for some integer b_1'', where

$$b_j'' = p^l b_j - b' s_{lj} \quad (1 < j \leqslant m), \qquad b_{m+1}'' = p^l b_{m+1}' + b'.$$

Now the b_j'' $(j > 1)$ are integers with absolute values at most $2pH^2$; thus all b_j'' have absolute values at most $2npH^2$ and, by (7), this is less than B if C is sufficiently large. Further, from (9), we can plainly express $b_{m+1}'' \Lambda$ as a linear form in the $\log a_j$ with $j \neq m+1$ and with integer coefficients having absolute values at most $2B^2$. Hence, if $b_{m+1}'' \neq 0$, the theorem follows by induction on n. If $b_{m+1}'' = 0$ then, since $p^l > H$, we have $b' = 0$ and so $b_j'' \neq 0$ for some $j \leqslant m$; in this case the elimination of $\log a_j$ furnishes the desired conclusion.

It remains to consider the possibility that the sequence terminates for some l with $p^l \leqslant H$. From (8) we see that Λ can be expressed as a linear form in the $\log a_j$ with a_{m+1} replaced by γ_l and with integer coefficients having absolute values at most $2nHB$; further, from (7), this is less than B^2 if C is sufficiently large. Furthermore, since by supposition the sequence terminates, we deduce from Lemma 3 of [3] that $\gamma_l^{1/p}$ generates an extension of $K(a_1^{1/p}, \ldots, a_m^{1/p})$ of degree p. Recalling that γ_l has height A'', say, where $\log A''/\log A'$ is bounded in terms of n and d only, it follows that the hypotheses of § 2 hold with γ_l substituted for a_{m+1} and with a reduced value of C. After at most n such substitutions this contradicts the result of § 2 (since the choice of p there depends only on n and d) and the contradiction proves the theorem.

References

[1] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers IV*, Mathematika 15 (1968), pp. 204–216.

[2] — *Contributions to the theory of Diophantine equations II; The Diophantine equation $y^2 = x^3 + k$*, Phil. Trans. Royal Soc. London A263 (1968), pp. 193–208.

[3] — *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms*, Acta Arith. 21 (1972), pp. 117–129.

[4] — *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II*, Acta Arith. 24 (1973), pp. 33–36.

[5] — *A central theorem in transcendence theory*, in *Diophantine approximation and its applications* (Academic Press, 1973), pp. 1–23.

[6] T. N. Shorey, *On gaps between numbers with a large prime factor II*, Acta Arith. 25 (1974), pp. 365–373.

[7] H. M. Stark, *Further advances in the theory of linear forms in logarithms*, in *Diophantine approximation and its applications*, Academic Press, 1973, pp. 255–293.

[8] — *Effective estimates of solutions of some diophantine equations*, Acta Arith. 24 (1973), pp. 251–259.

Received on 25. 8. 1973 (442)

ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

Применения дисперсионного метода в проблеме Гольдбаха

Б. М. Бредихин, Н. А. Яковлева (Куйбышев)

1. Многие аддитивные задачи с простыми числами решаются с помощью метода оценки тригонометрических сумм, открытого И. М. Виноградовым [5], в соединении с теоремами, касающимися распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с медленно растущей разностью. При сведении тригонометрических сумм по простым числам к двойным суммам фундаментальной является идея И. М. Виноградова по „сглаживанию” таких сумм.

В основе дисперсионного метода, разработанного Ю. В. Линником [8], также лежит идея „сглаживания” наряду с рассуждениями, имеющими свои истоки в классической работе П. Л. Чебышева *О средних величинах* (см. [12]).

Эта же идея используется в методе большого решета, созданного Ю. В. Линником [9] и позволившего получить ряд теорем, относящихся к распределению простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем.

В самое последнее время Ю. В. Линник (совместно с одним из авторов данной статьи) рассмотрел применения дисперсионного метода и теорем о простых числах к некоторым тернарным аддитивным задачам (см. [2]–[4]).

В работе [4] дано новое доказательство теоремы Виноградова о представлении нечетных чисел суммами трех простых чисел (ради простоты берутся нечетные числа, не содержащие малых простых делителей).

