ACTA ARITHMETICA
XXVIII (1976)

Über einfache periodische Kettenbrüche und Vermutungen von P. Chowla und S. Chowla

von

HEINRICH LANG (Münster)

1. Einleitung. Nach den Sätzen von Euler und Lagrange wird die Entwicklung einer reell-quadratischen Irrationalität β in einen einfachen Kettenbruch schließlich periodisch. Sei nun diese Entwicklung

$$\beta = [b_1, \ldots, b_j, \overline{a_1, \ldots, a_r}]$$

so normiert, daß die Länge j der Vorperiode $b_1, \ldots, b_j$ und die Periodenlänge r der Periode $a_1, \ldots, a_r$ möglichst klein ausfällt. Dann läßt sich der Zahl β die ganz-rationale Zahl

$$\Sigma(\beta) = \sum_{\mu=1}^{r} (-1)^{\mu} a_{\mu} \tag{1.1}$$

zuordnen. F. Hirzebruch [5] hat vor kurzer Zeit auf einen engen Zusammenhang solcher alternierenden Summen $\Sigma(\beta)$ mit Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper aufmerksam gemacht. Angeregt durch die Hirzebruchschen Ergebnisse sind von P. Chowla und S. Chowla [2], [3] einige Vermutungen über diese Summen $\Sigma(\beta)$ geäußert worden, die Anlaß zu dieser Arbeit gegeben haben.

Ist die Periodenlänge r eine gerade Zahl, so stellen die alternierenden Summen $\Sigma(\beta)$ im wesentlichen Werte $L(1, \mathfrak{k}_{f\mathfrak{p}_\infty})$ von erweiterten Ringklassen-L-Funktionen $L(s, \mathfrak{k}_{f\mathfrak{p}_\infty})$ an der Stelle 1 dar. Die arithmetische Struktur dieser Zahlen $L(1, \mathfrak{k}_{f\mathfrak{p}_\infty})$ ist in [6] und [7] im Zusammenhang mit Fragen über Klassenzahlen quadratischer und biquadratischer Zahlkörper untersucht worden. Die dort gewonnenen Resultate implizieren Aussagen über das Kongruenzverhalten von $\Sigma(\beta) \bmod 3$ und $\bmod 2^m$ ($m = 1, 2, 3$). Die so erhaltenen Ergebnisse verallgemeinern die von A. Schinzel [12] über diese alternierenden Summen bewiesenen Sätze.

2. Klasseninvarianten und einfache periodische Kettenbrüche. Es sei $k = Q(\sqrt{d_k})$ ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d_k > 0$. Jeder natürlichen Zahl f ist umkehrbar eindeutig eine Ordnung

$\mathfrak{O}_f$ von $\boldsymbol{k}$ zugeordnet. Ein Ideal $\mathfrak{c}_f$ von $\mathfrak{O}_f$ heißt ein zu $\mathfrak{O}_f$ gehöriges Ideal, wenn

$$\mathfrak{O}_f = \{a \in k \mid a\mathfrak{c}_f \subset \mathfrak{c}_f\}$$

gilt (wenn also $\mathfrak{O}_f$ der Multiplikatorenring des durch $\mathfrak{c}_f$ gegebenen vollständigen Moduls von $\boldsymbol{k}$ ist). Die zu $\mathfrak{O}_f$ gehörigen Ideale bilden eine Gruppe $\mathfrak{J}_f$. Die Faktorgruppe von $\mathfrak{J}_f$ nach der in $\mathfrak{J}_f$ enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{H}_{fp_\infty}$ der Hauptideale, die sich durch Zahlen mit positiver Norm erzeugen lassen, bildet die Gruppe der engeren Idealklassen von $\mathfrak{O}_f$. Die L-Funktion $L(s, \mathfrak{K}_{fp_\infty})$ einer solchen engeren Idealklasse $\mathfrak{K}_{fp_\infty}$ läßt sich durch die folgende für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergente Reihe erklären [8](1):

$$L(s, \mathfrak{K}_{fp_\infty}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{c}_f)^s \sum_{\gamma \in \mathfrak{c}_f}^{*} \frac{\operatorname{sgn} N(\gamma)}{\mathfrak{N}(\gamma)^s} \qquad (\mathfrak{c}_f \in \mathfrak{K}_{fp_\infty}^{-1}). \tag{2.1}$$

