnung lassen sich gewisse Identitäten beweisen. Später kann man sich von dieser Anordnung wieder befreien.

Sei $\mathfrak{k}$ ein ganzes Ideal aus K, ϱ eine ganze Zahl, $\varrho \geqslant 0$, z reell, $z \geqslant 0$. Dann sei:

$$P_\mathfrak{k}^*(\varrho) := \prod_{\substack{i=1\\ \gamma(\mathfrak{p}_i)\neq 0}}^{\varrho}{}' \mathfrak{p}_i, \qquad P_\mathfrak{k}(z) := \prod_{\substack{N\mathfrak{p}<z\\ \gamma(\mathfrak{p})\neq 0}}{}' \mathfrak{p}. \tag{2.16}$$

$$\Gamma_\mathfrak{k}^*(\varrho) := \prod_{i=1}^{\varrho}{}' \left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{p}_i}\right), \qquad \Gamma_\mathfrak{k}(z) := \prod_{N\mathfrak{p}<z}{}' \left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right). \tag{2.17}$$

Der Strich am Produktzeichen soll besagen: $\mathfrak{p}_i \nmid \mathfrak{k}$, bzw. $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{k}$. Die gleiche Beschränkung möge der Strich auch am Summenzeichen bedeuten. Ferner sollen leere Produkte gleich 1, leere Summen gleich 0 gesetzt sein.

Es seien folgende Anzahlfunktionen erklärt:

$$\begin{cases} A_\mathfrak{k}^*(M_\mathfrak{a}, \varrho) := \left|\{\alpha \in M_\mathfrak{a} \mid (\alpha, P_\mathfrak{k}^*(\varrho)) = 1\}\right| & \text{für} \quad (\mathfrak{a}, P_\mathfrak{k}^*(\varrho)) = 1, \\ A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, z) := \left|\{\alpha \in M_\mathfrak{a} \mid (\alpha, P_\mathfrak{k}(z)) = 1\}\right| & \text{für} \quad (\mathfrak{a}, P_\mathfrak{k}(z)) = 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Es ist das Ziel der Paragraphen 2 bis 7, für $A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, z)$ eine obere und eine untere Abschätzung herzuleiten.

Wie man mit Hilfe vollständiger Induktion nach ϱ leicht sieht, gilt für $\varrho \geqslant 0$, $\mathfrak{a}$ ganz mit $(\mathfrak{a}, P_\mathfrak{k}^*(\varrho)) = 1$, folgende Identität:

$$A_\mathfrak{k}^*(M_\mathfrak{a}, \varrho) = |M_\mathfrak{a}| - \sum_{i=1}^{\varrho} A_\mathfrak{k}^*(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i}, i-1). \tag{2.19}$$

3. Zunächst soll $\gamma(\mathfrak{p})$ näher untersucht werden. Es erweist sich, daß $\gamma(\mathfrak{p})$ „im Mittel" 1 ist.

Folgende Sätze aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper werden wesentlich benötigt:

Sei β eine Nullstelle von $F(x)$. Sei $E := K(\beta)$ die zugehörige Körpererweiterung. Mit ϑ bezeichne man die Relativdifferente von E nach K, und es sei θ wie in (2.8) definiert. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus K mit $\mathfrak{p} \nmid \theta\vartheta$.

Dann gilt nach Kummer ([9], Seite 317) mit der in (2.6) definierten Lösungszahl γ:

(3.1) $\gamma(\mathfrak{p})$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Primidealfaktoren ersten Grades bzgl. K von $\mathfrak{p}$ in E.

Nach Landau [3] gilt für $x \geqslant 2$ und beliebige algebraische Zahlkörper L:

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} 1 = \operatorname{li} x + O_L(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}), \qquad c_2 = c_2(L). \tag{3.2}$$

Damit nun läßt sich das folgende Lemma beweisen.

(Die O-Konstanten in diesem und den folgenden Paragraphen hängen von K und $F(x)$ ab, sofern nichts anderes vermerkt ist.)

LEMMA 3.1. *Für $x \geqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant x} \gamma(\mathfrak{p}) = \operatorname{li} x + O(xe^{-c_3\sqrt{\log x}}), \quad c_3 = c_3(K, F). \tag{3.3}$$

Durch partielle Summation ergeben sich hieraus die beiden folgenden Lemmata:

LEMMA 3.2. *Für $x \geqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant x} \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} = \log\log x + D_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{3.4}$$

Hierbei ist D_1 eine Konstante, die von K und $F(x)$ abhängt.

LEMMA 3.3. *Für $x \geqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant x} \gamma(\mathfrak{p}) \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + O(1). \tag{3.5}$$

Für $K = Q$ ist die (3.5) entsprechende Asymptotik in [4] hergeleitet.

Wählt man $F(x) = x$, so wird $\gamma(\mathfrak{p}) = 1$ für alle $\mathfrak{p}$. (3.3), (3.4), (3.5) gehen dann wieder in die von Landau wohlbekannten Beziehungen über.

Aus (3.5) folgt für $2 \leqslant z \leqslant w$:

$$\sum_{z \leqslant N\mathfrak{p} < w} \frac{(\gamma(\mathfrak{p}) - 1)}{N\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} = O(1). \tag{3.6}$$

Weiter ergibt sich daraus durch partielle Summation:

$$\sum_{z \leqslant N\mathfrak{p} < w} \frac{\gamma(\mathfrak{p}) - 1}{N\mathfrak{p}} = O\left(\frac{1}{\log z}\right).$$

Mit dieser Beziehung läßt sich ebenso wie in [5] folgendes Lemma beweisen:

LEMMA 3.4. *Für $s \geqslant 1$, $2 \leqslant z \leqslant w$ gilt:*

$$\prod_{z \leqslant N\mathfrak{p} < w} \frac{1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}} = 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right). \tag{3.7}$$

Man setze:

$$C(F) := \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}}. \tag{3.8}$$

Es ergibt sich insbesondere: $C(F) > 0$.

4. Es sollen die in (2.17) definierten Funktionen $\Gamma_{\mathfrak{k}}^*(\varrho)$ und $\Gamma_{\mathfrak{k}}(z)$ näher untersucht werden.

Sei α_K das Residuum von $\zeta_K(s)$, γ_0 die Eulersche Konstante. Dann gilt nach [7], Seite 274:

$$\prod_{N\mathfrak{p} < x} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) = \frac{e^{-\gamma_0}}{\alpha_K} \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right). \tag{4.1}$$

Sei $\omega(\mathfrak{k})$ die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{k}$. Dann gilt ebenfalls nach [7], Seite 272:

$$\omega(\mathfrak{k}) = O\left(\frac{\log N\mathfrak{k}}{\log\log 3N\mathfrak{k}}\right). \tag{4.2}$$

LEMMA 4.1. *Für $z \geqslant 2$, $\log N\mathfrak{k} \leqslant \frac{z}{\log z}$ gilt:*

$$\Gamma_{\mathfrak{k}}(z) = \frac{N\mathfrak{k}}{G(\mathfrak{k})f(\mathfrak{k})} C(F) \frac{e^{-\gamma_0}}{\alpha_K} \frac{1}{\log z} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\}. \tag{4.3}$$

Beweis.

$$\Gamma_{\mathfrak{k}}(z) = \prod_{N\mathfrak{p} < z}' \left(1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)$$

$$= \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{k}} \left(1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1} \prod_{\substack{N\mathfrak{p} \geqslant z \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}} \left(1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right) C(F) \prod_{N\mathfrak{p} \geqslant z} \frac{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}}{1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}} \prod_{N\mathfrak{p} < z} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right).$$

Mit (2.12), (3.7), (3.8) und (4.1) folgt daraus:

$$\Gamma_{\mathfrak{k}}(z) = \frac{N\mathfrak{k}}{G(\mathfrak{k})f(\mathfrak{k})} \prod_{\substack{N\mathfrak{p} \geqslant z \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}} \left(1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right) \frac{C(F)}{1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)} \left\{\frac{e^{-\gamma_0}}{\alpha_K \log z} + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\}.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\prod_{\substack{N\mathfrak{p} \geqslant z \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}} \left(1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right).$$

Für $z < g$ ist das erfüllt.