Аналогично может быть изучено уравнение

$$p + p_1 - p_2 = p_3, \tag{1}$$

где p, p_1, p_2, p_3 пробегают простые числа, $p + p_1 \leqslant n$. Пусть $Q(n)$ — число решений уравнения (1). Почти буквальным повторением рассуждений работы [4] (с предварительным фиксированием p_3) может быть доказана следующая теорема:

Теорема A. *При* $n\to\infty$

$$Q(n)=\frac{1}{3}\prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^3}{\ln^4 n}+O\left(\frac{n^3}{(\ln n)^{5-\varepsilon}}\right).$$

В этой заметке мы покажем, как с помощью теоремы A может быть уже легко выведена теорема Чудакова–Ван Корпута–Эстермана (см. [11]), о том, что „почти все" четные числа представимы суммами двух простых чисел. Точный смысл этого утверждения заключается в следующем.

Пусть $S(n)$ — число четных чисел $m'\leqslant n$, которые не представимы суммами двух простых чисел.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n}=0.$$

Фактически доказывается более сильный результат:

$$S(n)=O\left(\frac{n}{(\ln n)^A}\right),$$

где A — любая положительная константа.

Чтобы упростить рассуждения, мы возьмем $A=0{,}2$. Итак, нашей целью является рассмотрение нового метода доказательства следующей теоремы:

Теорема B. *При* $n\to\infty$

$$S(n)=O\left(\frac{n}{(\ln n)^{0,2}}\right).$$

2. В дальнейшем нам придется использовать некоторые свойства простых чисел, выражаемые следующими леммами.

Лемма 1 (см. [6]). *Пусть* $F(x,z)$ — *количество натуральных чисел* $\leqslant x$ *и имеющих только простые делители* $\leqslant z$. *Пусть, далее,* $\ln x\leqslant z\leqslant x^{0,01}$, $\alpha=\ln z/\ln x$.

Тогда

$$F(x,z)=O\left(x\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

Лемма 1 является следствием теоремы А. И. Виноградова [6] о числах с малыми простыми делителями. Эта лемма может быть доказана вполне элементарно.

Лемма 2 (см. [8]). *Пусть* $\pi'(n)$ — *количество квази-простых чисел* $\leqslant n$, *таких, которые не содержат в каноническом разложении простых чисел* $p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$.

Тогда

$$\pi'(n)=n\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\left(\frac{n}{(\ln n)^C}\right),$$

где $C>0$ — *большая константа.*

Лемма 2 является уточнением леммы 1.5.1 из монографии [8]. Эта оценка доказывается элементарно. В самом деле, с помощью элементарного решета и леммы 1 находим, что

$$\pi'(n)=\sum_{dl\leqslant n}\mu(d)+O\left(\frac{n}{(\ln n)^C}\right),$$

где $d\leqslant n^{1/\ln\ln n}$ пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$.

Отсюда

$$\pi'(n)=n\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{\mu(d)}{d}+O\left(\frac{n}{(\ln n)^C}\right).$$

Применяя опять лемму 1, получим

$$\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{\mu(d)}{d}=\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\left(\frac{n}{(\ln n)^C}\right).$$

Теперь лемма 2 следует из двух последних равенств.

Обозначим через $\pi(x,q,l)$ — количество простых чисел $p\equiv l(\operatorname{mod} q)$ и не превосходящих x.

Лемма 3 (см. [7]). *Пусть* $C>0$ — *любая константа. Тогда существует положительная константа* $B=B(C)$ *такая, что*

$$\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q-1}\left(\pi(x,q,l)-\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\right)^2=O\left(\frac{x^2}{(\ln x)^C}\right),$$

где $X\leqslant x/(\ln x)^B$.

Лемма 3, составляющая содержание теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем (см. [7], [1] и [10]), повидимому может быть выведена элементарными средствами. Разумеется при этом должна быть использована теорема Зигеля–Вальфиша:

Лемма 4 (см. [7]). *Пусть* $C>0$ — *любая константа,* $q\leqslant(\ln x)^C$, $(l,q)=1$. *Тогда*

$$\pi(x,q,l)=\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\left(1+O\left(\frac{1}{(\ln x)^C}\right)\right).$$

Теорема Зигеля–Вальфиша не может быть получена известными в настоящее время элементарными средствами.