Dabei ist $\mathfrak{c}_f$ ein beliebiges Ideal aus der inversen Klasse $\mathfrak{K}_{fp_\infty}^{-1}$ von $\mathfrak{K}_{fp_\infty}$, und es ist über ein volles System von nicht assoziierten Zahlen $\gamma \neq 0$ aus $\mathfrak{c}_f$ zu summieren, was durch den Stern* am Summenzeichen angedeutet sei. Man erkennt leicht, daß $L(s, \mathfrak{K}_{fp_\infty}) \equiv 0$ ist, wenn $\mathfrak{O}_f$ Einheiten mit negativer Norm enthält. Sei daher für das folgende vorausgesetzt, daß die Grundeinheit $\varepsilon_f > 1$ von $\mathfrak{O}_f$ die Norm $N(\varepsilon_f) = 1$ besitzt.

$L(s, \mathfrak{K}_{fp_\infty})$ ist auch an der Stelle 1 analytisch, und der Wert $L(1, \mathfrak{K}_{fp_\infty})$ läßt sich nach C. Meyer [8] folgendermaßen angeben:

Es sei γ_1, γ_2 eine $\boldsymbol{Z}$-Basis von $\mathfrak{c}_f$. Dann bestimmt die Grundeinheit $\varepsilon_f > 1$ von $\mathfrak{O}_f$ eine unimodulare Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch

$$\varepsilon_f \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = N(\varepsilon_f) = 1. \tag{2.2}$$

Für die ganz-rationalen Zahlen a, b, c und d hat man die explizite Darstellung

$$a = S\left(\frac{\gamma_1 \gamma_2' \varepsilon_f}{\delta\binom{\gamma_1}{\gamma_2}}\right), \qquad b = S\left(\frac{\gamma_1 \gamma_1' \varepsilon_f'}{\delta\binom{\gamma_1}{\gamma_2}}\right), \qquad c = S\left(\frac{\gamma_2 \gamma_2' \varepsilon_f}{\delta\binom{\gamma_1}{\gamma_2}}\right), \qquad d = S\left(\frac{\gamma_1 \gamma_2' \varepsilon_f'}{\delta\binom{\gamma_1}{\gamma_2}}\right),$$

wobei S die Spurbildung in $\boldsymbol{k}$, der Strich $'$ die Anwendung des nicht identischen Automorphismus von $\boldsymbol{k}$ und

$$\delta\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \gamma_1 \gamma_2' - \gamma_1' \gamma_2$$

(1) Im allgemeinen werden bei der Bildung von $L(s, \mathfrak{K}_{fp_\infty})$ nur zu f prime Ideale zugelassen. Diese aus der Klassenkörpertheorie herrührende Bedingung erweist sich aber für einige Betrachtungen als überflüssig, zum Teil sogar als hinderlich.

die Basisdeterminante von γ_1, γ_2 bedeuten. Aus dieser Darstellung und der Irrationalität von ε_f erkennt man sofort

$$bc \neq 0.$$

Es gilt nun [8]

$$L(1, \mathfrak{K}_{fp_\infty}) = \frac{2\pi^2}{f\sqrt{d_k}} \operatorname{sgn} \delta\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \left(\frac{a+d}{12c} - \frac{1}{4} \operatorname{sgn} c - \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c)\right). \tag{2.3}$$

Als wesentlicher arithmetischer Bestandteil tritt hierin eine Dedekindsche Summe $s(a, c)$ auf, die mit Hilfe der ersten Bernoullischen Funktion

$$P_1(x) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für} \quad x \notin \boldsymbol{Z}, \\ 0 & \text{für} \quad x \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

durch

$$s(a, c) = \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{\mu}{c}\right) P_1\left(\frac{a\mu}{c}\right) \tag{2.4}$$

erklärt ist.