Für $z \geqslant g$ gilt:

$$\prod_{\substack{N\mathfrak{p} \geqslant z \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}} \left(1 - \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right) \geqslant \left(1 - \frac{g}{z}\right)^{\omega(\mathfrak{k})} \geqslant 1 - \frac{g\omega(\mathfrak{k})}{z}.$$

Mit (4.2) und der Vorraussetzung von Lemma 4.1 folgt weiter:

$$1-\frac{g\omega(\mathfrak{k})}{z}\geqslant 1-c_4 g\frac{\log N\mathfrak{k}}{z}\geqslant 1-c_4 g\frac{1}{\log z},\qquad c_4=c_4(K).$$

Insgesamt folgt (4.3).

Korollar 4.1. *Für* $\varrho\geqslant 1$, $\log N\mathfrak{k}\leqslant\frac{N\mathfrak{p}_\varrho}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}$ *gilt:*

$$\Gamma_{\mathfrak{k}}^{*}(\varrho)=\frac{N\mathfrak{k}}{G(\mathfrak{k})f(\mathfrak{k})}C(F)\frac{e^{-\gamma_0}}{\alpha_K}\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right\}. \tag{4.4}$$

Dies ergibt sich aus (4.3), wenn man beachtet, daß höchstens n ve schiedene Primideale die gleiche Norm besitzen.

Lemma 4.2. *Für alle ganzen Ideale* $\mathfrak{k}$ *gilt:*

$$\frac{N\mathfrak{k}}{G(\mathfrak{k})f(\mathfrak{k})}=O(\log\log 3N\mathfrak{k}). \tag{4.5}$$

Beweis. Sei $\omega(\mathfrak{k})$ die Funktion aus (4.2). Man kann sich auf d Fall $\omega(\mathfrak{k})\geqslant 1$ beschränken.

Es ist

$$\prod_{\substack{N\mathfrak{p}\geqslant\omega(\mathfrak{k})\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{k}}}\left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}=O(1),$$

denn

$$\left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}=1+\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})}$$

und

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\geqslant\omega(\mathfrak{k})\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{k}}}\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})}\leqslant c_5\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\geqslant\omega(\mathfrak{k})\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{k}}}\frac{1}{N\mathfrak{p}}\leqslant\frac{c_5}{\omega(\mathfrak{k})}\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{k}}1=c_5,\qquad c_5=c_5(F).$$

Es ist nach (2.17), (4.3) und (4.2)

$$\prod_{\substack{N\mathfrak{p}<\omega(\mathfrak{k})\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{k}}}\left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}=O(\log\log 3N\mathfrak{k}).$$

Damit folgt aus (2.12) die Behauptung (4.5).

Folgerungen aus (4.3), (4.4), (4.5) sind:

Lemma 4.3. *Für* $z\geqslant 2$, $\log N\mathfrak{k}\leqslant\frac{z}{\log z}$ *gilt:*

$$\Gamma_{\mathfrak{k}}(z)=O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log z}\right).$$

Korollar 4.3. *Für* $\varrho\geqslant 1$, $\log N\mathfrak{k}\leqslant\frac{N\mathfrak{p}_\varrho}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}$ *gilt:*

$$\Gamma_{\mathfrak{k}}^{*}(\varrho)=O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right).$$

5. In diesem Paragraphen soll eine Asymptotik für $\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\frac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}$ hergeleitet werden. (Man vergleiche dazu [1], Seite 147.)

Lemma 5.1. *Für* $x\geqslant 1$ *gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}G(\mathfrak{a})=\frac{\alpha_K}{C(F)}x+O(x^{1-\varepsilon}),\qquad 0<\varepsilon\leqslant\tfrac{1}{2},\ \varepsilon=\varepsilon(K,F). \tag{5.1}$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{\mathfrak{a}}\frac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}\quad\text{für}\quad s>1. \tag{5.2}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}&\\ &=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{\gamma(\mathfrak{p})}}{1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\theta\vartheta}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-\gamma(\mathfrak{p})}\prod_{\mathfrak{p}|\theta\vartheta}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-\gamma(\mathfrak{p})}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Es werden die Produkte der rechten Seite betrachtet.

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{\gamma(\mathfrak{p})}}{1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}\quad\text{ist absolut konvergent für } s>\tfrac{1}{2}. \tag{5.4}$$

Sei β eine Nullstelle von $F(x)$, $E:=K(\beta)$. N_E bezeichne die Norm von E nach Q.

Es gilt wegen (3.1):

$$\prod_{\mathfrak{p}\nmid\theta\vartheta}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-\gamma(\mathfrak{p})}=\zeta_E(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(m)}{m^s}\quad\text{für}\quad s>1, \tag{5.5}$$

wobei $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(m)}{m^s}$ absolut konvergent ist für $s>\frac{1}{2}$.

Aus (5.2), (5.3), (5.4) und (5.5) ergibt sich:

$$\sum_{\mathfrak a} \frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a^s} = \zeta_E(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b(m)}{m^s} \quad \text{für} \quad s>1, \tag{5.6}$$

wobei $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b(m)}{m^s}$ absolut konvergent ist für $s>\frac{1}{2}$.

Sei

$$T(d) := |\{\mathfrak a' \subset E \mid N_E\mathfrak a' = d\}|.$$

Dann liefert (5.6):

$$\sum_{N\mathfrak a\leqslant x} G(\mathfrak a) = \sum_{m\leqslant x} b(m)\sum_{d\leqslant x/m} T(d).$$

Es gilt: $\sum_{d\leqslant x} T(d) = \alpha_E x + O(x^{1-\frac{1}{ng+1}})$, wobei α_E das Residuum von $\zeta_E(s)$ ist.

Damit folgt:

$$\sum_{N\mathfrak a\leqslant x} G(\mathfrak a) = D_2 x + O(x^{1-\varepsilon}) \quad \text{mit} \quad D_2 := \alpha_E\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b(m)}{m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{ng+1}. \tag{5.7}$$

Es soll nun die Konstante D_2 bestimmt werden.

