ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

К проблемам теории дружественных чисел

М. М. Артюхов (Орджоникидзе)

Светлой памяти Ю. В. Линника

1. Натуральные числа $M \neq N$ называются *дружественными* (или составляющими дружественную пару), если каждое из них равно сумме собственных делителей другого, то-есть, если суммы всех их делителей удовлетворяют условию $\sigma(M) = \sigma(N) = M+N$.

Первая пара дружественных чисел, 220–284, была известна еще 25 веков тому назад, а к настоящему времени найдено более 1000 дружественных пар, причем, большинство из них — за последнее десятилетие (с помощью ЭВМ). Вместе с тем, до сих пор остаются нерешенными такие проблемы, как проблема бесконечности множества дружественных пар, проблема существования хотя бы одной пары взаимно простых дружественных чисел, и другие (интересующихся более полными сведениями как об истории, так и о современном состоянии теории дружественных чисел, можно сейчас отослать к недавно опубликованной работе [7], [8]).

Вышеупомянутые проблемы по духу близки соответствующим проблемам теории совершенных и кратно совершенных чисел, и здесь как раз будет доказана одна новая теорема о парах дружественных чисел (в частности, — взаимно простых) такого же типа и базирующаяся на таких же соображениях, как и теоремы о нечетных совершенных и кратно совершенных числах, установленные L. E. Dickson'ом [2] и И. С. Градштейном [3] для совершенных чисел, H.-J. Kanold'ом [4], [5] и М. М. Артюховым [1] для кратно совершенных чисел.

2. Под всеми буквами, употребляющимися далее для обозначения чисел, будут подразумеваться только натуральные числа (исключение составят лишь r и s, для которых будут допускаться еще и значения, равные нулю), причем под буквами p, m, n, π, μ, ν будут пониматься только простые числа. Символом (a, b) будет обозначаться общий наибольший делитель чисел a, b, символом $\sigma(a)$ — сумма всех натуральных делителей a. Количество всех различных простых делителей того или иного натурального числа будет называться рангом этого числа, а суммарным рангом пары чисел — ранг их произведения.

3. Пусть t — какое-нибудь заданное число и введем в рассмотрение бесконечную последовательность $T=\{P_1<P_2<\ldots<P_j<\ldots\}$ всех чисел P_j ранга, равного t. Порядок следования простых в каноническом разложении каждого $P_j=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\ldots p_t^{c_t}$ будем считать для него избранным каким-нибудь единственным из $t!$ возможных способов (не обязательно —по условию $p_1<\ldots<p_t$). Для введенной последовательности будем употреблять еще и третий символ, $\{P_j=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\ldots p_t^{c_t}\}=T$, и в этом обозначении как под p_i, так и под c_i $(i=1,2,\ldots,t)$ будем понимать переменные величины, а их конкретные фиксированные значения будем обозначать в последующем соответственно буквами π_i и γ_i. Каждая из переменных p_i, c_i $(i=1,2,\ldots,t)$ может рассматриваться как числовая функция от аргумента j (номер числа P в последовательности T), пробегающего по последовательным числам натурального ряда, и принятое нами условие единственности записи канонического разложения каждого P_j гарантирует однозначность всех этих функций. Областью изменения переменных c_i является множество всех натуральных чисел, а переменные p_i изменяются по множеству всех простых чисел, причем так, что каждый фиксированный набор их числовых значений, $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_t$, состоит из t отличных друг от друга простых чисел.

4. В § 3 описано, как ведут себя p_i и c_i $(i=1,2,\ldots,t)$ у чисел P_j самой последовательности T, здесь же выясним, как они могут себя вести у любой ее бесконечной подпоследовательности $\Phi=\{P_{q_1}<P_{q_2}<\ldots<P_{q_j}<\ldots\}$. Для этого нам достаточно будет установить, какие возможности имеются для той или иной пары переменных p_i, c_i, например, для p_1, c_1. Какова бы не была рассматриваемая бесконечная последовательность Φ, ясно, что для p_1 имеет место одно и только одно из двух положений: либо среди значений p_1 из канонических разложений P_{q_j} $(j=1,2,3,\ldots)$, наибольшего нет, либо таковое имеется. Первое из этих положений мы назовем Возможностью № 1, что же касается второго, то при нем из того, что последовательность Φ бесконечна, вытекает, что найдется хотя бы одно фиксированное значение π_1 переменной p_1, которое будет фигурировать в канонических разложениях всех чисел некоторой бесконечной подпоследовательности последовательности Φ, и при этом может иметь место одна и только одна из следующих двух ситуаций: либо среди значений показателя степени c_1 у степени $\pi_1^{c_1}$ в канонических разложениях этих чисел наибольшего нет, либо — таковое имеется. Первую из этих ситуаций назовем Возможностью № 2, вторую — Возможностью № 3.