3. Докажем теорему В. Мы выведем ее из теоремы А. Пусть n — достаточно большое число. Обозначим через M' множество четных чисел, неразложимых в сумму двух простых чисел. Путь далее

$$S(n) = \sum_{\substack{m'\leqslant n \\ m'\in M'}} 1.$$

Допустим, что

$$S(n) \geqslant \frac{n}{(\ln n)^{0,2}}. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$p+p_1-m' = 0, \tag{3}$$

где p и p_1 пробегают простые числа, $m'\in M'$, $m'\leqslant n$.

Обозначим через $A(n)$ количество решений уравнения (3). Согласно определению чисел m' имеем $A(n) = 0$. С другой стороны, мы можем рассчитать асимптотику для числа решений уравнения (3), исходя только из плотности чисел m'. Для этой цели мы заменим уравнение (3) новым уравнением

$$p+\nu-m' = 0, \tag{4}$$

где p пробегает простые числа, ν пробегает квизи-простые числа, определенные в лемме 2, $m\in M'$, $m\leqslant n$.

Обозначим через $B(n)$ количество рашений уравнения (4). Положим

$$K(n) = \frac{A(n)}{B(n)}.$$

При переходе от уравнения (3) к уравнению (4) мы расширяем область значений переменной p_1, пробегающей простые значения, до области значений переменной ν, пробегающей квизи-простые значения. Поэтому можем ожидать, что число решений уравнения (3) будет во столько раз меньше числа решений уравнения (4), во сколько раз количество $\pi(n)$ простых чисел на сегменте $[1, n]$ будет меньше количества $\pi'(n)$ квизи-простых чисел на этом же сегменте. Исходя из таких эвристических соображений, можем предполагать, что

$$K(n) \sim \frac{\pi(n)}{\pi'(n)}.$$

Принимая во внимание, что по теореме о простых числах $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln n}$, а по лемме 2

$$\pi'(n) \sim n \prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}} \left(1-\frac{1}{p}\right),$$

находим, что

$$A(n) \sim K_0(n)B(n),$$

где

$$K_0(n) = \prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}} \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\frac{1}{\ln n}. \tag{5}$$

Оставляя с этого момента область гипотетических рассуждений, покажем, что $A(n)$, в самом деле, совпадает с допустимой погрешностью с величиной

$$K_0(n)B(n).$$

Оценим разность

$$V(n) = A(n)-K_0(n)B(n) = \tag{6}$$

$$= \sum_{\substack{m'\leqslant n \\ m'\in M'}} \Big(\sum_{p+p_1=m'} 1 - K_0(n) \sum_{p+\nu=m'} 1 \Big).$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, находим, что

$$V^2(n) \leqslant \sum_{\substack{m'\leqslant n \\ m'\in M'}} 1\cdot V', \tag{7}$$

где

$$V' = \sum_{\substack{m'\leqslant n \\ m'\in M'}} \Big(\sum_{p+p_1=m'} 1 - K_0(n) \sum_{p+\nu=m'} 1 \Big)^2.$$

Сумму V' будем называть дисперсией числа решений уравнения (3).

Выполним „сглаживание" суммы V', распространив суммирование в этой сумме на все четные числа $m\leqslant n$. Величина дисперсии от этого может только увеличиться.