Zur Untersuchung des arithmetischen Bestandteils

$$\Psi\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} \delta\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c)\right) \tag{2.5}$$

von $L(1, \mathfrak{K}_{fp_\infty})$ ist wesentlich von der Tatsache Gebrauch zu machen, daß man das Ideal $\mathfrak{c}_f$ in $\mathfrak{K}_{fp_\infty}^{-1}$ frei wählen kann und daß an die Basis γ_1, γ_2 von $\mathfrak{c}_f$ keine Bedingungen gestellt sind. Für $\Psi\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ wird daher auch die Schreibweise $\Psi(\mathfrak{K}_{fp_\infty})$ benutzt werden:

$$\Psi(\mathfrak{K}_{fp_\infty}) = -\frac{f\sqrt{d_k}}{2\pi^2} L(1, \mathfrak{K}_{fp_\infty}) = \Psi\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Zwei Ideale $\mathfrak{b}_f$ und $\mathfrak{c}_f$ mit den Basen β_1, β_2 und γ_1, γ_2 sind genau dann im gewöhnlichen Sinne äquivalent, wenn die beiden Basisquotienten $\beta = \beta_1/\beta_2$ und $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$ äquivalente Zahlen darstellen, d.h., wenn

$$\beta = \frac{p\gamma + q}{m\gamma + n} \qquad (p, q, m, n \in \boldsymbol{Z};\ pn - qm = \pm 1)$$

mit passenden ganz-rationalen Zahlen p, q, m, n gilt, für die $pn - qm = \pm 1$ ist. Das tritt dann und nur dann ein, wenn die Kettenbrüche von β und γ von einem gewissen Teilnenner an übereinstimmen [10]. In diesem Fall kann man bei geeigneter Vorperiode

$$\beta = [b_1, \ldots, b_{j_\beta}, \overline{a_1, \ldots, a_r}] \qquad \text{und} \qquad \gamma = [g_1, \ldots, g_{j_\gamma}, \overline{a_1, \ldots, a_r}] \tag{2.7}$$

mit derselben Periode $a_1, \dots, a_r$ schreiben. Die beiden reduzierten Zahlen

$$(2.8) \qquad \alpha = [\overline{a_1, \dots, a_r}] \quad \text{und} \quad \alpha^* = [\overline{a_2, \dots, a_r, a_1}]$$

bestimmen zwei Ideale $\{\alpha, 1\}$ and $\{\alpha^*, 1\}$, die in derselben gewöhnlichen Idealklasse wie $\mathfrak{b}_f$ und $\mathfrak{c}_f$ liegen. Da α und α^* reduzierte Zahlen sind, da also $\alpha > 1$ und $-1 < \alpha' < 0$ sowie $\alpha^* > 1$ und $-1 < \alpha^{*\prime} < 0$ gilt, hat man

$$N(\alpha) < 0 \quad \text{und} \quad N(\alpha^*) < 0.$$

Weiter erkennt man aus $\alpha = a_1 + \dfrac{1}{\alpha^*}$ leicht

$$(2.9) \qquad \alpha^*\{\alpha, 1\} = \alpha^*\left\{a_1 + \frac{1}{\alpha^*}, 1\right\} = \alpha^*\left\{\frac{1}{\alpha^*}, 1\right\} = \{\alpha^*, 1\} \quad \text{mit} \quad N(\alpha^*) < 0.$$

Danach liegt also entweder $\{\alpha, 1\}$ oder $\{\alpha^*, 1\}$ in derselben engeren Idealklasse $\mathfrak{K}_{f\mathfrak{p}_\infty}^{-1}$ wie $\mathfrak{c}_f$. Im folgenden sei angenommen, daß die Vorperiode in (2.7) gerade so gewählt sei, daß $\mathfrak{c}_f$ und $\{\alpha, 1\}$ Elemente derselben engeren Idealklasse $\mathfrak{K}_{f\mathfrak{p}_\infty}^{-1}$ sind, so daß also gilt:

$$(2.10) \qquad \Psi\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die Kettenbruchentwicklung der reduzierten Zahl $\alpha = [\overline{a_1, \dots, a_r}]$ hängt bekanntlich eng mit der Grundeinheit $\varepsilon_f > 1$ von $\mathfrak{O}_f$ zusammen [4], [10], und zwar ist

$$(2.11) \qquad \varepsilon_f\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}a_r & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N(\varepsilon_f) = (-1)^r.$$

Da $N(\varepsilon_f) = 1$ vorausgesetzt worden ist, muß r eine gerade Zahl sein.