5. Какова бы не была введеная в § 4 бесконечная подпоследовательность Φ последовательности T, из нее в соответствии с перечисленными в § 4 Возможностями всегда можно будет выделить хотя бы одну (опять-таки — бесконечную) подпоследовательность $X=\{P_{u_1}<P_{u_2}<\ldots<P_{u_j}<\ldots\}$ одного из следующих трех типов:

1-ый тип. При осуществлении Возможности № 1 числовое значение переменной p_1 в каноническом разложении каждого P_{u_j} из X будет меньше, чем в каноническом разложении $P_{u_{j+1}}$ (каковы будут при этом значения c_1 — для дальнейшего не существенно), и это означает, что при $j\to\infty$ будет и $p_1\to\infty$.

2-ой тип. При осуществлении Возможности № 2 в канонических разложениях всех P_{u_j} из X первой будет степень $\pi_1^{c_1}$ с одним и тем же фиксированным простым основанием π_1, но у каждого P_{u_j} числовое значение переменной c_1 будет меньше, чем у $P_{u_{j+1}}$, и это значит, что при $j\to\infty$ будет и $c_1\to\infty$.

3-ий тип. При осуществлении Возможности № 3 у всех P_{u_j} из X, и p_1 будет иметь одно и то же фиксированное значение π_1, и c_1 — одно и то же фиксированное значение γ_1, а это значит, что при $j\to\infty$ будет $\pi_1^{\gamma_1}\to\pi_1^{\gamma_1}$.

В соответствии с тем, какого из этих трех типов по отношению к p_1 и c_1 окажется последовательность X, мы можем отразить это в символе для ее обозначения так: $X=\{P_{u_j}=p_1^{c_1}\ldots\}$, если X последовательность 1-го типа, $X=\{P_{u_j}=\pi_1^{c_1}\ldots\}$, если 2-го типа, и $X=\{P_{u_j}=\pi_1^{\gamma_1}\ldots\}$, если 3-го типа.

6. Поскольку во всех случаях последовательность X из § 5 бесконечна, то рассматривая в ней поведение p_2 и c_2, с ней можно поступить так же, как с последовательностью Φ из § 4, то-есть, из X можно будет выделить хотя бы одну бесконечную подпоследовательность $\Psi=(P_{v_1}<P_{v_2}<\ldots<P_{v_j}<\ldots\}$ одного из трех возможных по отношению к поведению p_2 и c_2 типов, так что Ψ окажется бесконечной подпоследовательностью последовательности X какого то одного из следующих девяти типов: $\Psi=\{P_{v_j}=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=p_1^{c_1}\pi_2^{c_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=p_1^{c_1}\pi_2^{\gamma_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=\pi_1^{c_1}p_2^{c_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=\pi_1^{c_1}\pi_2^{c_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=\pi_1^{c_1}\pi_2^{\gamma_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=\pi_1^{\gamma_1}p_2^{c_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=\pi_1^{\gamma_1}\pi_2^{c_2}\ldots\}$, $\{P_{v_j}=\pi_1^{\gamma_1}\pi_2^{\gamma_2}\ldots\}$, где сами символы показывают, как ведут себя первые два множителя в канонических разложениях всех P_{v_j} последовательности Ψ. Ясно, что все девять типов последовательностей Ψ будут бесконечными лишь при $t>2$, а при $t=2$ останутся бесконечными только первые восемь, поскольку в девятом случае при всех j $P_{v_j}=\pi_1^{\gamma_1}\pi_2^{\gamma_2}$ — одно и то же число.