Получим

$$V' \leqslant V'' = \sum_{m\leqslant n} \Big(\sum_{p+p_1=m} 1 - K_0(n) \sum_{p+\nu=m} 1 \Big)^2. \tag{8}$$

Имеем

$$V'' = V_1 - 2V_2 + V_3, \tag{9}$$

где

$$V_1=\sum_{m\leqslant n}\Big(\sum_{p+p_1=m}1\Big)^2=\sum_{\substack{p+p_1-p_2=p_3\\ p+p_1\leqslant n}}1,$$

$$V_2=K_0(n)\sum_{\substack{p+p_1-p_2=\nu\\ p+p_1\leqslant n}}1,\qquad V_3=K_0^2(n)\sum_{\substack{p+\nu_1-p_2=\nu\\ p+\nu_1\leqslant n}}1.$$

Найдем асимптотические значения сумм V_1, V_2 и V_3. Уравнение в сумме V_1 совпадает с уравнением (1). Поэтому по теореме А

$$V_1=\frac{1}{3}\prod_p\Big(1-\frac{1}{(p-1)^3}\Big)\frac{n^3}{\ln^4 n}+O\Big(\frac{n^3}{\ln^{5-\varepsilon}n}\Big). \tag{10}$$

Вычислим сумму V_2. Применяя элементарное решето и лемму 1, найдем, что

$$V_2=K_0(n)\,V_2'+O\Big(\frac{n^3}{(\ln n)^C}\Big), \tag{11}$$

где

$$V_2'=\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{p+p_1-p_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}1,$$

причем d пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$, $p_2<p+p_1\leqslant n$.

Положим

$$V_2'=S_1-S_2, \tag{12}$$

где S_1 соответствует значениям $p+p_1\leqslant n$, а S_2 соответствует значениям $p+p_1\leqslant p_2$. Обе суммы рассчитываются вполне аналогично. Поэтому мы ограничимся рассмотрением суммы S_1. Эту сумму представим в следующем виде:

$$S_1=T_1-T_2,$$

где

$$T_1=\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{\substack{l=1\\ (l,d)=1}}^{d-1}\sum_{\substack{p+p_1\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)\\ p+p_1\leqslant n}}1\,\Big\{\sum_{\substack{p_2\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)\\ p_2\leqslant n}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\int_2^n\frac{dt}{\ln t}\Big\},$$

$$T_2=\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{\substack{l=1\\ (l,d)=1}}^{d-1}\sum_{\substack{p+p_1\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)\\ p+p_1\leqslant n}}\frac{1}{\varphi(d)}\int_2^n\frac{dt}{\ln t}.$$

Оцениваем сумму T_1. Прежде всего

$$|T_1|\leqslant n^2\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\ (l,d)=1}}^{d-1}\Big|\sum_{\substack{p_2\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)\\ p_2\leqslant n}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\int_2^n\frac{dt}{\ln t}\Big|.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и лемму 3, выводим оценку

$$T_1=O\Big(\frac{n^3}{(\ln n)^{C/2}}\Big).$$

Заметим, что здесь мы тоже используем идею „сглаживания", распространяя суммирование по d на все натуральные числа $\leqslant n^{1/\ln\ln n}$.

При этом, выбирая в лемме 3 $X=n^{1/\ln\ln n}$, мы используем эту лемму в весьма слабой форме.

Для суммы T_2 мы найдем асимптотику. Нетрудно видеть, что

$$T_2=\int_2^n\frac{dt}{\ln t}\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p+p_1\leqslant n\\ (p+p_1,d)=1}}1,$$

где d, как и ранее, пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$.

Освобождаясь от условия взаимной простоты чисел $p+p_1$ и d, получим

$$T_2=\int_2^n\frac{dt}{\ln t}\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\sum_{\delta|d}\mu(\delta)\sum_{p_1\leqslant n}\sum_{\substack{p\equiv -p_1\,(\mathrm{mod}\,\delta)\\ p\leqslant n-p_1}}1.$$

Модули $\delta>(\ln n)^C$ вносят в полученную сумму погрешность порядка

$$n^3\sum_{\delta>(\ln n)^C}\frac{1}{\delta^2}=O\Big(\frac{n^3}{(\ln n)^{C/2}}\Big).$$

Часть суммы T_2, соответствующая модулям $\delta\leqslant(\ln n)^C$, вычисляется с помощью теоремы Зигеля–Вальфиша (см. лемму 4) и теоремы о простых числах.

После применения этих теорем ограничение, наложенное на δ, можно снять с допустимой погрешностью.

