ACTA ARITHMETICA
XXVIII (1975)

О точках перегиба функции $Z(t)$

Ян Мозер (Братислава)

1. Пусть t_0', t_0'' — соседние члены последовательности $\{t_0\}$, введенной в заметке [2]. Так как в точках t_0 функция $Z(t)$ достигает локальных экстремумов, то промежуток (t_0', t_0'') содержит точку перегиба $\tilde{t}$ функции $Z(t)$.

Пусть $\{\tilde{t}\}$ обозначает последовательность точек перегиба функции $Z(t)$. Эта последовательность бесконечна (достаточно вспомнить теорему Харди о бесконечности множества нулей дзета-функции Римана на критической прямой).

Покажем, что существует определенная закономерность в распределении точек перегиба $\tilde{t}$. А именно, если обозначить

$$m(t_0) = \min(\gamma'' - t_0, t_0 - \gamma'), \tag{1}$$

$$a(t_0) \sim m(t_0)\left\{\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

то имеет место

Теорема 1. *Если справедлива гипотеза Римана, то*

$$|\tilde{t} - \tilde{t}_0| > \frac{3}{4}\,\frac{m(\tilde{t}_0)}{1+a(\tilde{t}_0)}, \qquad \tilde{t} \in (\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}''), \tag{3}$$

начиная с определенного $\tilde{t}$.

Дальше, в силу соотношения

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it), \tag{4}$$

имеет место следующее: если $\frac{1}{2}+i\gamma$ является нулем кратности $n(\gamma)$ функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, то γ является нулем функции $Z(t)$ кратности $n(\gamma)$, и, наоборот.

Пусть $\bar{t}_0', \bar{t}_0''$ — соседние члены последовательности $\{t_0\}$ отделяющие нуль $\bar{\gamma}$ функции $Z(t)$, т.е.

$$\bar{t}_0' < \bar{\gamma} < \bar{t}_0''. \tag{5}$$

Вычисления связанные с функцией $Z(t)$, показывают, что промежутки $(\bar{t}_0', \bar{\gamma})$, $(\bar{\gamma}, \bar{t}_0'')$ несодержат одновременно точек перегиба функции $Z(t)$.

В этом направлении имеет место

Теорема 2. *Если справедлива гипотеза Римана, и один из промежутков $(\bar{t}_0', \bar{\gamma})$, $(\bar{\gamma}, \bar{t}_0'')$ несодержит точку перегиба функции $Z(t)$, то нуль $\bar{\gamma}$ функции $Z(t)$ простый.*

Примечание. В силу сказанного в связи с соотношением (4), это означает, что $\frac{1}{2}+i\bar{\gamma}$ является простым нулем функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

2. В этой части приведем одну формулу. Пусть

$$\gamma' < t_0 - \Delta(t_0) < t_0 + \Delta(t_0) < \gamma''.$$

Положим

$$I(t_0) = \langle t_0 - \Delta, t_0 + \Delta \rangle. \tag{6}$$

Покажем, что в предположении справедливости гипотезы Римана, имеет место

Формула. При $t \in I(t_0)$

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = -(t-t_0)\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)(t-\gamma)} + O\left(\frac{|t-t_0|}{t_0}\right). \tag{7}$$

Действительно. Прежде всего (см. [3], соотношение (1))

$$-\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\} = \sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{8}$$

Однако, в силу оценки Литтлвуда, [4], стр. 223,

$$O\left(\frac{1}{t}\right) = O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad t \in I(t_0), \tag{9}$$

так что, из (8) получается, при $t \in I(t_0)$,

$$-\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\} = \sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right). \tag{10}$$

Так как бесконечный ряд в соотношении (10) равномерно сходится на промежутке $I(t_0)$, то, интегрируя соотношение (10) в пределах от t_0 до $t \in I(t_0)$, получается (напомним, что $Z'(t_0) = 0$)

$$-\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{\gamma}\left(-\frac{1}{t-\gamma} + \frac{1}{t_0-\gamma}\right) + O\left(\frac{|t-t_0|}{t_0}\right) = $$
$$= (t-t_0)\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)(t-\gamma)} + O\left(\frac{|t-t_0|}{t_0}\right),$$

т.е. (7).

3. В этой части приведем вспомогательные утверждения, нужные для доказательства теоремы 1.

