ACTA ARITHMETICA
XXVIII (1975)

Über den Primzahlsatz von A. Selberg

von

K. PRACHAR (Wien)

Als Primzahlsatz von A. Selberg bezeichnet Montgomery (vgl. sein Buch, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Berlin–Heidelberg–New York 1971, Ch. 14) die folgende, von A. Selberg 1943 bewiesene Tatsache (vgl. [2]):

Sei $f(x)$ irgendeine mit x gegen Unendlich strebende Funktion, dann enthält[1] das Intervall $[x, x+f(x)\log^2 x]$ für fast alle x eine Primzahl, wenn angenommen wird, daß die Riemann'sche Vermutung über die Nullstellen der ζ-Funktion richtig ist.

Mit Hilfsmitteln, die man Linnik [1] verdankt, beweisen wir folgenden

SATZ. *Sei N eine große natürliche Zahl und B eine reelle Zahl $> \frac{7}{2}$. Sei ferner $C > B$ und $q < N/(\log N)^C$ eine natürliche Zahl. Dann ist die Anzahl der natürlichen, zu q teilerfremden Zahlen $n \leqslant N$, die sich nicht in der Form $n = p+qm$, p Primzahl, m natürliche Zahl $\leqslant (\log N)^B$, darstellen lassen, $o(N)$ (d.h. $\leqslant N\varepsilon_N$ mit $\varepsilon_N \to 0$ für $N \to \infty$, wobei ε_N nicht von der Auswahl von q abhängt), wenn die Riemann'sche Vermutung für die zu Charakteren* $\bmod q$ *gehörigen L-Funktionen als richtig angenommen wird.*

Da die Arbeit von Linnik nicht ganz leicht zugänglich ist und Linnik die wesentliche Formel in unserer Bezeichnungsweise nur für $q = 1$ ausführlich beweist, sei es gestattet, die wesentlichen Rechnungen von Linnik hier nochmals wiederzugeben. Für $q = 1$ ist im folgenden $\log q$ stets durch $\log(q+1)$ zu ersetzen.

Wir erhalten anscheinend auch ein um einen Faktor $\log N$ besseres Resultat als das von Linnik ohne Rechnung angegebene Resultat (loc. cit. S. 517)

$$J_1 + J_2 \ll \frac{N}{M} \log^4 N.$$

---

[1] Mit $\log^k x$ bezeichnen wir die Funktion $(\log x)^k$.

1. Sei $\Lambda(n)$ die v. Mangoldt'sche Funktion $\Lambda(p^l) = \log p$ für jede Primzahlpotenz p^l und sonst $\Lambda(n) = 0$. Wir setzen

$$S(\vartheta) = S(\vartheta, N) = \sum_n \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i \vartheta n} \tag{1.1}$$

wobei $\sum_n$ stets $\sum_{n=1}^{\infty}$ bedeuten soll. Linnik benutzt nun die Littlewood'sche Beziehung

$$S(\vartheta) = \frac{1}{\frac{1}{N} + 2\pi i \vartheta} - \sum_{\varrho} \frac{\Gamma(\varrho)}{\left(\frac{1}{N} + 2\pi i \vartheta\right)^{\varrho}} + O(\log^3 N) \tag{1.2}$$

wobei ϱ über die Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ der Zetafunktion $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ in $0 < \sigma < 1$ läuft. Wir brauchen eine Formel für $S\left(\frac{a}{q} + a\right)$ mit „kleinem" $|a|$ um die Linnik'sche Version der Hardy–Littlewood'schen Methode anwenden zu können. Sei $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$. Man hat

$$S\left(\frac{a}{q} + a\right) = \sum_n e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + a\right) n} = \sum_{l \bmod q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} l} \sum_{n \equiv l \bmod q} e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i a n}$$

$$= \sum_{\substack{l \bmod q \\ (l, q) = 1}} e^{-2\pi i \frac{a}{q} l} \sum_n \left\{\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(n) \bar{\chi}(l)\right\} e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i a n} +$$

$$+ \sum_{\substack{n \\ (n, q) > 1}} e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i \left(\frac{a}{q} + a\right) n}.$$

Die letztgenannte Summe ist[2]

$$\ll \sum_{\substack{n \\ (n, q) > 1}} e^{-n/N} \Lambda(n) \ll \log N \log q$$

wie man leicht nachrechnet, so daß gilt:

$$S\left(\frac{a}{q} + a\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \left(\sideset{}{'}\sum_{l \bmod q} \bar{\chi}(l) e^{-2\pi i \frac{a}{q} l}\right) A_\chi(a) + O(\log N \log q) \tag{1.3}$$

mit

$$A_\chi(a) = \sum_n \chi(n) e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i a n} \tag{1.4}$$

---

[2] Wir benützen das Zeichen $\ll \ldots$ in derselben Bedeutung wie $O(\ldots)$.

wobei $\sum'$ bedeuten soll, daß nur über die zu q primen Restklassen mod q summiert werden soll und $\sum_\chi$ Summation über alle Charaktere mod q bedeutet. Mit $\tau_\chi(a) = \sideset{}{'}\sum_{l \bmod q} \chi(l) e^{2\pi i a \frac{l}{q}}$ gilt also

$$S\left(\frac{a}{q} + a\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\tau_\chi(a)} A_\chi(a) + O(\log N \log q). \tag{1.5}$$

Für $(a, q) = 1$ hat man

$$\tau_\chi(a) = \sideset{}{'}\sum_l \chi(l) e^{2\pi i a \frac{l}{q}} = \sideset{}{'}\sum_m e^{2\pi i \frac{m}{q}} \chi(m a^{-1}) = \chi(a^{-1}) \sideset{}{'}\sum_m \chi(m) e^{2\pi i \frac{m}{q}} = \bar{\chi}(a) \tau_\chi$$

wenn τ_χ die Gauß'sche Summe bedeutet. Bekanntlich gilt stets $|\tau_\chi| \leqslant q^{1/2}$. Und (1.5) schreibt sich

$$S\left(\frac{a}{q} + a\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a) \bar{\tau}_\chi A_\chi(a) + O(\log N \log q). \tag{1.6}$$

Wir setzen nun

$$T(\vartheta) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant P} e^{-2\pi i q m \vartheta} \tag{1.7}$$

mit $P = [(\log N)^B]$. Dann wird

$$S(\vartheta) T(\vartheta) = \sum_n r(n) e^{-2\pi i n \vartheta} \tag{1.8}$$

mit

$$r(n) = \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 + qm = n \\ m \leqslant P}} \Lambda(m_1) e^{-m_1/N} = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant P \\ n - qm > 0}} \Lambda(n - qm) e^{-n/N} e^{qm/N}. \tag{1.9}$$

Man hat dann

$$\int_0^1 |S(\vartheta) T(\vartheta)|^2 d\vartheta = \sum_n r^2(n) \tag{1.10}$$

(wobei $r^2(n) = \{r(n)\}^2$ gesetzt wird).