Die in (2.11) auftretenden Matrizen

$$A_\mu = \begin{pmatrix}a_\mu & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad (\mu = 1, \dots, r)$$

haben die Determinante -1. Für die Matrizen

$$A_\mu^* = \begin{pmatrix}a_\mu & (-1)^\mu\\ (-1)^{\mu+1} & 0\end{pmatrix} \quad (\mu = 1, \dots, r)$$

erkennt man sofort

$$(2.12) \qquad A_{2\nu-1}A_{2\nu} = A_{2\nu-1}^* A_{2\nu}^* \quad (\nu = 1, \dots, r/2).$$

Aus (2.11) ergibt sich daher die Matrizengleichung

$$(2.13) \qquad \varepsilon_f\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} = A_1^* \dots A_r^*\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det A_\mu^* = 1.$$

Unabhängig von einer möglichen Deutung als Klasseninvariante hat schon H. Rademacher [11] die Matrixfunktion

$$(2.14) \qquad \Psi(M) = \begin{cases} -\dfrac{a+d}{12c} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c), & \text{falls} \quad c \neq 0, \\[2mm] \dfrac{-b}{12d}, & \text{falls} \quad c = 0 \end{cases}$$

für Modulsubstitutionen $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ der Determinante 1 untersucht und dafür die folgende Kompositionsregel bewiesen:

Für $M_1 = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$ und $M_1M_2 = \begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{pmatrix}$ gilt

$$(2.15) \qquad \Psi(M_1M_2) = \Psi(M_1) + \Psi(M_2) + \tfrac{1}{4}\big(\operatorname{sgn} c_1 + \operatorname{sgn} c_2 - \operatorname{sgn} c_3 - \operatorname{sgn}(c_1c_2c_3)\big).$$

Unmittelbar aus der Definition (2.4) der Dedekindschen Summen ist $s(a, \pm 1) = 0$ abzulesen. Man hat also

$$(2.16) \qquad \Psi(A_\mu^*) = \frac{(-1)^\mu}{12} a_\mu + \frac{(-1)^{\mu+1}}{4}.$$

Setzt man

$$A_1 \dots A_\mu = \begin{pmatrix}p_\mu & q_\mu\\ r_\mu & s_\mu\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_1^* \dots A_\mu^* = \begin{pmatrix}p_\mu^* & q_\mu^*\\ r_\mu^* & s_\mu^*\end{pmatrix},$$

so weiß man aus der Theorie der Kettenbrüche $\operatorname{sgn} r_\mu = 1$ [4], [12]. Gemäß (2.12) ist jedoch

$$A_1^* \dots A_\mu^* = \begin{cases} A_1 \dots A_\mu & \text{für} \quad 2 \mid \mu, \\ A_1 \dots A_{\mu-1}A_\mu^* & \text{für} \quad 2 \nmid \mu. \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar $r_\mu = r_\mu^*$ und somit auch $\operatorname{sgn} r_\mu^* = 1$. Aus (2.15) und (2.16) erhält man dann

$$(2.17) \qquad \Psi(A_1^* \dots A_r^*) = \frac{1}{12}\sum_{\mu=1}^{r} (-1)^\mu a_\mu.$$

Wegen der Reduziertheit von α hat man $\alpha > 1$, $-1 < \alpha' < 0$ und daher

$$\operatorname{sgn} \delta\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\alpha - \alpha') = 1.$$

Aus (2.5), (2.13) und (2.17) bekommt man also

$$\Psi\binom{a}{1} = \frac{1}{12}\sum_{\mu=1}^{r}(-1)^{\mu}a_{\mu} = \Sigma(a). \tag{2.18}$$

Da in (2.7) die Länge der Vorperiode j_{γ} nicht notwendig minimal sein muß, ist $\Psi\binom{\gamma_1}{\gamma_2}$ durch den periodischen Teil der Kettenbruchentwicklung von $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$ nur bis auf das Vorzeichen bestimmt, d.h. es ist

$$\Psi\binom{\gamma_1}{\gamma_2} = \pm\frac{1}{12}\Sigma(\gamma). \tag{2.19}$$

Eine Antwort auf die Frage, welches der beiden Ideale $\{a, 1\}$ oder $\{a^*, 1\}$ in derselben engeren Idealklasse wie $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ liegt, würde das Vorzeichen in (2.19) festlegen.

Als Folgerung aus (2.8), (2.9) und (2.18) erkennt man noch:

$$\Psi(\mathfrak{K}_{fp_\infty}) = -\Psi(\mathfrak{K}^*_{fp_\infty}), \tag{2.20}$$

wenn die beiden engeren Idealklassen $\mathfrak{K}_{fp_\infty}$ und $\mathfrak{K}^*_{fp_\infty}$ eine gewöhnliche Idealklasse von zu $\mathfrak{O}_f$ gehörigen Idealen zusammensetzen.