Положим

$$\frac{\Delta(t_0)}{m(t_0)} = \delta(t_0), \tag{11}$$

где

$$0 < \delta(t_0) < 1. \tag{12}$$

Так как

$$\frac{1}{(t_0-\gamma)(t-\gamma)} = \frac{1}{(t_0-\gamma)^2\left(1+\dfrac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)}, \quad t \in I(t_0), \tag{13}$$

и, для всех γ и $t \in I(t_0)$

$$\left|\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right| \leqslant \frac{\Delta}{m} = \delta, \tag{14}$$

то

$$\frac{1}{(t_0-\gamma)(t-\gamma)} \leqslant \frac{1}{1-\delta}\,\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}. \tag{15}$$

Значит, имеет место

Лемма 1. *При $t \in I(t_0)$*

$$\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)(t-\gamma)} \leqslant \frac{1}{1-\delta}\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}.$$

Так как, в силу оценки Литтлвуда, [1],

$$\gamma''-\gamma' < \frac{A}{\ln\ln\gamma'}, \tag{16}$$

имеет место

$$\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2} > A(\ln\ln t_0)^2, \tag{17}$$

то, в силу леммы 1, формула (7) дает

$$\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = (t-t_0)^2\left\{\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)(t-\gamma)} + O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\}^2 \leqslant \tag{18}$$
$$\leqslant (t-t_0)^2\left\{\frac{1}{1-\delta}\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\}^2 =$$
$$= \frac{(t-t_0)^2}{(1-\delta)^2}\left\{\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^2\left\{1+O\left(\frac{1-\delta}{t_0}\left[\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right]^{-1}\right)\right\}^2 =$$

$$= \frac{(t-t_0)^2}{(1-\delta)^2}\left\{\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^2\left\{1+O\left(\frac{1}{t_0(\ln\ln t_0)^2}\right)\right\}^2 =$$

$$= \frac{(t-t_0)^2}{(1-\delta)^2}\left\{1+O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\}\left\{\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^2.$$

Следовательно, имеет место

Лемма 2. *При* $t\in I(t_0)$

$$\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 \leqslant \frac{(t-t_0)^2}{(1-\delta)^2}\left\{1+O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\}\left\{\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^2.$$

Так как

(19) $$\frac{1}{(t-\gamma)^2} = \frac{1}{(t_0-\gamma)^2\left(1+\dfrac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)^2}, \quad t\in I(t_0),$$

то, в силу (14), получается

Лемма 3. *При* $t\in I(t_0)$

$$\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} \geqslant \frac{1}{(1+\delta)^2}\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}.$$

Наконец, покажем, что имеет место

Лемма 4. *Если* $x>0$, $a>0$, *то для* x^* *удовлетворяющих неравенству*

(20) $$\frac{1-x}{1+x} < ax,$$

имеет место следующая оценка снизу:

$$x^* > \frac{3}{4}\frac{1}{1+a}.$$

Действительно. Из (20) следует

(21) $$x^2+\frac{1+a}{a}x-\frac{1}{a}>0,$$

т.е.

(22) $$\left|x+\frac{1+a}{2a}\right| > \sqrt{\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2+\frac{1}{a}}.$$

Однако, $x+\dfrac{1+a}{a}>0$, так что

(23) $$x^* > \sqrt{\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2+\frac{1}{a}} - \frac{1+a}{2a} = \frac{1+a}{2a}\left(\sqrt{1+\frac{4a}{(1+a)^2}}-1\right).$$

Так как, в силу неравенства $(1-a)^2\geqslant 0$,

(24) $$\frac{4a}{(1+a)^2}\leqslant 1,$$

и, дальше,

(25) $$\sqrt{1+\omega} > 1+\tfrac{1}{2}\omega-\tfrac{1}{8}\omega^2, \quad 0<\omega\leqslant 1,$$

то, из (23), в силу (25), получается

(26)

$$x^* > \frac{1}{1+a}\left(1-\frac{a}{(1+a)^2}\right) = \frac{1}{1+a}\,\frac{1+a+a^2}{1+2a+a^2} = \frac{1}{1+a}\,\frac{1}{1+\dfrac{a}{1+a+a^2}}.$$

Так как

(27) $$\frac{d}{da}\left(\frac{a}{1+a+a^2}\right) = \frac{1-a^2}{(1+a+a^2)^2},$$

(28) $$\lim_{a\to 0+}\frac{a}{1+a+a^2}=0, \quad \lim_{a\to+\infty}\frac{a}{1+a+a^2}=0,$$

то

(29) $$\max_{a>0}\frac{a}{1+a+a^2} = \left(\frac{a}{1+a+a^2}\right)_{a=1} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, из (26) получается

$$x^* > \frac{3}{4}\frac{1}{1+a}.$$

4. Доказательство теоремы 1. Прежде всего, из бесконечной последовательности $\{\tilde{t}\}$, выделим подпоследовательность $\{\tilde{\tilde{t}}\}$ по следующему признаку: если

(30) $$|\tilde{t}-\tilde{t}_0| < m(\tilde{t}_0),$$

то $\tilde{t}\in\{\tilde{\tilde{t}}\}$.