В результате находим, что

$$T_2=\frac{1}{2}\Big(\int_2^n\frac{dt}{\ln t}\Big)^3\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\sum_{\delta|d}\mu(\delta)+O\Big(\frac{n^3}{(\ln n)^{C/2}}\Big).$$

Поскольку числа d не содержат больших простых множителей, мы можем, как показывает лемма 1, отбросить условие $d\leqslant n^{1/\ln\ln n}$. Величина погрешности при этом не изменится.

Собирая предыдущие оценки, выводим формулу:

$$(13)\qquad S_1 = \frac{1}{2}\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n^3}{\ln^3 n}+O\left(\frac{n^3}{\ln^{5-\varepsilon} n}\right).$$

Аналогично получим асимптотику для S_2:

$$(14)\qquad S_2 = \frac{1}{6}\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n^3}{\ln^3 n}+O\left(\frac{n^3}{\ln^{5-\varepsilon} n}\right).$$

Из формул (5), (11), (12), (13) и (14) выводим асимптотику для V_2:

$$(15)\qquad V_2 = \frac{1}{3}\prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^3}{\ln^4 n}+O\left(\frac{n^3}{\ln^{5-\varepsilon} n}\right).$$

Сумма V_3 вычисляется вполне аналогично.

В результате находим, что

$$(16)\qquad V_3 = \frac{1}{3}\prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^3}{\ln^4 n}+O\left(\frac{n^3}{\ln^{5-\varepsilon} n}\right).$$

Таким образом, асимптотический расчет V_1, V_2 и V_3 показывает, что эти суммы совпадают с допустимой погрешностью. Поэтому дисперсия V', а, следовательно, и разность $V(n)$, оцениваются достаточно хорошо.

Точнее говоря, из формул (7), (8), (9), (10), (15), и (16) следует, что

$$V(n) = O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{2,5-\varepsilon}}\right).$$

Отсюда и из равенства (6) получим:

$$(17)\qquad A(n) = K_0(n)B(n)+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{2,5-\varepsilon}}\right).$$

Вычислим сумму

$$B(n) = \sum_{p+\nu-m'=0} 1,$$

где переменные p, ν и m' пробегают области значений, определенные в (4).

Применяя элементарное решето и лемму 1, найдем, что

$$B(n) = \sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{\substack{m'\leqslant n\\ m'\in M'}}\ \sum_{\substack{p\equiv m' (\mathrm{mod}\, d)\\ p\leqslant m'}} 1+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^C}\right),$$

где d пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$.

Сумму $B(n)$ представим в следующем виде:

$$B(n) = B_1(n)+B_2(n)+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^C}\right),$$

где

$$B_1(n) = \sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{\substack{l=1\\ (l,d)=1}}^{d-1}\ \sum_{\substack{m'\equiv l (\mathrm{mod}\, d)\\ m'\leqslant n,\, m'\in M'}} 1\left\{\sum_{\substack{p\equiv l (\mathrm{mod}\ d)\\ p\leqslant m'}} 1-\frac{1}{\varphi(d)}\int_2^{m'}\frac{dt}{\ln t}\right\},$$

$$B_2(n) = \sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{m'\leqslant n,\, m'\in M'\\ (m',d)=1}}\int_2^{m'}\frac{dt}{\ln t}.$$

Чтобы оценить сумму $B_1(n)$ с помощью леммы 3, нужно освободиться от зависимости между переменными m' и p. С допустимой погрешностью можем считать, что m' изменяется на интервале $\left(\frac{n}{(\ln n)^C}, n\right]$. Этот интервал разобьем справа налево на частичные интервалы $(m_0) = (m_0-m_0', m_0]$, где $m_0' = \frac{m_0}{(\ln n)^{C_1}}$, $C_1>0$ — большая константа, зависящая от C. Количество таких интервалов будет $O\big((\ln n)^{C_1+1}\big)$. Последний интервал может быть неполным, что даст допустимую погрешность. Рассматривая m' на фиксированном частичном интервале (m_0), мы можем взять в качестве верхней границы области изменения переменной p (а так же и t) число m_0 вместо m'.