Es ist

$$D_2 = \lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{N\mathfrak a\leqslant x} G(\mathfrak a)}{x} = \lim_{s\to 1+}(s-1)\sum_{\mathfrak a}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a^s}$$

$$= \lim_{s\to 1+}\frac{\alpha_K}{\zeta_K(s)}\sum_{\mathfrak a}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a^s} = \alpha_K\lim_{s\to 1+}\prod_{\mathfrak p}\frac{1-\frac{1}{N\mathfrak p^s}}{1-\frac{\gamma(\mathfrak p)}{N\mathfrak p^s}} = \frac{\alpha_K}{C(F)}.$$

Aus (5.7) folgt damit die Behauptung (5.1).

Partielle Summation und (5.1) liefern:

Lemma 5.2. *Für $x\geqslant 1$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak a\leqslant x}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a} = \frac{\alpha_K}{C(F)}\log x + O(1). \tag{5.8}$$

Lemma 5.3. *Für $x\geqslant 1$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak k$ aus K gilt:*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak a\leqslant x\\ (\mathfrak a,\mathfrak k)=1}}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a} = \frac{\alpha_K}{C(F)}\frac{f(\mathfrak k)G(\mathfrak k)}{N\mathfrak k}\log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak k)^2\big). \tag{5.9}$$

Beweis.

$$\sum_{\substack{N\mathfrak a\leqslant x\\ (\mathfrak a,\mathfrak k)=1}}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a} = \sum_{N\mathfrak a\leqslant x}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a}\sum_{\mathfrak t\mid(\mathfrak a,\mathfrak k)}\mu(\mathfrak t) = \sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{G(\mathfrak t)\mu(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}\sum_{N\mathfrak c\leqslant\frac{x}{N\mathfrak t}}\frac{G(\mathfrak c)}{N\mathfrak c}$$

$$= \sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{G(\mathfrak t)\mu(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}\left\{\frac{\alpha_K}{C(F)}\log\frac{x}{N\mathfrak t} + R(x,\mathfrak t)\right\}.$$

Der letzte Schritt folgt mit (5.8), wobei

$$R(x,\mathfrak t) := \begin{cases} O(1), & \text{falls} \quad \frac{x}{N\mathfrak t}\geqslant 1,\\[4pt] \frac{\alpha_K}{C(F)}\log\frac{N\mathfrak t}{x}, & \text{falls} \quad \frac{x}{N\mathfrak t}<1.\end{cases}$$

Nach (2.14) und (2.12) ist

$$\sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{G(\mathfrak t)\mu(\mathfrak t)}{N\mathfrak t} = \frac{f(\mathfrak k)G(\mathfrak k)}{N\mathfrak k} = \prod_{\mathfrak p\mid\mathfrak k}\left(1-\frac{\gamma(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right).$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak a\leqslant x\\ (\mathfrak a,\mathfrak k)=1}}\frac{G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a} = \frac{\alpha_K}{C(F)}\frac{f(\mathfrak k)G(\mathfrak k)}{N\mathfrak k}\log x + O\left(\sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{\mu^2(\mathfrak t)G(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}\log N\mathfrak t\right) + O(1). \tag{5.10}$$

Nun wird das Restglied behandelt:

$$\sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{\mu^2(\mathfrak t)G(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}\log N\mathfrak t = \sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{\mu^2(\mathfrak t)G(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}\sum_{\mathfrak p\mid\mathfrak t}\log N\mathfrak p$$

$$= \sum_{\mathfrak p\mid\mathfrak k}\log N\mathfrak p\,\frac{\gamma(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\sum_{\substack{\mathfrak t\mid\mathfrak k\\ (\mathfrak t,\mathfrak p)=1}}\frac{\mu^2(\mathfrak t)G(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}$$

$$\leqslant \sum_{\mathfrak p\mid\mathfrak k}\log N\mathfrak p\,\frac{\gamma(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\sum_{\mathfrak t\mid\mathfrak k}\frac{\mu^2(\mathfrak t)G(\mathfrak t)}{N\mathfrak t}.$$

Die beiden rechten Summen der letzten Zeile werden jeweils zu $O(\log\log 3N\mathfrak k)$.

Damit ergibt sich aus (5.10) die Behauptung (5.9).

Lemma 5.4. *Für $x\geqslant 1$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak k$ aus K gilt:*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak a\leqslant x\\ (\mathfrak a,\mathfrak k)=1}}\frac{\mu^2(\mathfrak a)G(\mathfrak a)}{N\mathfrak a} = \frac{\alpha_K}{C(F)}\cdot\frac{\prod_{\mathfrak p}\left(1-\frac{G(\mathfrak p^2)}{N\mathfrak p^2}\right)}{\prod_{\mathfrak p\mid\mathfrak k}\left(1+\frac{G(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right)}\log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak k)^2\big). \tag{5.11}$$

Beweis.

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}}\frac{\mu^2(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}}\frac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{t}^2|\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{t})=\sum_{\substack{N\mathfrak{t}\leqslant\sqrt{x}\\(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}}\frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t}^2)}{N\mathfrak{t}^2}\sum_{\substack{N\mathfrak{c}\leqslant\frac{x}{N\mathfrak{t}^2}\\(\mathfrak{c},\mathfrak{f})=1}}\frac{G(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}}.$$

Mit Lemma 5.3 folgt:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}}\frac{\mu^2(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}=\frac{\alpha_K}{C(F)}\frac{f(\mathfrak{f})G(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}\log x\sum_{(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}\frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t}^2)}{N\mathfrak{t}^2}-\tag{a}$$

$$-\frac{\alpha_K}{C(F)}\frac{f(\mathfrak{f})G(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}\log x\sum_{\substack{(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1\\N\mathfrak{t}>\sqrt{x}}}\frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t}^2)}{N\mathfrak{t}^2}-\tag{b}$$

$$-\frac{\alpha_K}{C(F)}\frac{f(\mathfrak{f})G(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}\sum_{\substack{N\mathfrak{t}\leqslant\sqrt{x}\\(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}}\frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t}^2)}{N\mathfrak{t}^2}\log N\mathfrak{t}^2+\tag{c}$$

$$+O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big)\sum_{\substack{N\mathfrak{t}\leqslant\sqrt{x}\\(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}}\frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t}^2)}{N\mathfrak{t}^2}.\tag{d}$$

Mit (2.12) folgt:

$$\frac{f(\mathfrak{f})G(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}\sum_{(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}\frac{\mu(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t}^2)}{N\mathfrak{t}^2}=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{G(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^2}\right)\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\left(1+\frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

Damit wird Zeile (a) zum Hauptglied in (5.11).

Für $\mu^2(\mathfrak{t})=1$ ist

$$G(\mathfrak{t}^2)\leqslant g^{2\omega(\mathfrak{t})}\leqslant g^{2c_4\frac{\log N\mathfrak{t}}{\log\log 3N\mathfrak{t}}},$$

also

$$G(\mathfrak{t}^2)\leqslant c_7N\mathfrak{t}^{\varepsilon}\quad\text{für}\quad\varepsilon>0,\ c_7=c_7(K,F,\varepsilon).\tag{5.12}$$

Damit wird, wegen $\dfrac{f(\mathfrak{f})G(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}=O(1)$, Zeile (b) zu $O(1)$, Zeile (c) zu $O(1)$ und Zeile (d) zu $O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big)$. Es folgt (5.11).