Wir setzen noch

$$r_1(n) = \begin{cases} \frac{q}{\varphi(q)} e^{-n/N} P & \text{für} \quad (n, q) = 1, \\ 0 & \text{für} \quad (n, q) > 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Unser Ziel ist die Abschätzung der „Dispersion"

$$\sum_n \{r(n) - r_1(n)\}^2. \tag{1.12}$$

2. Sei M eine natürliche Zahl >1 und $\delta = 1/(qM)$. Sei ferner N_1 eine natürliche Zahl $\leqslant$ const. N. Wir setzen

(2.1) $$J = \sum_{a \bmod q}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \left| S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right|^2 e^{2\pi i N_1 \left(\frac{a}{q}+\alpha\right)} d\alpha$$

und haben nach (1.6)

(2.2) $$J = \sum_{a \bmod q}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \ldots + O(\log N \log q)\right|^2 e^{2\pi i N_1 \left(\frac{a}{q}+\alpha\right)} d\alpha$$

$$= \sum_{a \bmod q}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi(\alpha)\right|^2 e^{2\pi i N_1 \left(\frac{a}{q}+\alpha\right)} d\alpha + R$$

wobei

$$R \ll \sum_{a}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \left| \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi(\alpha)\right| \log N \log q + \log^2 N \log^2 q\right\} d\alpha$$

$$= \sum_{a}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \left| S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right) + O(\log N \log q)\right| \log N \log q + \log^2 N \log^2 q\right\} d\alpha$$

$$\ll \sum_{a}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \{(N+\log N \log q)\log N \log q + \log^2 N \log^2 q\} d\alpha,$$

so daß man schließlich erhält

(2.3) $$R \ll \varphi(q)\,\delta N \log N \log q + \varphi(q)\,\delta \log^2 N \log^2 q$$

$$\leqslant \varphi(q) \frac{1}{qM} N \log N \log q + \frac{1}{M} \log^2 N \log^2 q \ll \frac{N}{M} \log^2 N$$

wegen $q < N$, wenn wir jetzt $M \geqslant [(\log N)^b]$ mit $3 < b < B - \frac{1}{2}$ und $qM < N/(\log N)^{1/2}$ voraussetzen. Der Beweis zeigt, daß man in $(\log N)^{1/2}$ anstelle von $\frac{1}{2}$ auch jede kleinere positive Konstante verwenden kann. Es ist ja jedenfalls

$$\left| S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right| \leqslant \sum_{n} e^{-n/N} \Lambda(n) \sim N$$

nach dem Primzahlsatz und

$$\sum_{a}{}' \int_{-\delta}^{\delta} \log^2 N \log^2 q \, d\alpha \ll \varphi(q)\,\delta \log^2 N \log^2 q \ll \frac{1}{M} \log^2 N \log^2 q.$$

Aus (2.2) folgt nun

(2.4)
$$J = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' \sum_{\chi} \sum_{\chi_1} \chi(a)\bar{\chi}_1(a)\bar{\tau}_\chi \tau_{\chi_1} e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \int_{-\delta}^{\delta} A_\chi(\alpha)\overline{A_{\chi_1}(\alpha)} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha + R,$$

wobei noch $\overline{A_{\chi_1}(\alpha)} = A_{\bar{\chi}_1}(-\alpha)$ gilt. Somit hat man

(2.5) $$J = J_0 + J_1 + J_2 + R.$$

Dabei ist,

(2.6) $$J_0 = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' \chi_0(a)\bar{\chi}_0(a)\bar{\tau}_{\chi_0}\tau_{\chi_0} e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \int_{-\delta}^{\delta} A_{\chi_0}(\alpha) A_{\bar{\chi}_0}(-\alpha) e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha$$

denn es ist $\tau_{\chi_0} = \mu(q)$; und, wenn $\sum_{\chi}'$ bedeuten soll, daß der Hauptcharakter bei der Summation weggelassen wird,

(2.7) $$J_1 = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' \chi_0(a) \sum_{\chi}{}' \bar{\chi}(a)\bar{\tau}_{\chi_0}\tau_\chi e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \int_{-\delta}^{\delta} A_{\chi_0}(\alpha)\overline{A_\chi(\alpha)} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' \sum_{\chi}{}' \chi(a)\bar{\chi}_0(a)\bar{\tau}_\chi\tau_{\chi_0} e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \int_{-\delta}^{\delta} A_\chi(\alpha)\overline{A_{\chi_0}(\alpha)} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \sum_{\chi}{}' \bar{\chi}(a)\tau_\chi \int_{-\delta}^{\delta} A_{\chi_0}(\alpha)\overline{A_\chi(\alpha)} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha +$$

$$+ \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \sum_{\chi}{}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi \int_{-\delta}^{\delta} A_\chi(\alpha)\overline{A_{\chi_0}(\alpha)} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha,$$

insbesondere $J_1 = 0$ für $N_1 \equiv 0 \bmod q$ wegen $e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} = 1$ und $\sum_{a}' \bar{\chi}(a) = 0$ für jeden Nichthauptcharakter χ;

(2.8) $$J_2 = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a}{}' e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \sum_{\chi}{}' \sum_{\chi_1}{}' \chi(a)\bar{\chi}_1(a)\bar{\tau}_\chi\tau_{\chi_1} \times$$

$$\times \int_{-\delta}^{\delta} A_\chi(\alpha)\overline{A_{\chi_1}(\alpha)} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha.$$

Zunächst gilt für J_2

$$|J_2| \ll \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_a{}' \Big| \sum_\chi{}' \sum_{\chi_1}{}' \chi(a)\bar{\chi}_1(a)\bar{\tau}_\chi \tau_{\chi_1} A_\chi(\alpha)\overline{A_{\chi_1}(\alpha)} \Big| d\alpha$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_a{}' \Big| \sum_\chi{}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi(\alpha)\Big|^2 d\alpha$$

$$= \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_\chi{}' \sum_{\chi_1}{}' \sum_a \chi(a)\bar{\chi}_1(a)\bar{\tau}_\chi \tau_{\chi_1} A_\chi(\alpha)\overline{A_{\chi_1}(\alpha)}\, d\alpha.$$