Такая вариация границ, внося в $B_1(n)$ допустимую погрешность, устраняет зависимость между переменными m' и p. В результате мы сможем оценить часть суммы $B_1(n)$, соответствующую взятому частичному интервалу (m_0), вполне аналогично тому, как была выполнена оценка суммы T_1.

После суммирования по частичным интервалам получим общую оценку:

$$B_1(n) = O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{C/2}}\right).$$

Оценим сумму $B_2(n)$.

$$B_2(n) = \sum_{\substack{m'\leqslant n\\ m'\in M'}}\int_2^{m'}\frac{dt}{\ln t}\sum_{\substack{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}\\ (d,m')=1}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}.$$

Применяя лемму 1, примем во внимание, что

$$\prod_{\substack{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}\\ p\nmid m'}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\geqslant \prod_{\substack{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}\\ p>2}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right).$$

Находим, что

$$B_2(n)\geqslant \prod_{\substack{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}\\ p>2}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\sum_{\substack{m'\leqslant n\\ m'\in M'}}\int_2^{m'}\frac{dt}{\ln t}+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^C}\right).$$

Отсюда следует, что

$$B_2(n)\geqslant \frac{1}{\ln n}\prod_{\substack{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}\\ p>2}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\sum_{\substack{m'\leqslant n\\ m'\in M'}}m'+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^C}\right).$$

На основании (2)

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}\frac{n}{(\ln n)^{0,2}}<m'\leqslant n\\ m'\in M'}}1=\sum_{\substack{m'\leqslant n\\ m'\in M'}}1-\sum_{\substack{m'\leqslant\frac{1}{2}\frac{n}{(\ln n)^{0,2}}\\ m'\in M'}}1\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{n}{(\ln n)^{0,2}}.$$

Следовательно,

$$B_2(n)\geqslant\frac{1}{4}\,\frac{n^2}{(\ln n)^{1,4}}\prod_{\substack{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}\\ p>2}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^C}\right).$$

Собирая полученные оценки, с помощью равенства (5) находим, что

$$K_0(n)B(n)\geqslant\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}\\ p>2}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n^2}{(\ln n)^{2,4}}+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{C/2}}\right).\tag{18}$$

Теперь из (17) и (18) заключаем, что $A(n)>0$ при достаточно большом n.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы B.

Отметим, что, уточнив теорему A, мы можем получить в теореме B обычную оценку:

$$S(n)=O\left(\frac{n}{(\ln n)^A}\right),$$

где A — любая положительная константа. Рассмотренный в статье метод применим и к некоторым другим задачам о представлении почти всех целых чисел $m\leqslant n$ в виде $m=\alpha+\beta$, где α и β пробегают заданные последовательности натуральных чисел нулевой плотности.

При этом должны быть наложены определенные ограничения на эти плотности и на распределенность последовательностей в арифметических прогрессиях.

Цитированная литература

[1] М. Б. Барбан, *Метод „Большого решета" и его применения в теории чисел*, Успехи матем. наук 21 (1) (1966), стр. 51–102.

[2] B. M. Bredihin and Yu. V. Linnik, *Remarks on some new applications of the dispersion method*, Acta Arith. 21 (1972), стр. 409–410.

[3] Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник, *Применение теорем о простых числах в диофантовых задачах особого типа*, Матем. зам. 12 (3) (1972), стр. 243–250.

[4] — — *Новый метод в аналитической теории чисел*, в сб. *Актуальные проблемы аналитической теории чисел*, Минск 1974, стр. 5–22.

[5] И. М. Виноградов, *Избранные труды*, Москва 1952.

[6] А. И. Виноградов, *О числах с малыми простыми делителями*, Докл. АН СССР 109 (4) (1956), стр. 683–686.

[7] Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел*, Москва 1971.

[8] Ю. В. Линник, *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах*, Ленинград 1961.

[9] — *„Большое решето"*, Докл. АН СССР 30 (4) (1941), стр. 290–292.

[10] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Berlin–Heidelberg–New York 1971.

[11] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Москва 1964.

[12] П. Л. Чебышев, *Полное собрание сочинений*, том II, Москва–Ленинград 1947.

Поступило 27. 8. 1973 (443)