Sei

$$\mathfrak{d}_i=\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}_i}\mathfrak{p}^{l_{i\mathfrak{p}}}\quad\text{für}\quad i=1,2,$$

und sei

$$[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]:=\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\mathfrak{p}^{\max(l_{1\mathfrak{p}},l_{2\mathfrak{p}})},\qquad(\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2):=\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\mathfrak{p}^{\min(l_{1\mathfrak{p}},l_{2\mathfrak{p}})}.$$

LEMMA 5.5. *Für $t\geqslant 1$, $\varrho\geqslant 0$ gilt:*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{d}_i\leqslant t\\\mathfrak{d}_i|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)\\i=1,2}}\frac{G([\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2])}{N[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}=O\{[\min(\log t,\log N\mathfrak{p}_\varrho)+1]^3\}.\tag{5.13}$$

Beweis. Wegen $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2=[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2](\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2)$ und (2.15) ist

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{d}_i\leqslant t\\\mathfrak{d}_i|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)\\i=1,2}}\frac{G([\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2])}{N[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}=\sum_{\substack{N\mathfrak{d}_i\leqslant t\\\mathfrak{d}_i|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)\\i=1,2}}\frac{G(\mathfrak{d}_1)G(\mathfrak{d}_2)N(\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2)}{N\mathfrak{d}_1N\mathfrak{d}_2G((\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2))}\tag{5.14}$$

$$=\sum_{\substack{N\mathfrak{d}_i\leqslant t\\\mathfrak{d}_i|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)\\i=1,2}}\frac{G(\mathfrak{d}_1)G(\mathfrak{d}_2)}{N\mathfrak{d}_1N\mathfrak{d}_2}\sum_{\mathfrak{a}|(\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2)}f(\mathfrak{a})=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant t\\\mathfrak{a}|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)}}\frac{f(\mathfrak{a})G^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^2}\Bigg\{\sum_{\substack{N\mathfrak{c}\leqslant\frac{t}{N\mathfrak{a}}\\\mathfrak{c}|P_{\mathfrak{f}\mathfrak{a}}^*(\varrho)}}\frac{G(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}}\Bigg\}^2.$$

Mit (5.8) und $\dfrac{f(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}=O(1)$ folgt daraus:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{d}_i\leqslant t\\\mathfrak{d}_i|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)\\i=1,2}}\frac{G([\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2])}{N[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}=O\Bigg\{\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t}\frac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\left[\frac{\alpha_K}{C(F)}\log\frac{t}{N\mathfrak{a}}+O(1)\right]^2\Bigg\}\tag{5.15}$$

$$=O\{[\log t+1]^3\}.$$

Andererseits ist für $\varrho\geqslant 1$

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{c}\leqslant t\\\mathfrak{c}|P_{\mathfrak{b}}^*(\varrho)}}\frac{G(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}}\leqslant\prod_{\substack{i=1\\\mathfrak{p}_i\nmid\mathfrak{b}}}^{\varrho}\left(1+\frac{G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{p}_i}\right)\leqslant\prod_{i=1}^{\varrho}\left(1-\frac{G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{p}_i}\right)^{-1}=\frac{1}{P_1^*(\varrho)}=O(\log N\mathfrak{p}_\varrho).$$

Dies ergibt mit (5.14):

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{d}_i\leqslant t\\\mathfrak{d}_i|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)\\i=1,2}}\frac{G([\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2])}{N[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}=O\Bigg\{\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant t\\\mathfrak{a}|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)}}\frac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2\Bigg\}=O\{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^3\}.$$

Berücksichtigt man noch den Fall $\varrho=0$, so folgt mit (5.15) die Behauptung (5.13).

6. Es wird die Funktion $\dfrac{1}{f(\mathfrak{a})}$ betrachtet.

Lemma 6.1. *Für $x \geqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{f(\mathfrak{p})} = \log\log x + D_3 + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{6.1}$$

Dabei ist D_3 eine von K und $F(x)$ abhängige Konstante.

Beweis. Nach (2.12) ist

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{f(\mathfrak{p})} = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})} = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} + D_4 - \sum_{N\mathfrak{p}>x} \frac{\gamma^2(\mathfrak{p})}{\big(N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})\big)N\mathfrak{p}}$$

mit

$$D_4 := \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\gamma^2(\mathfrak{p})}{\big(N\mathfrak{p}-\gamma(\mathfrak{p})\big)N\mathfrak{p}}.$$

Daraus folgt mit (3.4) die Behauptung (6.1); es ist $D_3 := D_1 + D_4$.

Lemma 6.2. *Für $x \geqslant 2$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak{k}$ aus K gilt:*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{f(\mathfrak{a})} = \frac{a_K}{C(F)} \frac{f(\mathfrak{k})G(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big). \tag{6.2}$$

Beweis.

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{f(\mathfrak{a})} = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \sum_{q(\mathfrak{c})|\mathfrak{a}} \frac{G(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}}$$

$$\text{mit } q(\mathfrak{c}) := \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} \mathfrak{p}$$

$$= \sum_{\substack{Nq(\mathfrak{c})\leqslant x\\ (\mathfrak{c},\mathfrak{k})=1}} \frac{G(\mathfrak{c})G\big(q(\mathfrak{c})\big)}{N\mathfrak{c}Nq(\mathfrak{c})} \sum_{\substack{N\mathfrak{t}\leqslant \frac{x}{Nq(\mathfrak{c})}\\ (\mathfrak{t},\mathfrak{k}\mathfrak{c})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})G(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}}.$$

Nun wird (5.11) eingesetzt. Bei den weiteren Umformungen ist folgende Gleichung zu beachten:

$$\sum_{\mathfrak{c}} \frac{G(\mathfrak{c})G\big(q(\mathfrak{c})\big)}{N\mathfrak{c}Nq(\mathfrak{c})} = \sum_{\mathfrak{c}} \frac{G^2\big(q(\mathfrak{c})\big)}{Nq(\mathfrak{c})^2}\mu^2(\mathfrak{c}) \sum_{\substack{\mathfrak{d}\\ q(\mathfrak{d})|q(\mathfrak{c})}} \frac{G(\mathfrak{d})}{N\mathfrak{d}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{c}} \frac{G^2(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}^2}\mu^2(\mathfrak{c}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} \left(1-\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

Ferner gelten wegen (5.12) die Abschätzungen:

$$\sum_{\substack{Nq(\mathfrak{c})>x\\ (\mathfrak{c},\mathfrak{k})=1}} \frac{G(\mathfrak{c})G\big(q(\mathfrak{c})\big)}{N\mathfrak{c}Nq(\mathfrak{c})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{Nq(\mathfrak{c})\leqslant x\\ (\mathfrak{c},\mathfrak{k})=1}} \frac{G(\mathfrak{c})G\big(q(\mathfrak{c})\big)}{N\mathfrak{c}Nq(\mathfrak{c})} \log N\mathfrak{c} = O(1).$$

Damit folgt dann (6.2).

Lemma 6.2 und Lemma 5.4 lassen sich für $\mathfrak{k} = (1)$ mit den Überlegungen aus dem Beweis zu Lemma 5.1 auch direkt herleiten.

7. In den Paragraphen 2 bis 6 sind die notwendigen Hilfssätze bereitgestellt worden, um die weitere Rechnung analog wie bei Schaal [7] fortzuführen.