Nun ist

$$\sum_{a \bmod q} \chi(a)\bar{\chi}_1(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{für} \quad \chi_1 = \chi, \\ 0 & \text{für} \quad \chi_1 \neq \chi. \end{cases}$$

Es ergibt sich also

$$J_2 \ll \frac{1}{\varphi(q)} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_\chi{}' |\tau_\chi|^2 |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha \ll \frac{q}{\varphi(q)} \sum_\chi{}' \int_{-\delta}^{\delta} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha. \tag{2.9}$$

Zwar brauchen wir J_1 zunächst nur für $N_1 \equiv 0 \bmod q$, doch leiten wir für J_1 eine ähnliche Abschätzung her wie für J_2. Es ist

$$|J_1| \ll \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_a{}' \Big| \sum_\chi{}' \bar{\chi}(a)\tau_\chi A_{\chi_0}\bar{A}_\chi \Big| d\alpha$$

$$= \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}| \Big\{ \sum_a{}' \Big| \sum_\chi{}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi \Big| \Big\} d\alpha$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}|^2 d\alpha \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\sum_a{}' \Big| \sum_\chi{}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi \Big| \Big)^2 d\alpha \Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}|^2 d\alpha \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(q) \sum_a{}' \Big| \sum_\chi{}' \ldots \Big|^2 d\alpha \Big\}^{1/2}.$$

Nach der bei J_2 durchgeführten Rechnung gilt somit

$$J_1 \ll \frac{1}{\varphi^2(q)} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}|^2 d\alpha \Big\}^{1/2} \Big\{ \varphi(q) \int_{-\delta}^{\delta} q\varphi(q) \sum_\chi{}' |A_\chi|^2 d\alpha \Big\}^{1/2} \tag{2.10}$$

$$= \frac{q^{1/2}}{\varphi(q)} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}|^2 d\alpha \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} \sum_\chi{}' |A_\chi|^2 d\alpha \Big\}^{1/2}.$$

3. Wir wollen nun, im Anschluß an Linnik [1], die Größen

$$\int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha, \tag{3.1}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha, \qquad \chi \neq \chi_0, \tag{3.2}$$

berechnen bzw. abschätzen. Man hat

$$A_{\chi_0}(\alpha) = \sum_{\substack{n \\ (n,q)=1}} e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i \alpha n} = S(\alpha) - \sum_{\substack{n \\ (n,q)=1}} e^{-n/N} \Lambda(n) e^{-2\pi i \alpha n}$$

$$= S(\alpha) + O(\log N \log q).$$

Mit (1.2) folgt wegen $q < N$

$$A_{\chi_0}(\alpha) = \frac{1}{1/N + 2\pi i \alpha} - \sum_\varrho \frac{\Gamma(\varrho)}{(1/N + 2\pi i\alpha)^\varrho} + O(\log^3 N), \tag{3.3}$$

wobei ϱ die Nullstellen der Zetafunktion in $0 < \sigma < 1$ durchläuft. Für $\chi \neq \chi_0$ gilt

$$A_\chi(\alpha) = -\sum_\varrho \frac{\Gamma(\varrho)}{(1/N + 2\pi i\alpha)^\varrho} + O(\log^3 N), \tag{3.4}$$

wobei jetzt ϱ die Nullstellen von $L(s, \chi)$ in $0 < \sigma < 1$ durchläuft. Mit $x = 1/N + 2\pi i\alpha$ erhält man

(3.5)

$$\int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{|1/N + 2\pi i\alpha|^2} d\alpha + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5;$$

mit

$$S_1(\alpha) = \sum_\varrho \frac{\Gamma(\varrho)}{x^\varrho} = \sum_\varrho \frac{\Gamma(\varrho)}{(1/N + 2\pi i\alpha)^\varrho} \tag{3.6}$$

ist dabei

$$U_1 \ll \int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha, \tag{3.7}$$

$$U_2 \ll \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x|^2} d\alpha \int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \Big\}^{1/2}, \tag{3.8}$$

$$(3.9)\qquad U_3 \ll \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \int_{-\delta}^{\delta} \log^6 N\, d\alpha \Big\}^{1/2},$$

$$(3.10)\qquad U_4 \ll \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x|^2}\, d\alpha \int_{-\delta}^{\delta} \log^6 N\, d\alpha \Big\}^{1/2},$$

$$(3.11)\qquad U_5 \ll \int_{-\delta}^{\delta} \log^6 N\, d\alpha .$$

Aus (4) ergibt sich weiter mit

$$(3.12)\qquad S_1(\alpha, \chi) = \sum_{\varrho} \frac{\Gamma(\varrho)}{x^{\varrho}},$$

wobei die Summation über die Nullstellen $\varrho = \varrho_\chi$ der Funktion $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ zu erstrecken ist,

$$(3.13)\qquad \int_{-\delta}^{\delta} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha \ll \int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha, \chi)|^2 d\alpha + \delta \log^6 N .$$

4. Aus Symmetriegründen genügt es, die in § 3 aufgetretenen Integrale für das Intervall $[0, \delta]$ zu untersuchen. Sei also im folgenden stets $\alpha \geqslant 0$. Es soll zunächst der Absolutbetrag der Summe $S_1(\alpha, \chi)$ abgeschätzt werden, und wir schreiben der Einfachheit halber

$$S_1(\alpha) \text{ anstelle von } S_1(\alpha, \chi).$$

Man hat mit $x = 1/N + 2\pi i\alpha$, $\varrho = \beta + i\gamma$

$$x^{-\varrho}\Gamma(\varrho) = \Gamma(\varrho)\, e^{-(\beta+i\gamma)(\log|x| + i\arg x)}$$

mit $-\pi/2 < \arg x < \pi/2$, d.h.