7. Из последовательности Ψ, какого бы из девяти типов она не оказалась (имеется в виду $t>2$) снова можно (благодаря ее бесконечности) выделить хотя бы одну новую бесконечную подпоследовательность одного из таких же трех типов (в соответствии с поведением p_3 и c_3 в канонических разложениях ее членов), какие введены в § 5, а продолжая так и далее, и исчерпав рассмотрение всех t сомножителей из канонических разложений чисел последовательности Φ (§ 4), мы сможем констатировать наличие у нее хотя бы одной бесконечной подпоследовательности $\Omega = \{P_{w_1} < P_{w_2} < \ldots < P_{w_j} < \ldots\}$ одного из 3^t-1 типов соответственно 3^t различным вариантам построения таких последовательностей, но исключая тот единственный из них (а именно, в соответствии с алгорифмом построения, 3^t-ый вариант), который не может привести к бесконечной последовательности. Последовательность Ω будем называть результирующей подпоследовательностью последовательности Φ, и, какого бы из возможных типов она не оказалась, далее мы будем располагать в ее символе сомножители канонического разложения так (после соответствующего изменения их нумерации), что на первых местах будут находиться множители вида p^c, на средних местах — вида π^c, и на последних — вида π^γ. Это позволит нам для всех возможных типов результирующей последовательности употреблять одну и ту же запись

$$\Omega = \Big\{P_{w_j} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} \pi_i^{c_i} \prod_{i=r+s+1}^{t} \pi_i^{\gamma_i}\Big\},$$

где варьируются только r и s, так что $0 < r+s \leqslant t$, причем допустимы и возможности $r = 0$, или $s = 0$, но не $r = s = 0$ (исключенный 3^t-ый вариант). Таким образом, в этой записи каждое из трех произведений $\prod$ может оказаться и пустым (то-есть, равным 1): первое — при $r = 0$, второе — при $s = 0$, и третье — при $r+s = t$, но первое и второе не могут оказаться пустыми одновременно.

8. Проведенные нами в §§ 3–7 исследования подытоживаются следующей леммой.

Лемма А. *Какова бы не была бесконечная подпоследовательность последовательности всех натуральных чисел заданного ранга t, у нее имеется хотя бы одна бесконечная результирующая подпоследовательность*

$$\Omega = \Big\{P_{w_j} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} \pi_i^{c_i} \prod_{i=r+s+1}^{t} \pi_i^{\gamma_i}\Big\}$$

с фиксированными r, s, такими, что $rs \geqslant 0$, $0 < r+s \leqslant t$, и фиксированными π_i для $i = r+1, r+2, \ldots, t$ и γ_i для $i = r+s+1, r+s+2, \ldots, t$.

9. С результирующей подпоследовательностью Ω последовательности Φ свяжем теперь новую бесконечную (но в общем случае изменяющуюся уже не монотонно) числовую последовательность

$$\omega = \left\{\frac{P_{w_1}}{\sigma(P_{w_1})}, \frac{P_{w_2}}{\sigma(P_{w_2})}, \ldots, \frac{P_{w_j}}{\sigma(P_{w_j})}, \ldots\right\}.$$

Для нее справедлива

Лемма В. *Если последовательность Ω имеет структуру*

$$\Omega = \Big\{P_{w_j} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} \pi_i^{c_i} \prod_{i=r+s+1}^{t} \pi_i^{\gamma_i}\Big\},$$

то последовательность ω сходится к числу

$$\prod_{i=r+1}^{r+s} \frac{\pi_i - 1}{\pi_i} \prod_{i=r+s+1}^{t} \frac{\pi_i^{\gamma_i}}{\sigma(\pi_i^{\gamma_i})}.$$

Доказательство. Во-первых,

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p^c}{\sigma(p^c)} = 1,$$

по какой бы последовательности простых чисел ни стремилось p к бесконечности и как бы ни вел себя здесь показатель степени c. Это положение основано на неравенствах

$$\frac{p-1}{p} < \frac{p^c}{\sigma(p^c)} \leqslant \frac{p}{p+1},$$

вытекающих из формулы

$$\frac{p^c}{\sigma(p^c)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{p} + \ldots + \dfrac{1}{p^c}}.$$

Во-вторых, каково бы ни было фиксированное простое π и как бы ни стремилось c к бесконечности,

$$\lim_{c\to\infty} \frac{\pi^c}{\sigma(\pi^c)} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \pi^{-k}\Big)^{-1} = \frac{\pi - 1}{\pi}.$$

В-третьих, при фиксированных π и γ, и $\dfrac{\pi^\gamma}{\sigma(\pi^\gamma)}$ — величина постоянная.