Definiert man für $\varrho \geqslant 0$, $x \geqslant 1$

$$S_{\mathfrak{k}}^*(x, \varrho) := \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}|P_{\mathfrak{k}}(\varrho)}} \frac{1}{f(\mathfrak{a})}, \tag{7.1}$$

so lassen sich alle Sätze aus [7] entsprechend übertragen, indem man die Funktionen wie folgt ersetzt:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\mathfrak{a}) & \text{durch} & f(\mathfrak{a}), \\ S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) & \text{durch} & S_{\mathfrak{k}}^*(x, \varrho), \\ R_{\mathfrak{k}}(\varrho) & \text{durch} & \Gamma_{\mathfrak{k}}^*(\varrho), \\ \dfrac{1}{N\mathfrak{a}} & \text{durch} & \dfrac{G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}. \end{array}$$

Ferner ersetze man wegen der größeren Allgemeinheit y durch h. Die Einführung von $G(\mathfrak{a})$ bot sich an wegen der Identität (5.2). Die analytischen Hilfsfunktionen aus [7] können unverändert übernommen werden. Speziell auch die Funktionen $\Lambda(u)$ and $\lambda(u)$, die die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{array}{l} \Lambda(u) \text{ fällt monoton gegen } 1, \\ \lambda(u) \text{ wächst monoton gegen } 1. \end{array} \tag{7.2}$$

Definiert man für $t > 1$, $\varrho \geqslant 0$ und ganze Ideale $\mathfrak{d}$ aus K

$$\lambda_{\mathfrak{d}} := \frac{\mu(\mathfrak{d})N\mathfrak{d}\,S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}^*\left(\dfrac{t}{N\mathfrak{d}}, \varrho\right)}{f(\mathfrak{d})G(\mathfrak{d})S_{\mathfrak{k}}^*(t, \varrho)}, \tag{7.3}$$

so ergibt sich:

$$\lambda_1 = 1, \tag{7.4}$$

$$\text{und für } \mathfrak{d}|P_{\mathfrak{k}}^*(\varrho) \text{ ist } |\lambda_{\mathfrak{d}}| \leqslant \mu^2(\mathfrak{d}). \tag{7.5}$$

Beweis zu (7.5).

$$S^*_{\mathfrak t}(t,\varrho)=\sum_{\substack{N\mathfrak a\le t\\ \mathfrak a|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)}}\frac{1}{f(\mathfrak a)}=\sum_{\mathfrak t|\mathfrak d}\sum_{\substack{N\mathfrak a\le t\\ \mathfrak a|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ (\mathfrak a,\mathfrak d)=\mathfrak t}}\frac{1}{f(\mathfrak a)}$$

$$=\sum_{\substack{\mathfrak t|\mathfrak d\\ \mathfrak t|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)}}\frac{1}{f(\mathfrak t)}\sum_{\substack{N\mathfrak c\le\frac{t}{N\mathfrak t}\\ \mathfrak c|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ (\mathfrak c,\mathfrak d)=1}}\frac{1}{f(\mathfrak c)}=\sum_{\substack{\mathfrak t|\mathfrak d\\ \mathfrak t|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)}}\frac{1}{f(\mathfrak t)}S^*_{\mathfrak t\mathfrak d}\left(\frac{t}{N\mathfrak t},\varrho\right)$$

$$\geqslant S^*_{\mathfrak t\mathfrak d}\left(\frac{t}{N\mathfrak d},\varrho\right)\sum_{\substack{\mathfrak t|\mathfrak d\\ \mathfrak t|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)}}\frac{1}{f(\mathfrak t)}=S^*_{\mathfrak t\mathfrak d}\left(\frac{t}{N\mathfrak d},\varrho\right)\sum_{\mathfrak t|\mathfrak d}\frac{1}{f(\mathfrak t)}$$

$$=S^*_{\mathfrak t\mathfrak d}\left(\frac{t}{N\mathfrak d},\varrho\right)\frac{N\mathfrak d}{G(\mathfrak d)f(\mathfrak d)},\quad \text{nach (2.13)}.$$

Mit (7.3) folgt daraus die Behauptung (7.5).

Weiter ist für $\varrho\geqslant 0$, $N\mathfrak t\leqslant t$

$$\sum_{\substack{\mathfrak d|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ \mathfrak t|\mathfrak d}}\frac{\lambda_{\mathfrak d}G(\mathfrak d)}{N\mathfrak d}=\frac{\mu(\mathfrak t)}{f(\mathfrak t)S^*_{\mathfrak t}(t,\varrho)}. \tag{7.6}$$

Nun kann man eine erste obere Abschätzung für $A_{\mathfrak t}^*(M_{\mathfrak a},\varrho)$ herleiten. Zunächst ist wegen (7.4) und (7.5):

$$A^*_{\mathfrak t}(M_{\mathfrak a},\varrho)=\sum_{\substack{\xi\in M_{\mathfrak a}\\ (\xi,P^*_{\mathfrak t}(\varrho))=1}}1=\sum_{\xi\in M_{\mathfrak a}}\Big\{\sum_{\mathfrak d|(\xi,P^*_{\mathfrak t}(\varrho))}\lambda_{\mathfrak d}\Big\}^2=\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}|M_{\mathfrak a[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}|.$$

Daraus folgt mit (2.10):

$$A^*_{\mathfrak t}(M_{\mathfrak a},\varrho)\leqslant Bh\frac{\gamma(\mathfrak a)}{N\mathfrak a}\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}\frac{\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}G([\mathfrak d_1,\mathfrak d_2])}{N[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}+ \tag{7.7}$$

$$+O\Big\{\gamma(\mathfrak a)\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}|\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}|G([\mathfrak d_1,\mathfrak d_2])\Big[\Big(\frac{h}{N\mathfrak a N[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}\Big)^{1-\frac1n}+1\Big]\Big\}.$$

Es wird das Hauptglied aus (7.7) betrachtet:

$$\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}\frac{\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}G([\mathfrak d_1,\mathfrak d_2])}{N[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}=\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}\frac{\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}G(\mathfrak d_1)G(\mathfrak d_2)}{N\mathfrak d_1N\mathfrak d_2}\sum_{\mathfrak c|(\mathfrak d_1,\mathfrak d_2)}f(\mathfrak c)$$

$$=\sum_{\mathfrak c|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)}f(\mathfrak c)\Big[\sum_{\substack{\mathfrak d|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ \mathfrak c|\mathfrak d}}\frac{\lambda_{\mathfrak d}G(\mathfrak d)}{N\mathfrak d}\Big]^2.$$

Es ist

$$\Big[\sum_{\substack{\mathfrak d|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ \mathfrak c|\mathfrak d}}\frac{\lambda_{\mathfrak d}G(\mathfrak d)}{N\mathfrak d}\Big]^2=0,\quad\text{falls}\quad N\mathfrak c>t.$$

Also gilt weiter mit (7.6):

$$\sum_{\mathfrak c|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)}f(\mathfrak c)\Big[\sum_{\substack{\mathfrak d|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ \mathfrak c|\mathfrak d}}\frac{\lambda_{\mathfrak d}G(\mathfrak d)}{N\mathfrak d}\Big]^2=\sum_{\substack{\mathfrak c|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ N\mathfrak c\le t}}f(\mathfrak c)\frac{\mu^2(\mathfrak c)}{f^2(\mathfrak c)S^{*2}_{\mathfrak t}(t,\varrho)}=\frac{1}{S^*_{\mathfrak t}(t,\varrho)}. \tag{7.8}$$