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} x^{-\varrho}\Gamma(\varrho) &= \Gamma(\varrho)\, e^{-\beta\log|x| + \gamma\arg x}\, e^{-i\gamma\log|x| - i\beta\arg x} \\ &= \Gamma(\varrho)\, |x|^{-\varrho}\, e^{\gamma \operatorname{arctg} 2\pi N\alpha}\, e^{-i\beta\operatorname{arctg} 2\pi N\alpha} \\ &= |x|^{-\varrho}\,\Gamma(\varrho)\, e^{\frac{\pi}{2}\gamma}\, e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}}\, e^{-i\beta\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

Für die Gammafunktion gilt bekanntlich

$$(4.2)\qquad |\Gamma(\sigma + it)| = (2\pi)^{1/2}\, |t|^{\sigma - \frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\{1 + O(|t|^{-1})\}$$

für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in jedem Intervall $A \leqslant \sigma \leqslant B$ (die Konstante in $O(\ )$ kann von A und B abhängen). Wir schreiben nun

$$(4.3)\qquad S_1(\alpha) = S_2(\alpha) + S_3(\alpha),$$

wobei in S_2 über die ϱ mit $\gamma \geqslant 0$ und in S_3 über die ϱ mit $\gamma < 0$ summiert werden soll. Die Anzahl der ϱ mit $T \leqslant \gamma \leqslant T+1$ ist nun bekanntlich $O\big(\log(q(T+2))\big)$. Damit findet man

$$(4.4)\qquad \sum_{\gamma \geqslant 0} e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}} \ll \log q + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}} \log(qn),$$

wobei für $\alpha = 0$ $\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha) = \pi/2$ zu setzen ist. Nun hat man etwa für $0 < \lambda \leqslant 1/2$ bekanntlich

$$(4.5)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda n} \ll \frac{1}{\lambda},$$

$$(4.6)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda n}\log^a n \ll \frac{1}{\lambda}\log^a\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (a > 0)$$

und für $a > 0$ überdies

$$(4.7)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda n} n^a \ll \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{a+1}.$$

Sei nun zunächst $\alpha \leqslant \alpha_0 = 4/N$, $\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha) \geqslant \operatorname{arctg}(1/8\pi)$. Dann ist die Summe (4.4) $\ll \log N$.

Für $\alpha > \alpha_0 = 4/N$ hat man $\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha) \geqslant c/N\alpha$ (mit passender Konstante c) und somit ist dann die Summe (4.4)

$$(4.8)\qquad \ll N\alpha\{\log q + \log(N\alpha)\} \qquad (N\alpha > 4),$$

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} S_2(\alpha) &= \sum_{\gamma\geqslant 0} \frac{\Gamma(\varrho)}{x^{\varrho}} = \sum_{\gamma\geqslant 0} \frac{\Gamma(\varrho)}{|x|^{\varrho}}\, e^{\frac{\pi}{2}\gamma}\, e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}} e^{-i\beta(\ldots)} \\ &\ll \sum_{\gamma\geqslant 0} \frac{\gamma^{\beta-\frac{1}{2}}}{|x|^{\beta}}\, e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}} \ll \sum_{\gamma\geqslant 0} \left(\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}\beta} \gamma^{\beta-\frac{1}{2}}\, e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}}. \end{aligned}$$

Wenn nun die Riemann'sche Vermutung für alle $L(s, \chi)$ als richtig vorausgesetzt wird, so sind alle $\beta = 1/2$. Dann folgt

$$(4.10)\qquad S_2(\alpha) \ll \left(\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\alpha^2\right)^{-1/4} \sum_{\gamma\geqslant 0} e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}}$$

und dies ist für $N\alpha \leqslant 4$

$$(4.11)\qquad \ll N^{1/2}\log q \ll N^{1/2}\log N$$

und für $N\alpha > 4$ jedenfalls

$$(4.12)\qquad \ll \alpha^{-1/2} N\alpha\{\log(N\alpha) + \log q\} = N\alpha^{1/2}\{\log(N\alpha) + \log q\}.$$

Aus (4.10) folgt nun

$$\int_0^{a_0} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \ll a_0 N \log^2 N \ll \log^2 N. \tag{4.13}$$

Für die Summe $S_3(\alpha)$ über die ϱ mit $\gamma < 0$ hat man

$$S_3(\alpha) \ll \sum_{\gamma<0} \frac{|\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma|}}{|x|^{\beta}} e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma|} e^{|\gamma| \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\alpha}}. \tag{4.14}$$

Wenn alle $\beta = 1/2$ sind, so folgt

$$S_3(\alpha) \ll |x|^{-1/2} \ll N^{1/2}. \tag{4.15}$$

Aus (4.3) folgt nun

$$\int_{-\delta}^{\delta} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll 2 \int_{-\delta}^{\delta} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha + 2 \int_{-\delta}^{\delta} |S_3(\alpha)|^2 d\alpha \tag{4.16}$$

mit

$$\int_{-\delta}^{\delta} |S_3(\alpha)|^2 d\alpha \ll N\delta. \tag{4.17}$$

5. Wir geben nun die Rechnung von Linnik für das Integral über $|S_2(\alpha)|^2$ wieder. Wir setzen $\delta_r = \delta/2^{r-1}$ für $r = 1, 2, \ldots$ (also $\delta_1 = \delta$). Für das r mit $\delta/2^{r-1} > a_0 \geqslant \delta/2^r$ soll $\delta_{r+1} = a_0$ gesetzt werden. Ferner setzen wir

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\alpha} = \lambda = \lambda(\alpha) \tag{5.1}$$

und

$$\operatorname{arctg} \frac{2^{r-1}}{2\pi N\delta} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\delta_r} = \lambda_r. \tag{5.2}$$

Wir zerlegen das Integral über $[a_0, \delta]$ $(\delta > a_0)$ in Integrale der Form

$$\int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha. \tag{5.3}$$

Für jedes solche Integral ist im Integranden

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\alpha} \geqslant \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\delta_r} = \lambda_r. \tag{5.4}$$

Für zwei Nullstellen $\varrho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$, $\varrho_2 = \beta_2 + i\gamma_2$ ($\varrho_1 = \varrho_2$ ist zugelassen) gilt

$$\int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} x^{-\varrho_1} \overline{x^{-\varrho_2}} \Gamma(\varrho_1) \overline{\Gamma(\varrho_2)} d\alpha = \Gamma(\varrho_1) \Gamma(\varrho_2) e^{\frac{\pi}{2}(\gamma_1+\gamma_2)} e^{-i\frac{\pi}{2}(\beta_1-\beta_2)} U, \tag{5.5}$$

wobei in U die α enthaltenden Bestandteile zusammengefaßt sind:

$$U = U(N, \delta, r, \gamma_1, \gamma_2) = \int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\alpha) d\alpha \tag{5.6}$$

mit

$$\varphi_1(\alpha) = e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda(\alpha)} e^{i(\beta_1-\beta_2)\lambda(\alpha)}, \quad \varphi_2(\alpha) = |x|^{-\varrho_1-\varrho_2}. \tag{5.7}$$