Zusammenfassend sei der Satz formuliert:

Satz 1. *Sei $\mathfrak{K}_{fp_\infty}$ eine engere Idealklasse von zu $\mathfrak{O}_f$ gehörigen Idealen und $\mathfrak{c}_f$ ein Ideal aus der inversen Klasse $\mathfrak{K}^{-1}_{fp_\infty}$. Ist dann $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$ der Quotient einer Basis γ_1, γ_2 von $\mathfrak{c}_f$, so gilt für die in (2.6) eingeführte Klasseninvariante*

$$12\Psi(\mathfrak{K}_{fp_\infty}) = \pm\Sigma(\gamma). \tag{2.21}$$

Ist darüber hinaus $\mathfrak{c}_f$ in $\mathfrak{K}^{-1}_{fp_\infty}$ so gewählt, daß $\mathfrak{c}_f$ eine spezielle Basis der Form $a, 1$ mit einer reduzierten Zahl a besitzt, so hat man

$$12\Psi(\mathfrak{K}_{fp_\infty}) = \Sigma(a). \tag{2.22}$$

3. Kongruenzen für die alternierenden Summen $\Sigma(\beta)$. Da es in jeder engeren Idealklasse $\mathfrak{K}_{fp_\infty}$ von zu $\mathfrak{O}_f$ gehörigen Idealen zu f prime Ideale gibt, ist die Gruppe der engeren Idealklassen isomorph zur Ringklassengruppe mod fp_∞ von $\boldsymbol{k}$. Die durch Weglassen der zu f nicht primen Ideale aus $\mathfrak{K}_{fp_\infty}$ bestimmte Ringklasse mod fp_∞ sei mit $\mathfrak{k}_{fp_\infty}$ bezeichnet, und es werde

$$\Psi(\mathfrak{k}_{fp_\infty}) = \Psi(\mathfrak{K}_{fp_\infty}) \tag{3.1}$$

festgesetzt.

Mit den Komponenten u_f und v_f der (nach obiger Voraussetzung normpositiven) Grundeinheit

$$\varepsilon_f = \tfrac{1}{2}(u_f + v_f f\sqrt{d_k}) > 1$$

von $\mathfrak{O}_f$ werde die Abkürzung

$$\varrho(u_f, v_f) = \begin{cases} 2\left\{\left(\dfrac{\frac{1}{2}u_f}{v_f}\right)-1\right\}+v_f(u_f-3) & \text{für } 2\nmid v_f,\ 2\mid f^2d_k, \\ 2\left\{\left(\dfrac{\frac{1}{2}(u_f+v_f)}{v_f}\right)-1\right\}+v_f(u_f-3) & \text{für } 2\nmid v_f,\ 2\nmid f^2d_k, \\ 2\left\{\left(\dfrac{v_f}{\frac{1}{2}u_f}\right)-1\right\}+\frac{1}{8}u_fv_f(f^2d_k-4)+\frac{3}{2}(u_f-2) & \text{für } 2\mid v_f,\ 2\mid f^2d_k, \\ 2\left\{\left(\dfrac{v_f}{\frac{1}{2}(u_f+v_f)}\right)-1\right\}+\frac{3}{2}(u_f+u_f)-3 & \text{für } 2\mid v_f,\ 2\nmid f^2d_k \end{cases} \tag{3.2}$$

eingeführt. Hierbei ist offenbar

$$2\left\{\left(\frac{\frac{1}{2}u_f}{v_f}\right)-1\right\} \equiv 2\left\{\left(\frac{\frac{1}{2}(u_f+v_f)}{v_f}\right)-1\right\} \equiv 2\left\{\left(\frac{v_f}{\frac{1}{2}u_f}\right)-1\right\} \equiv 2\left\{\left(\frac{v_f}{\frac{1}{2}(u_f+v_f)}\right)-1\right\} \equiv 0 \bmod 4.$$

Ferner erkennt man auf Grund der Pellschen Gleichung $u_f^2 - v_f^2 f^2 d_k = 4$ leicht [6]:

$$\varrho(u_f, v_f) \equiv \begin{cases} 0 \bmod 2 & \text{für } 2\mid v_f \text{ oder } 2\nmid f^2d_k, \\ 1 \bmod 2 & \text{für } 2\nmid v_f \text{ und } 2\mid f^2d_k. \end{cases} \tag{3.3}$$