Nun wird das Restglied aus (7.7) abgeschätzt:

$$\text{(i)}\quad\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}|\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}|G([\mathfrak d_1,\mathfrak d_2])\Big(\frac{1}{N[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}\Big)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$=O\Big\{\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2\\ N\mathfrak d_i\le t}}|\lambda_{\mathfrak d_1}\lambda_{\mathfrak d_2}|G(\mathfrak d_1)^{\frac1n}G(\mathfrak d_2)^{\frac1n}\Big(\frac{G([\mathfrak d_1,\mathfrak d_2])}{N[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}\Big)^{\frac{n-1}{n}}\Big\},$$

das ist nach der Hölderschen Ungleichung:

$$=O\Big\{\Big[\sum_{\substack{\mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2\\ N\mathfrak d_i\le t}}\big(|\lambda_{\mathfrak d_1}||\lambda_{\mathfrak d_2}|G(\mathfrak d_1)^{\frac1n}G(\mathfrak d_2)^{\frac1n}\big)^n\Big]^{\frac1n}\Big[\sum_{\substack{N\mathfrak d_i\le t\\ \mathfrak d_i|P^*_{\mathfrak t}(\varrho)\\ i=1,2}}\frac{G([\mathfrak d_1,\mathfrak d_2])}{N[\mathfrak d_1,\mathfrak d_2]}\Big]^{\frac{n-1}{n}}\Big\},$$

nach (7.5), (5.8), (5.13):

$$=O\Big\{\Big[\sum_{N\mathfrak d\le t}\mu^2(\mathfrak d)G(\mathfrak d)\Big]^{\frac2n}[\min(\log t,\log N\mathfrak p_\varrho)+1]^{3\frac{n-1}{n}}\Big\}$$

$$=O\{t^{\frac2n}[\min(\log t,\log N\mathfrak p_\varrho)+1]^{3\frac{n-1}{n}}\}. \tag{7.9}$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i | P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho) \\ i=1,2}} |\lambda_{\mathfrak{d}_1}\lambda_{\mathfrak{d}_2}| G([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]) = O\Big\{\Big[\sum_{\substack{N\mathfrak{d}\leqslant t \\ \mathfrak{d}|P_{\mathfrak{f}}^*(\varrho)}} |\lambda_{\mathfrak{d}}| G(\mathfrak{d})\Big]^2\Big\}$$

$$(7.10) \qquad = O\Big\{\Big[\sum_{N\mathfrak{d}\leqslant t} G(\mathfrak{d})\Big]^2\Big\} = O(t^2).$$

Aus (7.7), (7.8), (7.10) folgt nun die Abschätzung:

$$A_{\mathfrak{f}}^*(M_{\mathfrak{a}}, \varrho) = Bh\frac{\gamma(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\frac{1}{S_{\mathfrak{f}}^*(t, \varrho)} + O\Big\{\gamma(\mathfrak{a})\Big(\frac{h}{N\mathfrak{a}}\Big)^{1-\frac{1}{n}} t^{\frac{2}{n}}[\min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho)+1]^{3\frac{n-1}{n}}\Big\} + O\{\gamma(\mathfrak{a})t^2\}.$$

Aufgrund der Identität (2.8) kann man aus oberen Abschätzungen untere gewinnen und umgekehrt.

Folgt man dem Verfahren in [7], so kommt man zu folgenden Resultaten: (Man vergleiche dazu [7], Korollar 4.2, Seite 306 und [5], Theorem A und Theorem B, Seite 7.)

Satz 1. *Es seien $\Lambda(u)$ und $\lambda(u)$ die Funktionen aus* [7], (1.4). *Sei h definiert wie in* (2.2), *sei $h^* := \frac{h}{N\mathfrak{a}}$, $z \leqslant h$ und $(\mathfrak{a}, P_{\mathfrak{f}}(z)) = 1$. Dann gilt:*

$$(7.11) \qquad A_{\mathfrak{f}}(M_{\mathfrak{a}}, z) \leqslant Bh^*\Gamma_{\mathfrak{f}}(z)\gamma(\mathfrak{a})\Big\{\Lambda\Big(\frac{\log h^*}{\log z}\Big) + O\Big(\frac{(\log\log 3N\mathfrak{f})^6}{(\log\log 3h^*)^7}\Big)\Big\},$$

$$(7.12) \qquad A_{\mathfrak{f}}(M_{\mathfrak{a}}, z) \geqslant Bh^*\Gamma_{\mathfrak{f}}(z)\gamma(\mathfrak{a})\Big\{\lambda\Big(\frac{\log h^*}{\log z}\Big) - O\Big(\frac{(\log\log 3N\mathfrak{f})^6}{(\log\log 3h^*)^7}\Big)\Big\}.$$

Dabei hängen die O-Konstanten von K und $F(x)$ ab.

Aus diesem Satz läßt sich durch eine Überlegung analog [7], § 5, folgende Erweiterung von (7.11) erreichen:

Für $z \leqslant h^{*c_8}$ und $(\mathfrak{a}, P_{\mathfrak{f}}(z)) = 1$ gilt:

$$(7.13) \qquad A_{\mathfrak{f}}(M_{\mathfrak{a}}, z) \leqslant Bh^*\Gamma_{\mathfrak{f}}(z)\gamma(\mathfrak{a})\Big\{\Lambda\Big(\frac{\log h^*}{\log z}\Big) + O\Big(\frac{(\log\log 3N\mathfrak{f})^6}{(\log\log 3h^*)^7}\Big)\Big\}.$$

Dabei hängt die O-Konstante von K, $F(x)$ und c_8 ab.

8. Aus Satz 1 gewinnt man nun den folgenden

Satz 2. *Es sei*

(8.1) $0 \leqslant \sigma \leqslant c_9$,

(8.2) $1 < u < v$; *b_i bezeichne Konstanten, die außer von K und $F(x)$ noch von u und v abhängen,*

$$(8.3) \qquad W_{\mathfrak{f}}(M, v, u, \sigma) := \sum_{\substack{\alpha\in M \\ (\alpha, P_{\mathfrak{f}}(h^{1/v}))=1}}^{*} \Big\{1 - \sigma \sum_{\substack{h^{1/v}\leqslant N\mathfrak{p}<h^{1/u} \\ \mathfrak{p}|\alpha}}' \Big(1 - u\frac{\log N\mathfrak{p}}{\log h}\Big)\Big\},$$

(8.4) *$\sum^*$ bedeute, daß nur über α's summiert wird, für die gilt: $\alpha \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2$ für $h^{1/v} \leqslant N\mathfrak{p} < h^{1/u}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$.*

Dann gilt:

$$(8.5) \qquad W_{\mathfrak{f}}(M, v, u, \sigma) \geqslant Bh\Gamma_{\mathfrak{f}}(h^{1/v})\Big[\lambda(v) - \sigma\int_u^v \Lambda\Big(v\Big(1-\frac{1}{t}\Big)\Big)\Big(1-\frac{u}{t}\Big)\frac{dt}{t} - b_1\frac{(\log\log 3N\mathfrak{f})^6}{(\log\log 3h)^7}\Big].$$

Beweis. Falls $h \leqslant H_0$ ist, so kann wegen (7.2) b_1 so groß gewählt werden, daß (8.5) erfüllt ist. Sei also $h > H_0(u, v)$.