Setzt man noch für $\alpha \leqslant \delta_r$

$$\Phi(\alpha) = \int_{\delta_{r+1}}^{\alpha} \varphi_2(\alpha) d\alpha \tag{5.8}$$

so folgt durch Teilintegration

$$\int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\alpha) d\alpha = \int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} \varphi_1(\alpha) \Phi'(\alpha) d\alpha = \varphi_1(\alpha)\Phi(\alpha)\Big|_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} - \int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} \Phi(\alpha)\varphi_1'(\alpha) d\alpha. \tag{5.9}$$

Sei A das Supremum von $|\Phi(\alpha)|$ im Intervall $\delta_{r+1} \leqslant \alpha \leqslant \delta_r$. Dann wird wegen ($\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$ nach Definition von S_2)

$$U \leqslant A\{2e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r} + V\}$$

mit

$$V = \int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda(\alpha)} \frac{\gamma_1+\gamma_2+1}{1+\frac{1}{(2\pi N\alpha)^2}} \frac{d\alpha}{2\pi N\alpha^2}$$

weil ja

$$\varphi_1'(\alpha) = \varphi_1(\alpha)\{-(\gamma_1+\gamma_2) + i(\beta_1-\beta_2)\} \frac{d}{d\alpha}\lambda(\alpha)$$

gilt mit

$$|-(\gamma_1+\gamma_2) + i(\beta_1-\beta_2)| \leqslant \gamma_1+\gamma_2+1$$

und

$$\lambda'(\alpha) = \frac{1}{1+\frac{1}{(2\pi N\alpha)^2}} \left(-\frac{1}{2\pi N\alpha^2}\right).$$

Für $\gamma_1+\gamma_2 \leqslant 1$ hat man

$$V \leqslant 2 \int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} \frac{d\alpha}{2\pi N\alpha^2} \leqslant 2 \frac{1}{2\pi N\delta_{r+1}} = 2 \frac{2^r}{2\pi N\delta},$$

wobei wieder $\delta/2^r$ durch α_0 zu ersetzen ist, wenn $\delta/2^{r-1} > \alpha_0 \geq \delta/2^r$ ist. Es folgt dann weiter

$$U \leq A\left\{2+2\frac{1}{2\pi N\alpha_0}\right\} = c_1 A$$

mit einer Konstanten $c_1 > 0$. Für $\gamma_1+\gamma_2 > 1$ erhält man

$$V \leq 2\int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda(\alpha)} \frac{\gamma_1+\gamma_2}{1+\frac{1}{(2\pi N\alpha)^2}}\,\frac{d\alpha}{2\pi N\alpha^2}$$

$$= 2e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda(\alpha)}\Big|_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} \leq 2e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r}.$$

Damit erhält man für $\gamma_1+\gamma_2 > 1$

$$U \leq 4Ae^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r}.$$

Weiter hat man

$$\Phi(\alpha) = \int_{\delta_{r+1}}^{\alpha} |x|^{-\varrho_1-\bar{\varrho}_2}\,d\alpha = \int_{\delta_{r+1}}^{\alpha}\{\sqrt{1/N^2+4\pi^2\alpha^2}\}^{-\beta_1-\beta_2-i(\gamma_1-\gamma_2)}\,d\alpha.$$

Wir setzen

$$u = \sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\alpha^2}, \qquad \alpha = \frac{1}{2\pi}\sqrt{u^2-\frac{1}{N^2}}$$

und erhalten

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_{r+1}}^{\alpha} u^{-\beta_1-\beta_2-i(\gamma_1-\gamma_2)}\,\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{N^2u^2}}},$$

wobei in den Grenzen die α-Werte beibehalten wurden. Dabei ist wegen $\alpha > \alpha_0$

$$u > \sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\frac{16}{N^2}} > \frac{4}{N}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt

$$A \leq 2\sup_{\alpha}\left|\int_{\delta_{r+1}}^{\alpha} u^{-\beta_1-\beta_2-i(\gamma_1-\gamma_2)}\,du\right|,$$

$$\delta_{r+1} \leq \alpha \leq \delta_r; \qquad 1\Big/\sqrt{1-\frac{1}{N^2u^2}}$$

ist ja bei zunehmendem u monoton abnehmend. Für $\delta_{r+1} \leq \alpha \leq \delta_r$ gilt $\delta/2^r \leq u \leq 10\delta/2^{r-1}$. Denn

$$\frac{\delta}{2^r} \leq \sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\left(\frac{\delta}{2^r}\right)^2}$$

und

$$\left\{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\left(\frac{\delta}{2^{r-1}}\right)^2\right\}^{1/2} \leq \left\{\left(\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{2^{r-1}}\right)^2+4\pi^2\left(\frac{\delta}{2^{r-1}}\right)^2\right\}^{1/2}$$

wegen $\delta/2^{r-1} > \alpha_0 = 4/N$, und die rechte Seite ist $< 10(\delta/2^{r-1})$. Wegen

$$|\xi+i\eta| \geq \tfrac{1}{2}(|\xi|+|\eta|)$$

folgt

(5.10) $$A \leq c_2\min\left\{\frac{\left(\frac{\delta}{2^r}\right)^{-\beta_1-\beta_2+1}}{|1-\beta_1-\beta_2|+|\gamma_1-\gamma_2|},\ \left(\frac{\delta}{2^r}\right)^{1-\beta_1-\beta_2}\right\}.$$

Für $\gamma \geq 0$ hat man noch

(5.11) $$\Gamma(\beta+i\gamma)\,e^{\frac{\pi}{2}\gamma} \ll (\gamma+1)^{\beta-\frac{1}{2}}.$$

Damit erhält man schließlich

(5.12) $$\int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} |S_2(\alpha)|^2\,d\alpha$$

$$\ll \sum_{\gamma_1\geq 0}\sum_{\gamma_2\geq 0}(\gamma_1+1)^{\beta_1-\frac{1}{2}}(\gamma_2+1)^{\beta_2-\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{2^r}\right)^{-\beta_1-\beta_2+1}\times$$

$$\times\min\left\{\frac{1}{|1-\beta_1-\beta_2|+|\gamma_1-\gamma_2|},\ 1\right\}e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r}.$$