Für die durch (3.1) gegebene Ringklasseninvariante $\Psi(\mathfrak{k}_{fp_\infty})$ sind in [6] und [7] die folgenden Kongruenzen bewiesen worden:

Es ist

$$12\Psi(\mathfrak{k}_{fp_\infty}) \equiv \begin{cases} 0 \bmod 3 & \text{für } 3\nmid f^2d_k, \\ -u_fv_f\chi_{-3}(\mathfrak{k}_{fp_\infty}) \bmod 3 & \text{für } 3\mid f^2d_k, \end{cases} \tag{3.4}$$

wobei χ_{-3} den der quadratischen Erweiterung $\boldsymbol{k}(\sqrt{-3})/\boldsymbol{k}$ zugeordneten klassenkörpertheoretischen Charakter bezeichnet (Siehe hierzu [6], [13]!), und

$$12\Psi(\mathfrak{k}_{fp_\infty}) \equiv \begin{cases} -\varrho(u_f, v_f) \bmod 4 & \text{für } 2\mid v_f \text{ oder } 2\nmid f^2d_k, \\ -\varrho(u_f, v_f)\chi_{-4}(\mathfrak{k}_{fp_\infty}) \bmod 4 & \text{für } 2\nmid v_f \text{ und } 2\mid f^2d_k, \end{cases} \tag{3.5}$$

wobei χ_{-4} den der quadratischen Erweiterung $\boldsymbol{k}(\sqrt{-4})/\boldsymbol{k}$ zugeordneten klassenkörpertheoretischen Charakter bezeichnet. Ist $\mathfrak{k}_{fp_\infty}$ das Quadrat einer Ringklasse mod fp_∞ (was sicher für die Hauptklasse $\mathfrak{h}_{fp_\infty}$ zutrifft), so gilt sogar

$$12\Psi(\mathfrak{k}_{fp_\infty}) \equiv -\varrho(u_f, v_f) \bmod 8. \tag{3.6}$$

Sei jetzt β eine beliebige irrationale Zahl aus $\boldsymbol{k}$. Diese genügt einer eindeutig bestimmten Gleichung

$$A\beta^2+B\beta+C=0,$$

wobei A, B und C teilerfremde ganz-rationale Zahlen mit $A>0$ sind. Die zugehörige Diskriminante kann man in der Form

$$B^2-4AC=f^2d_k$$

mit einer natürlichen Zahl f schreiben. Dann ist die dieser natürlichen Zahl f zugeordnete Ordnung $\mathfrak{O}_f$ von k der Multiplikatorenring des Moduls $\{\beta, 1\}$. Nun läßt sich $\{\beta, 1\}$ auch als zu $\mathfrak{O}_f$ gehöriges Ideal auffassen. Besitzt die Grundeinheit von $\mathfrak{O}_f$ die Norm 1, so lassen sich aus Satz 1 und den Kongruenzen (3.4), (3.5) und (3.6) unmittelbar Kongruenzen für die alternierenden Summen $\Sigma(\beta)$ herleiten. Dabei bereitet es allerdings im allgemeinen einige Schwierigkeiten, die in (3.4) und (3.5) auftretenden Charakterwerte allein in Abhängigkeit von β darzustellen. Diese Schwierigkeiten verstärken sich noch in den Fällen, in denen das zu $\mathfrak{O}_f$ gehörige Ideal $\{\beta, 1\}$ gemeinsame Teiler mit den Führern von χ_{-3} und χ_{-4} besitzt.

Beschränkt man sich jedoch auf Teilbarkeitsaussagen und beachtet, daß wegen der Pellschen Gleichung 3 nicht gleichzeitig in u_f und f^2d_k aufgehen kann, so folgt aus Satz 1 sowie (3.3), (3.4) und (3.5) der

Satz 2. *Es sei $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d_k})$ ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d_k>0$. Weiter sei β eine beliebige zur Diskriminante f^2d_k gehörige irrationale Zahl aus $\boldsymbol{k}$. Die Grundeinheit des Multiplikatorenringes $\mathfrak{O}_f$ von $\{\beta, 1\}$ sei $\varepsilon_f=\frac{1}{2}(u_f+v_ff\sqrt{d_k})>1$. Ist dann $N(\varepsilon_f)=1$, so gilt:*

$$\Sigma(\beta)\equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow v_f\equiv 0 \bmod 3 \textit{ oder } f^2d_k\not\equiv 0 \bmod 3, \tag{3.7}$$

$$\Sigma(\beta)\equiv 0 \bmod 2 \Leftrightarrow v_f\equiv 0 \bmod 2 \textit{ oder } f^2d_k\not\equiv 0 \bmod 2. \tag{3.8}$$