Sei $z_1 := h^{1/v}$, $z_2 := h^{1/u}$. Wegen (8.4) folgt:

$$(8.6) \qquad W_{\mathfrak{f}}(M, v, u, \sigma) \geqslant A_{\mathfrak{f}}(M, z_1) - \sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2}' \sum_{\substack{\alpha\in M \\ \alpha\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} 1 - \sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2}' \Big(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log z_2}\Big) A_{\mathfrak{f}}(M_{\mathfrak{p}}, z_1).$$

Es werden nacheinander die Summanden der rechten Seite abgeschätzt.

(i) Aus (7.12) folgt:

$$(8.7) \qquad A_{\mathfrak{f}}(M, z_1) \geqslant Bh\Gamma_{\mathfrak{f}}(z_1)\Big\{\lambda(v) - O\Big(\frac{(\log\log 3N_{\mathfrak{f}})^6}{(\log\log 3h)^7}\Big)\Big\}.$$

(ii) Es ist nach (2.17), (2.10) und (4.3):

$$(8.8) \qquad \sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2}' \sum_{\substack{\alpha\in M \\ \alpha\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} 1 \leqslant \sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2} \gamma(\mathfrak{p}^2)\Big\{B\frac{h}{N\mathfrak{p}^2} + O\Big[\Big(\frac{h}{N\mathfrak{p}^2}\Big)^{1-\frac{1}{n}} + 1\Big]\Big\}$$

$$\leqslant c_{10}\Big\{h\sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2}\frac{1}{N\mathfrak{p}^2} + z_2\Big\}, \qquad c_{10} = c_{10}(K, F)$$

$$\leqslant c_{11}\Big\{\frac{h}{z_1}\log\log z_2 + z_2\Big\}, \qquad c_{11} = c_{11}(K, F)$$

$$\leqslant b_2\frac{h}{\log h}\Gamma_{\mathfrak{f}}(z_1), \qquad \text{da } h > H_0(u, v).$$

(iii) Aus (7.13) folgt mit $c_8 = \frac{u}{v(u-1)}$:

$$(8.9) \qquad \sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2}' \Big(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log z_2}\Big) A_{\mathfrak{f}}(M_{\mathfrak{p}}, z_1)$$

$$\leqslant Bh\Gamma_{\mathfrak{f}}(z_1)\Big\{\sum_{z_1\leqslant N\mathfrak{p}<z_2}' \Big(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log z_2}\Big)\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\Lambda\Big(\frac{\log\frac{h}{N\mathfrak{p}}}{\log z_1}\Big) + O\Big[b_3\frac{(\log\log 3N\mathfrak{f})^6}{(\log\log 3h)^7}\Big].$$

Man setze für $z_1 \leqslant w \leqslant z_2$:

$$D_{\mathfrak{k}}(w) := \sum_{z_1 \leqslant N\mathfrak{p} < w}' \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log z_2}\right) \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}, \qquad E(w) := \Lambda\left(\frac{\log \dfrac{h}{w}}{\log z_1}\right).$$

Dann folgt mit (3.4) und (3.5):

$$D_{\mathfrak{k}}(w) = \log\frac{\log w}{\log z_1} - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{\log z_1}{\log z_2} - \sum_{\substack{z_1 \leqslant N\mathfrak{p} < w \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}}' \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log z_2}\right)\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} + O\left(\frac{1}{\log z_2}\right).$$

Es ist

$$\sum_{\substack{z_1 \leqslant N\mathfrak{p} < w \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}}' \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} = O\left(\frac{1}{\log z_1} \sum_{\substack{z_1 \leqslant N\mathfrak{p} < w \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}}' \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}\right) = O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log z_1}\right),$$

und entsprechend

$$\frac{1}{\log z_2} \sum_{\substack{z_1 \leqslant N\mathfrak{p} < w \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{k}}}' \frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} = O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log z_2}\right).$$

Also folgt

$$D_{\mathfrak{k}}(w) = \log\frac{\log w}{\log z_1} - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{u}{v} + O\left(b_4 \frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log h}\right). \tag{8.10}$$

Partielle Summation ergibt mit (8.10) und (7.2):

$$\sum_{z_1 \leqslant N\mathfrak{p} < z_2}' \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log z_2}\right)\frac{\gamma(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \Lambda\left(\frac{\log \dfrac{h}{N\mathfrak{p}}}{\log z_1}\right)$$

$$= D_{\mathfrak{k}}(z_2)E(z_2) - \int_{z_1}^{z_2} D_{\mathfrak{k}}(w)E'(w)\,dw$$

$$= D_{\mathfrak{k}}(z_2)E(z_2) - \int_{z_1}^{z_2} \left\{\log\frac{\log w}{\log z_1} - \frac{\log w}{\log z_2} + O\left(b_4 \frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log h}\right)\right\} E'(w)\,dw$$

$$= D_{\mathfrak{k}}(z_2)E(z_2) + \log\log z_1 [E(z_2) - E(z_1)] + O\left(b_5 \frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log h}\right) -$$

$$- \int_{z_1}^{z_2} \left(\log\log w - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{u}{v}\right) E'(w)\,dw.$$

Und weiter ergibt wiederholte partielle Integration:

$$= \int_{z_1}^{z_2} E(w) \frac{1}{w \log w}\left(1 - u\frac{\log w}{\log u}\right) dw + O\left(b_6 \frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log h}\right).$$

Setzt man $t := \dfrac{\log h}{\log w}$, so erhält man:

$$= \int_u^v \Lambda\left(\frac{\log \dfrac{h}{h^{1/t}}}{\log z_1}\right)\left(1 - \frac{u}{t}\right)\frac{dt}{t} + O\left(b_6 \frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log h}\right)$$

$$= \int_u^v \Lambda\left(v\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right)\left(1 - \frac{u}{t}\right)\frac{dt}{t} + O\left(b_6 \frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log h}\right). \tag{8.11}$$

Aus (8.6), (8.7), (8.8), (8.9) und (8.11) folgt die Behauptung (8.5).

Im Folgenden wird Satz 2 spezialisiert.

Es sei für naturliche Zahlen r

$$L_r := r + 1 - \frac{\log \dfrac{4}{1 + 3^{-r}}}{\log 3}.$$

Dann folgt für $r \geqslant 2$:

$$r + 1 - \frac{\log 4}{\log 3} \leqslant L_r \leqslant r + 1 - \frac{\log 3.6}{\log 3}. \tag{8.12}$$

Satz 3. *Sei*

(8.13) $\quad (\alpha, \mathfrak{k}) = 1$ *für alle* $\alpha \in M$,

(8.14) $\quad 0 < \delta \leqslant \frac{2}{3}$,

(8.15) $\quad r$ *so groß gewählt, daß für alle* $\alpha \in M$ *gilt:* $|N\alpha| \leqslant h^{L_r - \delta}$.