(Für $\gamma_1+\gamma_2 \leq 1$ ist

$$e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r} \geq e^{-\lambda_r} = e^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\delta_r}} = e^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{8\pi}} > \text{const.})$$

6. Wenn wir nun die Richtigkeit der Riemann'schen Vermutung voraussetzen, so finden wir mit $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ aus (5.12)

(6.1) $$\int_{\delta_{r+1}}^{\delta_r} |S_2(\alpha)|^2\,d\alpha \ll \sum_{\gamma_1\geq 0}\sum_{\gamma_2\geq 0} e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\lambda_r}\min\left\{1,\ \frac{1}{|\gamma_1-\gamma_2|}\right\}.$$

Da nun die Anzahl der Nullstellen von $L(s,\chi)$ in $k \leq \gamma \leq k+1$ bekanntlich $O\big(\log(q(k+2))\big)$ ist für $k = 0, 1, 2, \dots$ wird dies

(6.2) $$\ll \sum_{k_1,k_2\geq 0}\sum e^{-(k_1+k_2)\lambda_r}\log\big(q(k_1+2)\big)\log\big(q(k_2+2)\big)\min\left\{1,\ \frac{1}{|k_1-k_2|}\right\}.$$

Durch Trennen der Fälle $k_1 = k_2$ und $k_1 \neq k_2$ erhält man die beiden Schranken

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\lambda_r} \log^2\big(q(k+2)\big) \tag{6.3}$$

und

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} \log\big(q(k+2)\big) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(2k+m)\lambda_r} \frac{1}{m} \log\big(q(k+m+2)\big). \tag{6.4}$$

Die Summe aus (6.3) ist

$$\ll \frac{1}{\lambda_r} \log^2 q + \frac{1}{\lambda_r} \log^2 \frac{1}{\lambda_r}$$

mit λ_r aus (5.2) also wegen $q < N$

$$\ll N\delta_r \log^2 N = N \frac{\delta}{2^{r-1}} \log^2 N. \tag{6.5}$$

Um die Summe aus (6.4) abzuschätzen betrachten wir zunächst

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\lambda_r} \frac{1}{m} \{\log q + \log(k+m+2)\}$$
$$\ll \left(\log \frac{1}{\lambda_r}\right) \left\{\log q + \log(k+2) + \log \frac{1}{\lambda_r}\right\} \ll \log(k+2) \log N + \log^2 N,$$

so daß man für die Summe aus (6.4) die Schranke erhält

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\lambda_r} \log\big(q(k+2)\big) \{\log^2 N + \log N \log(k+2)\} \tag{6.6}$$
$$\ll \left(\frac{1}{\lambda_r} \log q + \frac{1}{\lambda_r} \log \frac{1}{\lambda_r}\right) \log^2 N + \left\{\frac{1}{\lambda_r}\left(\log \frac{1}{\lambda_r}\right) \log q + \frac{1}{\lambda_r} \log^2 \frac{1}{\lambda_r}\right\} \log N$$
$$\ll N \frac{\delta}{2^{r-1}} \log^3 N.$$

Insgesamt ergibt sich ($\delta > a_0$)

$$\int_{a_0}^{\delta} |S_2(a)|^2 da \ll \sum_r N \frac{\delta}{2^{r-1}} \log^3 N \ll N\delta \log^3 N \tag{6.7}$$

und nach (4.16) und (4.17)

$$\int_{-\delta}^{\delta} |S_1(a)|^2 da \ll N\delta \log^3 N. \tag{6.8}$$

7. Um die Formel (3.5) auswerten zu können, brauchen wir noch

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{2\pi i N_1 a}}{\left|\frac{1}{N} + 2\pi i a\right|^2} da = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i N_1 a}}{\frac{1}{N^2} + 4\pi^2 a^2} da + O\left(\int_{\delta}^{\infty} \frac{da}{\frac{1}{N^2} + 4\pi^2 a^2}\right) \tag{7.1}$$
$$= \frac{1}{2} N e^{-\frac{|N_1|}{N}} + O\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

wegen

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{da}{a^2} \ll \frac{1}{\delta} \quad \text{für} \quad \delta > 0.$$

Weiter hat man

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{|x|^2} da = \int_0^{\delta} \frac{da}{\frac{1}{N^2} + 4\pi^2 a^2} = \frac{1}{2\pi} N \int_0^{2\pi N\delta} \frac{d(2\pi N a)}{1 + (2\pi N a)^2} \leqslant \frac{1}{4} N. \tag{7.2}$$

Mit diesen Schranken erhalten wir aus (3.7) bis (3.11)

$$U_1 \ll N\delta \log^3 N, \quad U_2 \ll N\delta^{1/2} \log^{3/2} N, \tag{7.3}$$
$$U_3 \ll N^{1/2} \delta \log^{9/2} N, \quad U_4 \ll N^{1/2} \delta^{1/2} \log^3 N, \quad U_5 \ll \delta \log^6 N$$

und schließlich wird (3.5)

$$\int_{-\delta}^{\delta} |A_{\chi_0}(a)|^2 e^{2\pi i N_1 a} da = \frac{1}{2} N e^{-\frac{|N_1|}{N}} + O\left(N\delta^{1/2} \log^{3/2} N + N\delta \log^3 N + \frac{1}{\delta}\right) \tag{7.4}$$
$$= \frac{1}{2} N e^{-\frac{|N_1|}{N}} + O\left(\frac{N}{q^{1/2} M^{1/2}} \log^{3/2} N + qM\right)$$

für $M \geqslant [(\log N)^b]$, $3 < b < B - \frac{1}{2}$.