Теперь имеется следующая альтернатива:

(A) или последовательность $\{\tilde{\tilde{t}}\}$ конечна,

(Б) или последовательность $\{\tilde{\tilde{t}}\}$ бесконечна.

Если имеет место случай (A), то, в силу (30), начиная с некоторой точки перегиба, имеет место

(31) $$|\tilde{t}-\tilde{t}_0| \geqslant m(\tilde{t}_0),$$

т.е., в силу $a>0$, в этом случае утверждение теоремы верно.

Остается изучить случай (Б). Итак, предположим, что последовательность $\{\tilde{\tilde{t}}\}$ бесконечна. Так как функция $Z(t)$ любое число раз непрерывно дифференцируемая, имеет место

$$Z''(\tilde{\tilde{t}}) = 0. \tag{32}$$

В силу (32), из соотношения (10), получается

$$\left\{\frac{Z'(\tilde{\tilde{t}})}{Z(\tilde{\tilde{t}})}\right\}^2 = \sum_\gamma \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{\tilde{\tilde{t}}_0}\right). \tag{33}$$

Так как, в силу (17) и леммы 3, при $t \in I(t_0)$, имеет место

$$\begin{aligned}\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right) &> \frac{1}{(1+\delta)^2}\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right) = \\ &= \frac{1}{(1+\delta)^2}\left\{1 + O\left(\frac{(1+\delta)^2}{t_0}\left[\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right]^{-1}\right)\right\}\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} = \\ &= \frac{1}{(1+\delta)^2}\left\{1+O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\}\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2},\end{aligned} \tag{34}$$

то, из соотношения (33), полагая

$$\tilde{\tilde{\Delta}} = \Delta(\tilde{\tilde{t}}_0) = |\tilde{\tilde{t}} - \tilde{\tilde{t}}_0|, \tag{35}$$

в силу леммы 2 и (34) получается

$$\left(\frac{1-\tilde{\tilde{\delta}}}{1+\tilde{\tilde{\delta}}}\right)^2 < (\tilde{\tilde{t}} - \tilde{\tilde{t}}_0)^2\left\{1+O\left(\frac{1}{\tilde{\tilde{t}}_0}\right)\right\}\sum_\gamma \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\gamma)^2}. \tag{36}$$

Из этого, полагая

$$\tilde{\tilde{\alpha}}^2 = \{\alpha(\tilde{\tilde{t}}_0)\}^2 = \left\{1+O\left(\frac{1}{\tilde{\tilde{t}}_0}\right)\right\} m^2(\tilde{\tilde{t}}_0)\sum_\gamma \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\gamma)^2}, \tag{37}$$

в силу (11), (35) (так как $\dfrac{1-\tilde{\tilde{\delta}}}{1+\tilde{\tilde{\delta}}} > 0$) получается

$$\frac{1-\tilde{\tilde{\delta}}}{1+\tilde{\tilde{\delta}}} < \tilde{\tilde{\alpha}}\,\tilde{\tilde{\delta}}. \tag{38}$$

Значит, число $\tilde{\tilde{\delta}}$ удовлетворяет неравенству (20). Из этого, в силу леммы 4, получается, что

$$\tilde{\tilde{\delta}} > \frac{3}{4}\frac{1}{1+\tilde{\tilde{\alpha}}}, \tag{39}$$

т.е., в силу (11),

$$|\tilde{\tilde{t}} - \tilde{\tilde{t}}_0| > \frac{3}{4}\frac{m(\tilde{\tilde{t}}_0)}{1+\alpha(\tilde{\tilde{t}}_0)}.$$

На этом доказательство закончено.