Значит, действительно

$$\lim_{j\to\infty} \frac{P_{w_j}}{\sigma(P_{w_j})} = \prod_{i=r+1}^{r+s} \frac{\pi_i - 1}{\pi_i} \prod_{i=r+s+1}^{t} \frac{\pi_i^{\gamma_i}}{\sigma(\pi_i^{\gamma_i})},$$

поскольку

$$\frac{P_{w_j}}{\sigma(P_{w_j})} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{c_i}}{\sigma(p_i^{c_i})} \prod_{i=r+1}^{r+s} \frac{\pi_i^{c_i}}{\sigma(\pi_i^{c_i})} \prod_{i=r+s+1}^{t} \frac{\pi_i^{\gamma_i}}{\sigma(\pi_i^{\gamma_i})}.$$

Здесь же отметим еще и следующий простой факт:

Лемма C. *Для P, имеющего каноническое разложение $P = \pi_1^{\gamma_1}\pi_2^{\gamma_2}\ldots\pi_t^{\gamma_t}$, при каждом $r = 0, 1, 2, \ldots, t$ будет*

$$\frac{P}{\sigma(P)} \leqslant \prod_{i=r+1}^{t} \frac{\pi_i^{\gamma_i}}{\sigma(\pi_i^{\gamma_i})},$$

причем равенство имеет место только в случае $r = 0$.

Справедливость леммы основана на том, что каждая дробь $\pi^\gamma/\sigma(\pi^\gamma) < 1$.

10. Для всякой пары чисел M, N введем в употребление следующие числа: $D = (M, N)$. M', N' — наибольшие из взаимно простых с D делителей соответственно чисел M/D и N/D, и новую пару M', N' назовем производной парой данной пары M, N. Кроме того, положим $d = M/DM'$, $\delta = N/DN'$, и произведение $Dd\delta = \Delta$ назовем ядром данной пары M, N, а тройку чисел D, d, δ — набором компонентов этого ядра. Нетрудно выяснить, что Δ представляет собой число, равное тому унитарному делителю общего наименьшего кратного чисел данной пары, который делится на все те и только те простые, на какие делится и D (напомним, что делитель a числа b называется унитарным, если $\left(a, \frac{b}{a}\right) = 1$).

Заметим, что в соответствии с определением ядра пары M, N набор его компонентов, D, d, δ, не может задаваться совершенно произвольно. Если, например, задано D, то в канонических разложениях чисел d и δ не может быть ни одного простого, отсутствующего в каноническом разложении D, а, кроме того, должно быть $(d, \delta) = 1$.

Отметим, кроме того, следующие очевидные свойства введенных здесь чисел: 1. $(M', N') = 1$. 2. $(M'N', \Delta) = 1$. 3. $\sigma(M) = \sigma(Dd)\sigma(M')$, $\sigma(N) = \sigma(D\delta)\sigma(N')$.

Понятие ядра мы ввели для пар любых чисел, но начиная с § 11 оно будет употребляться для пар дружественных чисел M, N (где $M < N$), и в связи с этим в виде справки отметим, что из первых 690 пар дружественных чисел (список этих чисел вместе с их факторизациями опубликован в [8]) у 592 пар $d = \delta = 1$ (то-есть, $\Delta = D$) у 97 пар только одно из чисел d, δ больше, чем 1, а у одной (527-ой пары) и $d > 1$ и $\delta > 1$.

11. Лемма D. *Если M, N — дружественная пара с заданным набором компонентов, D, d, δ ее ядра и с производной парой M', N', то имеет место равенство*

$$\frac{Dd}{\sigma(Dd)}\frac{M'}{\sigma(M')} + \frac{D\delta}{\sigma(D\delta)}\frac{N'}{\sigma(N')} = 1, \tag{1}$$

причем

$$\big(M'N', \sigma(Dd)\sigma(D\delta)\sigma(M')\sigma(N')\big) = 1. \tag{2}$$

Доказательство. Из определения дружественности непосредственно следует, что

$$\frac{M}{\sigma(M)} + \frac{N}{\sigma(N)} = 1$$

(это, конечно, необходимое, но не достаточное условие дружественности), поэтому, в соответствии с определениями чисел D, M', N', d, δ, и в силу свойства 3 из § 10 равенство (1) оказывается справедливым. По тем же причинам имеем

$$M + N = \sigma(Dd)\sigma(M') = \sigma(D\delta)\sigma(N').$$

С другой стороны

$$M + N = DdM' + D\delta N',$$

откуда в силу свойств 1 и 2 из § 10 выводим, что $(M'N', M + N) = 1$. Из последних двух фактов и получаем (2).