Zum Schluß soll noch auf die Quadratwurzeln von natürlichen Zahlen eingegangen werden. Sei dazu N eine natürliche Zahl, aber keine Quadratzahl. Die Diskriminante des reell-quadratischen Zahlkörpers $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}(\sqrt{N})$ sei wieder mit d_k bezeichnet. Setzt man

$$4N=f^2d_k,$$

so ist $\{\sqrt{N}, 1\}$ die der natürlichen Zahl f zugeordnete Ordnung $\mathfrak{O}_f$ von $\boldsymbol{k}$. Weiter sei wie oben angenommen, daß die Grundeinheit $\varepsilon_f=\frac{1}{2}(u_f+v_ff\sqrt{d_k})>1$ von $\mathfrak{O}_f=\{\sqrt{N}, 1\}$ positive Norm besitzt. Die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{N}$ hat die Form [10]:

$$\sqrt{N}=[n, \overline{a_1, \ldots, a_r}].$$

Für die reduzierte Zahl $\alpha=[\overline{a_1, \ldots, a_r}]$ gilt $\sqrt{N}=n+1/\alpha$ und somit (Siehe (2.9)!):

$$\{\sqrt{N}, 1\}=\frac{1}{\alpha}\{\alpha, 1\} \quad \text{mit} \quad N(\alpha)<0.$$

Aus (2.20) und (2.22) folgt daher für die engere Hauptklasse $\mathfrak{H}_{fp_\infty}$ von zu $\mathfrak{O}_f$ gehörigen Idealen:

$$12\Psi(\mathfrak{H}_{fp_\infty})=12\Psi\begin{pmatrix}\sqrt{N}\\1\end{pmatrix}=-12\Psi\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=-\Sigma(\alpha)=-\Sigma(\sqrt{N}).$$

Mit Satz 1 und den Kongruenzen (3.4) und (3.6) erhält man daraus den

Satz 3. *Es sei N eine natürliche Zahl, aber keine Quadratzahl, und es bezeichne d_k die Diskriminante des durch $\sqrt{N}$ erzeugten reell-quadratischen Zahlkörpers $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}(\sqrt{N})$. Ferner sei $\varepsilon_f=\frac{1}{2}(u_f+v_ff\sqrt{d_k})>1$ die Grundeinheit der Ordnung $\mathfrak{O}_f=\{\sqrt{N}, 1\}$ von $\boldsymbol{k}$, wobei die natürliche Zahl f durch $4N=f^2d_k$ bestimmt ist. Besitzt dann ε_f die Norm $+1$, so bestehen die Kongruenzen:*

$$\Sigma(\sqrt{N})\equiv\begin{cases}0 \bmod 3 & \textit{für} \quad 3\nmid f^2d_k=4N,\\ u_fv_f \bmod 3 & \textit{für} \quad 3\mid f^2d_k=4N.\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\Sigma(\sqrt{N})\equiv\varrho(u_f, v_f) \bmod 8. \tag{3.10}$$

Beispiele.

1) $N=20$. $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}(\sqrt{20})$ hat die Diskriminante $d_k=5$. Es ist hier $f=4$, und man findet $\varepsilon_4=\frac{1}{2}(18+2\cdot 4\sqrt{5})$ mit $N(\varepsilon_4)=1$. Aus der Kettenbruchentwicklung $\sqrt{20}=[4, \overline{2, 8}]$ bekommt man

$$\Sigma(\sqrt{20})=6.$$

Ferner errechnet man

$$\varrho(u_4, v_4)=366.$$

In Übereinstimmung mit Satz 3 gilt dann

$$\Sigma(\sqrt{20})=6\equiv\begin{cases}0 \bmod 3,\\ 366 \bmod 8.\end{cases}$$

2) $N=219$. Die Diskriminante von $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}(\sqrt{219})$ ist $d_k=4\cdot 219$. Es ist also $f=1$, und man findet $\varepsilon_1=\frac{1}{2}(148+5\sqrt{4\cdot 219})$ mit $N(\varepsilon_1)=1$. Aus $\sqrt{219}=[14, \overline{1, 3, 1, 28}]$ erhält man

$$\Sigma(\sqrt{219})=29.$$

Weiter rechnet man nach:

$$\varrho(u_1, v_1) = 725.$$

Damit bekommt man

$$\Sigma(\sqrt{219}) = 29 \equiv \begin{cases} u_1 v_1 = 740 \bmod 3, \\ 725 \bmod 8, \end{cases}$$

wie es nach Satz 3 sein muß.