5. В этой части приведем вспомогательные утверждения, нужные для доказательства теоремы 2. Уравнения А. А. Фридмана, см. например, [3], имеют следующий вид:

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t) = \frac{kc^2}{R^2} + \left\{\frac{R'}{R}\right\}^2, \tag{40}$$

$$\varkappa p(t) = -\frac{R''}{R} - \left\{\frac{R'}{R}\right\}^2 - \frac{kc^2}{R^2}. \tag{41}$$

Следствием уравнений (40), (41) является соотношение

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t) + \varkappa p(t) = -2\frac{R''}{R}. \tag{42}$$

Полагая

$$R(t) = Z(t), \tag{43}$$

получается

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t) + \varkappa p(t) = \varphi(t) = -2\frac{Z''(t)}{Z(t)}. \tag{44}$$

Напомним, что нужная вспомогательная функция $\varphi(t)$ вводится на основе уравнений А. А. Фридмана, т.е., в конечном счете на основе теории тяготения Эйнштейна.

Дальше, в силу основной формулы, см. (10),

$$-\frac{Z''(t)}{Z(t)} + \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = \sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \neq \gamma, \tag{45}$$

из (44) получается

$$\varphi(t) = 2\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} - 2\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{46}$$

Так как

$$\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} = \frac{n(\bar{\gamma})}{(t-\bar{\gamma})^2} + \sum_{\gamma\neq\bar{\gamma}} \frac{1}{(t-\gamma)^2}, \tag{47}$$

то имеет место

Лемма 5.

$$\lim_{t\to\bar\gamma}(t-\bar\gamma)^2\sum_\gamma\frac{1}{(t-\gamma)^2}=n(\bar\gamma).$$

Как известно, нуль $\bar\gamma$ кратности $n(\bar\gamma)$ функции $Z(t)$ является простым полюсом ее логарифмической производной, с вычетом $n(\bar\gamma)$, т.е.

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)}=\frac{n(\bar\gamma)}{t-\bar\gamma}+\psi(t), \tag{48}$$

где $\psi(t)$ аналитическая функция в некоторой окрестности $\bar\gamma$. Значит, имеет место

Лемма 6.

$$\lim_{t\to\bar\gamma}(t-\bar\gamma)^2\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2=n^2(\bar\gamma).$$

Теперь, из соотношения (46), в силу леммы 5 и леммы 6 получается

Лемма 7.

$$\lim_{t\to\bar\gamma}(t-\bar\gamma)^2\varphi(t)=2n(\bar\gamma)[1-n(\bar\gamma)].$$

6. Доказательство теоремы 2. Итак, пусть, например промежуток $(\bar t_0', \bar\gamma)$ несодержит точку перегиба функции $Z(t)$ и $n(\bar\gamma)>1$.

Так как, в силу (17)

$$\sum_\gamma\frac{1}{(\bar t_0'-\gamma)^2}>A(\ln\ln\bar t_0')^2, \tag{49}$$

и, по определению последовательности $\{t_0\}$

$$Z'(\bar t_0')=0, \tag{50}$$

то, из соотношения (46), в силу (49), (50) получается

$$\varphi(\bar t_0')>0, \tag{51}$$

т.е.

$$\varphi(t)>0, \tag{52}$$

для t принадлежащих некоторой правой окрестности $\bar t_0'$.

Однако, так как, по предположению, $n(\bar\gamma)>1$, то, в силу леммы 7, существует $\varepsilon(\bar\gamma)>0$, такого рода, что

$$\varphi(t)<0, \quad t\in(\bar\gamma-\varepsilon, \bar\gamma). \tag{53}$$

Значит, по непрерывности функции $\varphi(t)$ на промежутке $(\bar t_0', \bar\gamma)$, существует $t^*\in(\bar t_0', \bar\gamma)$ такого рода, что

$$\varphi(t^*)=0, \tag{54}$$

и $\varphi(t)$ изменяет знак в точке t^*. Следовательно, в силу (44), (54),

$$Z''(t^*)=0, \tag{55}$$

и $Z''(t)$ изменяет знак в точке t^*, т.е. t^* точка перегиба функции $Z(t)$, что противоречит предположению.

ДОБАВЛЕНИЕ

О нулях некоторых функций связанных с дзета-функцией Римана

7. Полагая в уравнениях А. А. Фридмана, см. (40), (41), $R(t)=Z(t)$, и, используя соотношение (45), получается

$$\varrho(t;\ k)=\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t)=\frac{kc^2}{Z^2(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2, \tag{56}$$

$$p(t;\ k)=\varkappa p(t)=2\sum_\gamma\frac{1}{(t-\gamma)^2}-3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2-\frac{kc^2}{Z^2(t)}+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{57}$$

где $k=-1, 0, 1$; $t\neq\gamma$.

В этом добавлении сосредоточим внимание на нулях функций $p(t;1)$, $p(t;0)$.