12. Лемма E. *Не может иметься двух различных дружественных пар M, N и M_1, N_1, имеющих ядро с одним и тем же набором компонентов и таких, что $MN = M_1N_1$.*

Доказательство. Пусть $Dd\delta$ общее ядро указанных в условии леммы пар, а M', N' и M_1', N_1' — их производные пары. Благодаря свойству 1 из § 10 имеем

$$\sigma(M')\sigma(N') = \sigma(M'N') \quad \text{и} \quad \sigma(M_1')\sigma(N_1') = \sigma(M_1'N_1'),$$

так что, используя дружественность данных пар и свойство 3 из § 10, получаем

$$(M + N)^2 = \sigma(M)\sigma(N) = \sigma(Dd)\sigma(D\delta)\sigma(M'N'),$$
$$(M_1 + N_1)^2 = \sigma(Dd)\sigma(D\delta)\sigma(M_1'N_1').$$

Но $MN = D^2 d\delta M'N'$, $M_1N_1 = D^2 d\delta M_1'N_1'$ и, следовательно, из $MN = M_1N_1$ вытекает $M'N' = M_1'N_1'$, а, значит, и $\sigma(M'N') = \sigma(M_1'N_1')$. Сравнивая только что указанные выражения для $(M+N)^2$ и $(M_1+N_1)^2$, мы заключаем, что допущение $MN = M_1N_1$ влечет за собой равенство $M + N = M_1 + N_1$; оба же эти равенства совместимы только тогда, когда, либо $M = M_1$, $N = N_1$, либо $M = N_1$, $N = M_1$.

13. Теорема I. *Каковы бы не были наперед заданные числа H и h, множество всех пар дружественных чисел с ядрами, не превосходящими H, и суммарными рангами, не превосходящими h, не может быть бесконечным.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что и множество всевозможных троек чисел, D, d, δ, для которых $Dd\delta \leqslant H$, и множество всевозможных пар чисел K, L, для которых $K+L \leqslant h$, конечны, так что для установления справедливости теоремы достаточно убедиться в том, что какова бы не была заданная тройка чисел, из которых составлено ядро $Dd\delta = \Delta$ (в § 10 указано, какими могут быть эти числа), и каковы бы не были заданные числа K, L, множество всех пар дружественных чисел с таким ядром и рангами, равными K и L, не может оказаться бесконечным. Доказательством этого факта мы и займемся, причем поведем доказательство от противного. Допустим, что множество пар дружественных чисел, M, N, с ядром $\Delta = Dd\delta$ и рангами K, L — бесконечно. Условившись в каждой такой паре считать $M < N$ мы можем (благодаря лемме E) рассматривать это гипотетическое бесконечное множество как бесконечную последовательность пар $\{M_1, N_1; M_2, N_2; \ldots; M_j, N_j; \ldots\}$, упорядоченную по признаку строгого возрастания произведений M_jN_j. Поскольку же $M_jN_j = D^2d\delta M_j'N_j'$ (см. § 10), то при этом окажется упорядоченной по такому же признаку и бесконечная последовательность произведений $M_j'N_j'$ чисел из соответственных производных пар. Из того, что ранги K, L чисел M_j, N_j заданы, вытекает, что заданными оказываются и ранги k, l соответственно чисел M_j', N_j', при этом нетрудно выяснить, что $k = K-r$, $l = L-r$, где r — ранг заданного ядра Δ (это, между прочим, означает, что можно заранее считать $K \geqslant r$, $L \geqslant r$, поскольку в противном случае доказываемый факт становится тривиальным). Положив $k+l = t$, мы приходим к следующему выводу: из допущения бесконечности множества дружественных пар M_j, N_j с выше заданными ядром и рангами вытекает существование бесконечной последовательности $\Phi = \{P_{q_1} < P_{q_2} < \ldots < P_{q_j} < \ldots\}$ чисел $P_{q_j} = M_j'N_j'$ (где M_j', N_j' — производная пара дружественной пары M_j, N_j), являющейся подпоследовательностью введенной в § 3 последовательности $T = \{P_1 < P_2 < \ldots < P_i < \ldots\}$ всех натуральных чисел, имеющих заданный ранг t (здесь $t = k+l = K+L-2r$). Значит к последовательности Φ можно применить лемму A, то-есть, заключить о существовании у нее хотя бы одной результирующей бесконечной подпоследовательности