Weiter erhalten wir nach (3.13) für $\chi \neq \chi_0$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |A_\chi(a)|^2 da \ll N\delta \log^3 N. \tag{7.5}$$

Für J_0 finden wir mit (2.6)

(7.6)

$$J_0 = \frac{1}{2} N e^{-\frac{|N_1|}{N}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} + O\left(\frac{1}{\varphi(q)} \frac{N}{q^{1/2} M^{1/2}} \log^{3/2} N + \frac{q}{\varphi(q)} M\right).$$

Für J_1 erhalten wir aus (2.10), wenn wir (7.4) mit $N_1 = 0$ benützen

$$(7.7)\qquad J_1 \ll \frac{q^{1/2}}{\varphi(q)} N^{1/2}\{\varphi(q) N\delta \log^3 N\}^{1/2} = \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{1/2} N\delta^{1/2}\log^{3/2} N \ll N\delta^{1/2}\log^{3/2} N (\log\log q)^{1/2}.$$

Nach (2.9) wird

$$(7.8)\qquad J_2 \ll \frac{q}{\varphi(q)}\varphi(q) N\delta\log^3 N = qN\delta\log^3 N = \frac{N}{M}\log^3 N.$$

Aus (2.5) und (2.3) ergibt sich schließlich

$$(7.9)\qquad J = \sum_{\substack{a \bmod q\\(a,q)=1}} \int_{-1/qM}^{1/qM} \left|S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right|^2 e^{2\pi i N_1\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)} d\alpha = \frac{1}{2} N e^{-\frac{|N_1|}{N}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a \bmod q\\(a,q)=1}} e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} + O\left(\frac{N}{(qM)^{1/2}}\log^{3/2} N (\log\log N)^{1/2} + \frac{N}{M}\log^3 N + \frac{qM}{\varphi(q)}\right)$$

(q natürliche Zahl $< N$) für $M \geqslant [(\log N)^b]$ und $qM < N/\log^{1/2} N$.

8. Wir setzen nun $M = [(\log N)^b]$. Mit $\mathfrak{M}$ sei die Vereinigung aller ϑ-Intervalle

$$\mathfrak{M}: \left|\vartheta - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qM}$$

bezeichnet, $a = 0, 1, 2, \ldots, q-1$ [3] die nicht übereinander greifen und sämtlich im Intervall $[-1/qM, 1-1/qM]$ liegen. Mit $\mathfrak{m}$ sei die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ bezüglich dieses Intervalls bezeichnet. Man hat nach (1.7)

$$T(\vartheta) = e^{-2\pi i q\vartheta}\frac{e^{-2\pi i qP\vartheta}-1}{e^{-2\pi i q\vartheta}-1}$$

also

$$T(\vartheta) \ll M \quad \text{für} \quad \vartheta \in \mathfrak{m},$$

d.h. wegen $P = [(\log N)^B]$, $B > b + \frac{1}{2} > \frac{7}{2}$,

$$(8.2)\qquad T(\vartheta) \ll \frac{P}{(\log N)^{B-b}} \quad \text{für} \quad \vartheta \in \mathfrak{m}.$$

[3] a durchläuft jetzt also auch Zahlen, die nicht zu q teilerfremd sind.

Damit erhält man

$$(8.3)\qquad \int_{\mathfrak{m}} |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta \ll \frac{P^2}{(\log N)^{2(B-b)}}\int_0^1 |S(\vartheta)|^2 d\vartheta \ll \frac{P^2 N}{(\log N)^{2(B-b)-1}}$$

wegen

$$(8.4)\qquad \int_0^1 |S(\vartheta)|^2 d\vartheta = \sum_n e^{-2n/N}\{\Lambda(n)\}^2 \sim \tfrac{1}{2} N\log N.$$

Man hat nun

$$(8.5)\qquad \int_{\mathfrak{M}} |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta = \sum_{q_1|q}\sum_{\substack{a \bmod q_1\\(a,q_1)=1}} \int_{-1/qM}^{1/qM}\left\{\left|S\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)\right|^2 \sum_{1\leqslant m_1,}\sum_{m_2\leqslant P} e^{2\pi i(m_1-m_2)q\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)}\right\} d\alpha,$$

wobei man in den Grenzen der Integrale schreiben kann

$$(8.6)\qquad \frac{1}{qM} = \frac{1}{q_1\left(\frac{q}{q_1}M\right)} = \frac{1}{q_1 M_1}$$

mit

$$(8.7)\qquad [\log^b N] \leqslant M_1 = \frac{q}{q_1}M \leqslant \frac{1}{q_1}\frac{N}{\log^{1/2} N}$$

also $q_1 M_1 \leqslant N/\log^{1/2} N$. Damit findet man nach (7.9)

$$(8.8)\qquad \int_{\mathfrak{M}} |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{1}{2} N \sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{1\leqslant m_1,}\sum_{m_2\leqslant P} e^{\frac{-|m_1-m_2|q}{N}} + W$$

mit

$$W \ll \sum_{q_1|q}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\left\{\frac{N}{q_1^{1/2}\left(M\frac{q}{q_1}\right)^{1/2}}\log^{3/2} N(\log\log N)^{1/2} + \frac{N}{M\frac{q}{q_1}}\log^3 N + \frac{q_1}{\varphi(q_1)} M\frac{q}{q_1}\right\}.$$

Nun hat man

$$\sum_{q_1|q} \frac{1}{q_1^{1/2}} = \frac{\tau(q)}{q^{1/2}},$$

wenn $\tau(q)$ die Anzahl der positiven Teiler von q ist; ferner

$$\sum_{q_1|q} \frac{1}{q/q_1} = \sum_{d|q} \frac{1}{d} \ll \log\log q$$

und

$$\sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)} \ll \log\log q.$$

Also folgt

$$W \ll NP^2 \left\{ \frac{\tau(q)}{q^{1/2} M^{1/2}} \log^{3/2} N (\log\log N)^{1/2} + \frac{1}{M} \log^3 N \log\log q \right\} + P^2 Mq \log\log q.$$

Benützt man noch

$$e^{-\frac{|m_1-m_2|q}{N}} = 1 + O\left(\frac{Pq}{N}\right),$$

$Pq/N \ll (\log N)^{-(C-B)}$, so erhält man aus dem ersten Summanden von (8.8) wegen

$$\sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q_1)}{\varphi(q_1)} = \frac{q}{\varphi(q)}$$

ein Fehlerglied

$$\ll \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 \frac{Pq}{N} \ll \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 (\log N)^{-(C-B)}.$$

Insgesamt erhält man

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 + R^*$$

mit

$$R^* \ll \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 (\log N)^{-\mu}, \quad \mu < \min\{\tfrac{1}{2}(b-3), 1, (C-B)\}.$$