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha \in M \\ \Omega(\alpha) \leqslant r}} 1 \geqslant B\delta \frac{N\mathfrak{k}}{f(\mathfrak{k})G(\mathfrak{k})} \frac{C(F)}{a_K} \frac{h}{\log h} \quad \text{für} \quad h \geqslant H_0(r, \delta, N\mathfrak{k}). \tag{8.16}$$

Ferner gilt für die der Norm nach kleinsten Primidealfaktoren $\mathfrak{p}$ *eines jeden links gezählten Elementes* α: $N(\mathfrak{p}) \geqslant h^{1/4}$.

Beweis. Für jedes $\alpha \in M$, das in (8.3) gezählt wird, gilt wegen (8.13), (8.15):

$$1 - \sum_{\substack{h^{1/v} \leqslant N\mathfrak{p} < h^{1/u} \\ \mathfrak{p} | \alpha}}' \left(1 - u\frac{\log N\mathfrak{p}}{\log h}\right) \leqslant 1 - \sigma\left\{\Omega(\alpha) - u\frac{\log|N\alpha|}{\log h}\right\}$$

$$\leqslant 1 - \sigma\{\Omega(\alpha) - u(L_r - \delta)\}.$$

Man wähle $v = 4$, $u = 1+3^{-r}$, $1/\sigma = r+1-u(L_r-\delta)$. Dann wird für $\Omega(a) \geqslant r+1$ die obige Gewichtsfunktion $\leqslant 0$. Also ist, da diese Funktion immer $\leqslant 1$ ist:

$$W_t(M, v, u, \sigma) \leqslant \sum_{\substack{a\in M\\ (a, P_1(h^{1/4}))=1\\ \Omega(a)<r}} 1.$$

Satz 1 liefert, unter Beachtung von Lemma 4.1, die untere Abschätzung von $W_t(M, v, u, \sigma)$. Die Rechnung kann aus [5], Seite 13 übernommen werden.

9. Satz 3 liefert die folgenden Anwendungsbeispiele.

P_r bezeichne ganze algebraische Zahlen mit höchstens r Primidealfaktoren, also $a = P_r$, falls $\Omega(a) \leqslant r$.

Satz 4. *Es existieren ganze algebraische Zahlen $\xi \in K$ mit den Eigenschaften:*

$$\xi = P_2 \quad \textit{und} \quad y_i - y_i^{6/11} < \xi^{(i)} \leqslant y_i, \qquad i = 1, \dots, n, \quad \textit{für} \quad y \geqslant Y_2,$$
$$\xi = P_3 \quad \textit{und} \quad y_i - y_i^{4/11} < \xi^{(i)} \leqslant y_i, \qquad i = 1, \dots, n, \quad \textit{für} \quad y \geqslant Y_3,$$
$$\xi = P_4 \quad \textit{und} \quad y_i - y_i^{3/11} < \xi^{(i)} \leqslant y_i, \qquad i = 1, \dots, n, \quad \textit{für} \quad y \geqslant Y_4,$$
$$\xi = P_r \quad \textit{und} \quad y_i - y_i^{1/(r-2/7)} < \xi^{(i)} \leqslant y_i, \qquad i = 1, \dots, n, \quad \textit{für} \quad y \geqslant Y_r.$$

Beweis. Man wähle $\mathfrak{k} = (1)$, $F(x) = x$ und $h_i = y_i^{1/(L_r-\delta)}$, $i = 1, \dots, n$. Dann wird mit (2.3) und (2.4) $M = I$, und mit (2.1) $h = y^{1/(L_r-\delta)}$. Damit folgt aus (8.16):

$$\sum_{\substack{y_i - y_i^{1/(L_r-\delta)} < \xi^{(i)} \leqslant y_i\\ i=1,\dots,n, \xi = P_r}} 1 \geqslant \frac{B\delta}{a_K} \frac{y^{1/(L_r-\delta)}}{\log y}(L_r-\delta) \quad \text{für} \quad 0 < \delta \leqslant \tfrac{2}{3},\ y \geqslant Y_0(r, \delta).$$

Aus der Definition von L_r bzw. aus (8.12) folgt:

$$L_2 > \frac{11}{6}, \quad L_3 > \frac{11}{4}, \quad L_4 > \frac{11}{3}, \quad r - \frac{2}{7} < L_r < r - \frac{1}{7} \quad \text{für} \quad r \geqslant 2.$$

Wählt man δ in Abhängigkeit von r hinreichend klein, so ergeben sich die Behauptungen von Satz 4.

Satz 5. *Es sei $y_i \geqslant i$, $i = 1, \dots, n$.*

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{a\in M\\ a = P_{g+1}}} 1 \geqslant \frac{2}{3} B \frac{C(F)}{a_K} \frac{y}{\log y}, \quad \textit{für} \quad y \geqslant Y_0(K, F).$$

Beweis. Man wähle in Satz 3 $\mathfrak{k} = (1)$, $\delta = \frac{2}{3}$, $r = g+1$. Ferner sei $h_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$; dadurch wird $h = y$. Es bleibt nachzuprüfen, ob die Vorraussetzung von Satz 3, $|Na| \leqslant y^{L_{g+1}-2/3}$ für alle $a \in M$, erfüllt ist.

Nach (8.12) is $g < L_{g+1} - \frac{2}{3}$.

Es ist weiter

$$|Na| = |NF(\xi)| = |F(\xi)^{(1)} \dots F(\xi)^{(n)}|, \qquad \xi \in I.$$

Mit $F(x) = a_g x^g + \dots + a_0$ folgt für $i = 1, \dots, n$:

$$|F(\xi)^{(i)}| \leqslant (g+1) \max\left\{|a_j^{(i)}| \,\middle|\, \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 0, \dots, g \end{matrix}\right\} \max\{|\xi^{(i)}|^g, 1\}$$
$$\leqslant c_{12} \max\{y_i^g, 1\}, \qquad c_{12} = c_{12}(K, F),$$
$$\leqslant c_{12} y_i^g, \qquad \text{nach Vorraussetzung über } y_i.$$

Es folgt:

$$|Na| \leqslant y^{L_{g+1}-2/3} \quad \text{für} \quad y \geqslant Y_0(K, F).$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die Sätze 4 und 5 sind in der Einleitung als Satz A und Satz B zitiert.

Literatur

[1] P. Bateman and R. Stemmler, *Waring's problem for algebraic number fields*, Illinois J. Math. 6 (1962), S. 142–156.

[2] W. B. Jurkat and H.-E. Richert, *An improvement of Selberg's sieve method I*, Acta Arith. 11 (1965), S. 217–240.

[3] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, B. G. Teubner Verlag, 1918.

[4] T. Nagell, *Généralisation d'un théorème de Tchebycheff*, Journal de Mathematiques (8), 4 (1921), S. 343–356.

[5] H.-E. Richert, *Selberg's sieve with weights*, J. Pure Appl. Math. 16 (1969), S. 1–22.

[6] G. J. Rieger, *Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper III*, J. Reine Angew. Math. 208 (1961), S. 79–90.

[7] W. Schaal, *Obere und untere Abschätzungen in algebraischen Zahlkörpern mit Hilfe des linearen Selbergschen Siebes*, Acta Arith. 13 (1968), S. 267–313.

[8] C. L. Siegel, *Additive Theorie der Zahlkörper II*, Math. Ann. 88 (1923), S. 184–210.

[9] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra I*, van Nostrand Company, 1958.

Eingegangen 10. 5. 1974 (573)