$$\Omega = \{M_{u_1}'N_{u_1}' < M_{u_2}'N_{u_2}' < \ldots < M_{u_j}'N_{u_j}' < \ldots\} = \\ = \Big\{M_{u_j}'N_{u_j}' = \prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} \pi_i^{c_i} \prod_{i=r+s+1}^{t} \pi_i^{\gamma_i}\Big\}$$

того или иного из возможных 3^t-1 типов.

Поскольку $(M_{u_j}', N_{u_j}') = 1$ (свойство 1 из § 10), то каждое из трех произведений $\prod$ распадается на два взаимно простых произведения, из которых одно войдет сомножителем в M_{u_j}', другое — в N_{u_j}', и поэтому символ, расшифровывающий структуру членов последовательности Ω уточнится следующим образом:

$$\Omega = \Big\{M_{u_j}'N_{u_j}' = \Big(\prod_{i=1}^{r_M} m_i^{a_i} \prod_{i=r_M+1}^{r_M+s_M} \mu_i^{a_i} \prod_{i=r_M+s_M+1}^{k} \mu_i^{\alpha_i}\Big)\cdot\Big(\prod_{i=1}^{r_N} n_i^{b_i} \prod_{i=r_N+1}^{r_N+s_N} \nu_i^{b_i} \prod_{i=r_N+s_N+1}^{l} \nu_i^{\beta_i}\Big)\Big\},$$

где переменные p, c и постоянные π, γ, вошедшие в M_{u_j}', обозначены соответственно через m, a и μ, α, а вошедшие в N_{u_j}' — через n, b и ν, β. Если теперь к обеим бесконечным последовательностям чисел M_{u_j}' и N_{u_j}', $j = 1, 2, 3, \ldots$, применим лемму B, то получим

$$\lim_{j\to\infty} \frac{M_{u_j}'}{\sigma(M_{u_j}')} = \prod_{i=r_M+1}^{r_M+s_M} \frac{\mu_i-1}{\mu_i} \prod_{i=r_M+s_M+1}^{k} \frac{\mu_i^{\alpha_i}}{\sigma(\mu_i^{\alpha_i})},$$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{N_{u_j}'}{\sigma(N_{u_j}')} = \prod_{i=r_N+1}^{r_N+s_N} \frac{\nu_i-1}{\nu_i} \prod_{i=r_N+s_N+1}^{l} \frac{\nu_i^{\beta_i}}{\sigma(\nu_i^{\beta_i})}, \tag{3}$$

причем здесь хотя бы одно из чисел r_M, r_N, s_M, s_N отлично от нуля, ибо $r_M+r_N = r$, $s_M+s_N = s$, а возможность $r+s = 0$ для последовательности Ω заранее исключается.

Так как предполагается, что каждая пара чисел M_{u_j}, N_{u_j} дружественна, то в силу леммы D при любом $j = 1, 2, 3, \ldots$ имеем

$$\frac{Dd}{\sigma(Dd)} \frac{M_{u_j}'}{\sigma(M_{u_j}')} + \frac{D\delta}{\sigma(D\delta)} \frac{N_{u_j}'}{\sigma(N_{u_j}')} = 1 \tag{4}$$

и из того, что (4) имеет место при любом j вытекает, что предел левой части этого равенства при $j\to\infty$ должен быть равен 1, то-есть, в соответствии с формулами (3) должно быть

$$\frac{Dd \prod_{i=r_M+1}^{r_M+s_M} (\mu_i-1) \prod_{i=r_M+s_M+1}^{k} \mu_i^{\alpha_i}}{\sigma(Dd) \prod_{i=r_M+1}^{r_M+s_M} \mu_i \prod_{i=r_M+s_M+1}^{k} \sigma(\mu_i^{\alpha_i})} + \frac{D\delta \prod_{i=r_N+1}^{r_N+s_N} (\nu_i-1) \prod_{i=r_N+s_N+1}^{l} \nu_i^{\beta_i}}{\sigma(D\delta) \prod_{i=r_N+1}^{r_N+s_N} \nu_i \prod_{i=r_N+s_N+1}^{l} \sigma(\nu_i^{\beta_i})} = 1. \tag{5}$$