Пусть, как обычно, $\gamma'<t_0<\gamma''$, чде γ', γ'' — ординаты соседних нулей функции $\zeta(s)$, и t_0 — член последовательности $\{t_0\}$, см. [2]. Имеют место

Теорема 3. *Если справедлива гипотеза Римана, то существует бесконечное множество нулей функции $p(t;1)$.*

Теорема 4. *Если справедлива гипотеза Римана, то каждый из промежутков (γ', t_0), (t_0, γ''), начиная с некоторого γ', содержит нуль функции $p(t;0)$.*

Обозначим

$$\beta(t_0)\sim\sqrt{\frac{3}{2}m(t_0)}\left\{\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{1/2}, \tag{58}$$

$$\mu(t_0)=\min\{\bar t''-t_0, t_0-\bar t'\}, \tag{59}$$

где $\gamma'<\bar t'<t_0$, $t_0<\bar t''<\gamma''$, и $\bar t'$, $\bar t''$ — нули функции $p(t;0)$, существующие на основе теоремы 4.

Имеет место

Теорема 5. *Если справедлива гипотеза Римана, то*

$$\mu(t_0) > \frac{3}{4}\,\frac{m(t_0)}{1+\beta(t_0)}, \tag{60}$$

начиная с некоторого t_0.

8. Доказательство теоремы 3. Прежде всего, в силу леммы 5 и леммы 6

$$\lim_{t\to\gamma}(t-\gamma)^2\left(2\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}-3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2\right) = 2n(\gamma)-3n^2(\gamma) < 0. \tag{61}$$

Значит, с одной стороны, функция

$$p(t;1) = 2\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}-3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2-\frac{c^2}{Z^2(t)}+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{62}$$

отрицательна, для t принадлежащих некоторой окрестности γ (за исключением γ).

С другой стороны, в заметке [3], (22), (23), была построена последовательность $\{\delta(\tilde{t}_0)\}$, $\delta(\tilde{t}_0) > 0$, такого рода, что

$$\tilde{\gamma}' < \tilde{t}_0-\delta(\tilde{t}_0) < \tilde{t}_0+\delta(\tilde{t}_0) < \tilde{\gamma}'', \tag{63}$$

$$p(t;1) > 0, \quad t\in\langle\tilde{t}_0-\delta(\tilde{t}_0),\, \tilde{t}_0+\delta(\tilde{t}_0)\rangle. \tag{64}$$

Следовательно, по непрерывности функции $p(t;1)$, при $t\in(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'')$, получается утверждение теоремы 3.

9. Доказательство теоремы 4. Так как

$$p(t;0) = 2\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}-3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{65}$$

то, в силу (61),

$$\lim_{t\to\gamma}(t-\gamma)^2 p(t;0) = 2n(\gamma)-3n^2(\gamma) < 0, \tag{66}$$

значит, $p(t;0)$ отрицательна в некоторой окрестности γ (за исключением γ).

С другой стороны, так как $Z'(t_0) = 0$, из соотношения (65) получается

$$p(t_0;0) = 2\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t_0}\right). \tag{67}$$

Так что, в силу (17) получается $p(t_0;0) > 0$, и, следовательно,

$$p(t;0) > 0, \tag{68}$$

в некоторой окрестности точки t_0 (по непрерывности функции $p(t;0)$ при $t\in(\gamma', \gamma'')$).

Теперь обстановка такова, $\gamma' < t_0 < \gamma''$, и, функция $p(t;0)$:
отрицательна в правой окрестности γ',
положительна в левой окрестности t_0,
положительна в правой окрестности t_0,
отрицательна в левой окрестности γ''.

Из этого следует утверждение теоремы 4.

10. Доказательство теоремы 5. Для доказательства этой теоремы применяется метод использованный нами для доказательства теоремы 1. В упоминавшемся доказательстве, основным было соотношение (33).

Если теперь $\bar{t}$ обозначает нуль функции $p(t;0)$, то, в силу (65), основным будет соотношение

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{Z'(\bar{t})}{Z(\bar{t})}\right\}^2 = \sum_{\gamma}\frac{1}{(\bar{t}-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{\bar{t}}\right). \tag{69}$$

Литература

[1] J. E. Littlewood, *Two notes on the Riemann zeta-function*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 22 (1924), стр. 234–242.

[2] Ян Мозер, *Об одном новом следствии из гипотезы Римана*, Acta Arith. 25 (1974), стр. 307–311.

[3] — *Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой*, Acta Arith. 26 (1974), стр. 33–39.

[4] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Поступило 10. 2. 1974 (526)