Literatur

[1] S. I. Borevič und I. R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Basel–Stuttgart 1966.

[2] P. Chowla and S. Chowla, *Problems on periodic simple continued fractions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 69 (1972), S. 3745.

[3] — — *On Hirzebruch sums and a theorem of Schinzel*, Acta Arith. 24 (1973), S. 223–224.

[4] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2. Aufl., Berlin–Göttingen–Heidelberg–New York 1964.

[5] F. Hirzebruch and D. Zagier, *Class-numbers, continued fractions and the Hilbert modular group*, Erscheint demnächst.

[6] H. Lang, *Über die Klassenzahlen eines imaginären bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers und seines reell-quadratischen Teilkörpers I*, J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973), S. 18–40.

[7] H. Lang und R. Schertz, *Kongruenzen zwischen Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper*, Erscheint im J. Number Theory.

[8] C. Meyer, *Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Berlin 1957.

[9] — *Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen*, J. Reine Angew. Math. 198 (1957), S. 143–203.

[10] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Bd. 1, 3. Aufl., Stuttgart 1954.

[11] H. Rademacher, *Zur Theorie der Modulfunktionen*, J. Reine Angew. Math. 167 (1932), S. 312–336.

[12] A. Schinzel, *On two conjectures of P. Chowla and S. Chowla concerning continued fractions*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 98 (1974), S. 111–117.

[13] C. L. Siegel, *Lectures on Advanced Analytic Number Theory*, Bombay 1961.

Eingegangen 24. 5. 1974 (578)

ACTA ARITHMETICA
XXVIII (1976)

The distribution of sequences modulo one

by

Frank S. Cater, Richard B. Crittenden
and Charles Vanden Eynden (Portland, Ore.)

It can easily be seen that if f is a real function such that $f(x)\to+\infty$ and $f'(x)\to 0$ as $x\to+\infty$, then the fractional parts of the numbers $f(1)$, $f(2), \ldots$ are dense in the unit interval. (Indeed, if also $xf'(x)\to+\infty$, then they are uniformly distributed there [2].) This result can be applied to the sequence $\log 1$, $\log 2, \ldots$, but not to $1\log 1, 2\log 2, \ldots$, since the derivative of $x\log x$ does not approach zero.

We prove a more general result covering functions like the latter with second derivatives approaching zero. We also give conditions assuring the denseness in the unit square of the points $(\langle f(n)\rangle, \langle f(n-1)\rangle)$, and also the points $(\langle f(n)\rangle, \langle f'(n)\rangle)$, where $\langle t\rangle$ denotes the fractional part of t.

Theorem 1. *Suppose f is defined for $x \geqslant 0$, $f(x)$ tends monotonically to 0 as x tends to $+\infty$, and $\int_0^t f(x)\,dx = h(t)$ tends to $+\infty$ as t tends to $+\infty$. Then as $j = 1, 2, \ldots$*

1) *$\langle h(j)\rangle$ is dense in the unit interval,*
2) *$\langle l(j)\rangle$ is dense in the unit interval and $(\langle h(j)\rangle, \langle l(j)\rangle)$ is dense in the unit square, where $l(x) = \int_0^x h(t)\,dt$.*

Proof. Result 1) is well known [2] but we will give our proof since we prove 2) in a similar manner. By hypothesis, for any $\varepsilon > 0$ there exists N_0 such that if $x > N_0$ then $0 < f(x) < \varepsilon$, and hence if $k > N_0$,

$$|h(k+1) - h(k)| = \int_k^{k+1} f(t)\,dt < \varepsilon.$$

But since $h(k)$ tends to $+\infty$ it follows that $\langle h(k)\rangle$ is dense in the unit interval. This proves 1).

To prove 2) we let I be an open interval in $[0, 1)$. Choose n and k, k odd, such that $I_k = (k/2^n, (2^{2n}k+1)/2^{3n}) \subset I$. By part 1) there exists N_0