Mit (8.3) erhält man

$$\int_0^1 |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta = \sum_n r^2(n) = \frac{1}{2} \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 + O\left(\frac{q}{\varphi(q)} \frac{NP^2}{(\log N)^\nu}\right),$$

$$\nu < \min\{\tfrac{1}{2}(b-3), C-B, 2(B-b)-1, 1\}.$$

9. Wir berechnen nun

$$\sum_n r(n) r_1(n) = \sum_n \Big\{ \sum_{\substack{n_1 \\ n_1+qm=n \\ 1\le m\le P}} \Lambda(n_1) e^{-n_1/N} \Big\} \frac{q}{\varphi(q)} e^{-n/N} P$$

$$= \frac{q}{\varphi(q)} P \sum_{n_1} \Lambda(n_1) e^{-n_1/N} \sum_{\substack{n=n_1+qm \\ 1\le m\le P}} e^{-n/N}$$

$$= \frac{q}{\varphi(q)} P \sum_{n_1} \Lambda(n_1) e^{-2n_1/N} \left\{ P + O\left(P \frac{qP}{N}\right) \right\}$$

$$= \frac{q}{\varphi(q)} P \{ \tfrac{1}{2} N + O(N e^{-\sqrt{\log N}}) \} \left\{ P + O\left(\frac{P}{(\log N)^{C-B}}\right) \right\}.$$

Insgesamt gilt also jedenfalls

$$\sum_n r(n) r_1(n) = \frac{1}{2} \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 + O\left(\frac{q}{\varphi(q)} \frac{NP^2}{(\log N)^\nu}\right).$$

Schließlich hat man

$$\sum_n r_1^2(n) = \sum_{\substack{n \\ (n,q)=1}} \frac{q^2}{\varphi^2(q)} P^2 e^{-2n/N} = \frac{q^2}{\varphi^2(q)} P^2 \sum_n \Big\{ \sum_{d|(q,n)} \mu(d) \Big\} e^{-2n/N}$$

$$= \frac{q^2}{\varphi^2(q)} P^2 \sum_{d|q} \mu(d) \sum_n e^{-2nd/N} = \frac{q^2}{\varphi^2(q)} P^2 \sum_{d|q} \mu(d) \left\{ \frac{1}{2} \frac{N}{d} + O(1) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 + O\left(\frac{q^2}{\varphi^2(q)} P^2 \tau(q)\right) = \frac{1}{2} \frac{q}{\varphi(q)} NP^2 + O\left(\frac{q}{\varphi(q)} \frac{NP^2}{(\log N)^\nu}\right).$$

Somit folgt

$$\sum_n \{r(n) - r_1(n)\}^2 \ll \frac{q}{\varphi(q)} \frac{NP^2}{(\log N)^\nu}.$$

Insbesondere ist

$$\sum_{n\le N} \{r(n) - r_1(n)\}^2 \ll \frac{q}{\varphi(q)} \frac{NP^2}{(\log N)^\nu}.$$

Die Anzahl der zu q teilerfremden $n \leqslant N$ mit $r(n) = 0$ ist daher

$$\ll \frac{\varphi^2(q)}{q^2} P^{-2} \frac{q}{\varphi(q)} \frac{NP^2}{(\log N)^\nu} = \frac{\varphi(q)}{q} \frac{N}{(\log N)^\nu}$$

während die Anzahl aller zu q teilerfremden $n \leqslant N$

$$\left[\frac{N}{q}\right]\varphi(q) + O(\varphi(q)) = \frac{\varphi(q)}{q} N + O(\varphi(q)) = \frac{\varphi(q)}{q} N + O\left(\frac{\varphi(q)}{q} N (\log N)^{-C}\right).$$

Es sind also

$$\frac{\varphi(q)}{q} N - A, \qquad A \ll \frac{\varphi(q)}{q} \frac{N}{(\log N)^\nu}$$

zu q teilerfremde Zahlen n, $n \leqslant N$ entweder in der Form $p + qm$ oder in der Form $p^l + qm$, $l \geqslant 2$ darstellbar. Die Anzahl der in der letzteren Form darstellbaren n ist aber $\ll N^{1/2}P$. Daher sind

$$\frac{\varphi(q)}{q} N - o\left(\frac{\varphi(q)}{q} N\right)$$

Zahlen n in der Form $p + qm$ darstellbar.

10. Mit Hilfe der A. Selberg'schen Abschätzungen für die L-Funktionen kann man vermutlich zeigen, daß in unserem Satz $\frac{7}{2}$ durch $2 + \varepsilon$ ersetzt werden kann. Linnik beweist loc. cit. unter anderem noch: 1) Wenn die Riemann'sche Vermutung für die L-Funktionen $\bmod q$ richtig ist, $q \leqslant N/(\log N)^6$, gibt es Lösungen p, p' und h der Gleichung $p + p' = N + qh$ mit Primzahlen p und p' und $0 \leqslant h \leqslant (\log N)^6$ (wobei N bei geradem q ebenfalls gerade sein soll). 2) Wenn die „Dichte-hypothese"

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)}(\log T)^r,$$

$r \geqslant 1$, $N(\sigma, T)$ wie üblich die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ in $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$, richtig ist, so gibt es für großes N Primzahlen p und p' mit

$$|p + p' - N| \leqslant (\log N)^{r+6}.$$

Der Beweis von 2) scheint bei Linnik unrichtig zu sein, kann aber wohl mit den neueren Dichtesätzen von Halász und Turán richtiggestellt werden, wobei eventuell eine größere Potenz von $\log N$ in Kauf genommen werden muß. 1) kann mit Hilfe unserer Rechnung etwas verbessert werden. Ohne die Richtigkeit der Riemann'schen Vermutung anzunehmen, kann man unseren Satz für nicht zu große q mit $P = N^{1/5+\varepsilon}$ mittels der neuen Dichtesätze von Montgomery (loc. cit. Chap. 12) beweisen (Zweiter Teil des A. Selberg'schen Primzahlsatzes). Die Behandlung der genannten Fragen soll eventuell in einer weiteren Arbeit ausgeführt werden.

Zusatz bei der Korrektur: Wie nur Herr Professor Schinzel freundlicherweise mitteilte, wurde von Montgomery aud Vaughan in Bd 27 (1975) dieser Zeitschrift folgendes bewiesen: Wenn die Riemann'sche Vermutung richtig ist, gibt es Lösungen p, p' und h der Gleichung $p + p' = N + h$ mit Primzahlen p und p' und $0 \leqslant h \leqslant C(\log N)^2$.

Die beiden Autoren bemerken, daß dasselbe Resultat schon vor ein paar Jahren von Kátai bewiesen wurde.

Literaturverzeichnis

[1] Ю. В. Линник, *Некоторые условные теоремы касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха*, Изв. Акад. Наук СССР, мат. сер., 16 (1952), S. 503–520.

[2] A. Selberg, *On the normal density of primes in small intervalls, and the difference between consecutive primes*, Arch. for Mat. og Naturvid. B, 47 (1943), No 6.

Eingegangen 2.4.1974 (552)