Но присмотримся к левой части этого равенства, начав со случая, когда $s = 0$, то-есть, $s_M = s_N = 0$. В этом случае оно принимает вид

$$\frac{Dd}{\sigma(Dd)} \prod_{i=r_M+1}^{k} \frac{\mu_i^{\alpha_i}}{\sigma(\mu_i^{\alpha_i})} + \frac{D\delta}{\sigma(D\delta)} \prod_{i=r_N+1}^{l} \frac{\nu_i^{\beta_i}}{\sigma(\nu_i^{\beta_i})} = 1,$$

причем здесь обязательно $r_M + r_N \geqslant 1$ поскольку $r+s \neq 0$, а $s=0$. Такое равенство противоречит заведомо справедливому равенству (4), так как, принимая во внимание, что $\prod_{i=r_M+1}^{k} \mu_i^{a_i}$ и $\prod_{i=r_N+1}^{l} \nu_i^{\beta_i}$ являются постоянными и притом унитарными делителями всех M'_{u_j}, N'_{u_j} соответственно, мы в силу леммы C имеем

$$\frac{M'_{u_j}}{\sigma(M'_{u_j})} \leqslant \prod_{i=r_M+1}^{k} \frac{\mu_i^{a_i}}{\sigma(\mu_i^{a_i})}, \qquad \frac{N'_{u_j}}{\sigma(N'_{u_j})} \leqslant \prod_{i=r_N+1}^{l} \frac{\nu_i^{\beta_i}}{\sigma(\nu_i^{\beta_i})},$$

причем хотя бы одно из этих неравенств является строгим (из-за того, что $r_M + r_N \geqslant 1$).

Осталось рассмотреть левую часть в (5) при предположении, что хотя бы одно из чисел s_M, s_N отлично от нуля. В этом случае хотя бы одно из произведений $\prod_{i=r_M+1}^{r_M+s_M} \mu_i$, $\prod_{i=r_N+1}^{r_N+s_N} \nu_i$ — непустое и мы обозначим через π наибольший из простых делителей μ, ν этих произведений. Замечаем, что на π делится один из знаменателей двух дробей, в виде суммы которых у нас представлена левая часть равенства (5), тогда как оба числителя и знаменатель другой дроби на π делиться не могут (независимо от того, отличны ли в (5) от нуля r_M, r_N, или нет), поскольку, во-первых, ни один простой делитель произведения $M'_{u_j} N'_{u_j}$ не может быть делителем чисел D, d, δ (см. свойство 2 из § 10), во-вторых, π, будучи наибольшим из вышеуказанных простых, не может быть делителем произведений

$$\prod_{i=r_M+1}^{r_M+s_M} (\mu_i - 1) \quad \text{и} \quad \prod_{i=r_N+1}^{r_N+s_N} (\nu_i - 1),$$

наконец, в-третьих, в силу леммы D, π не может быть делителем чисел

$$\sigma(Dd), \quad \sigma(D\delta), \quad \prod_{i=r_M+s_M+1}^{k} \sigma(\mu_i^{a_i}), \quad \prod_{i=r_N+s_N+1}^{l} \sigma(\nu_i^{\beta_i}).$$

В целом это означает, что после всех возможных сокращений обеих дробей в (5) у какой то одной из них знаменатель останется имеющим простой делитель π, а знаменатель другой делиться на π не будет, и это свидетельствует об абсурдности равенства (5) в рассматриваемом случае, так как равенство $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ с несократимыми дробями $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ может иметь место только при $b = d$. Этим и завершается доказательство теоремы.

14. Теорема II. *Каково бы не было наперед заданное число h, множество всех пар взаимно простых дружественных чисел с суммарными рангами, не превосходящими h, не может быть бесконечным.*

Эта теорема является частным случаем теоремы I ($H = 1$).

В качестве дополнения к ней следует отметить, что пары взаимно простых дружественных чисел с суммарным рангом меньшим, чем 21, заведомо не существуют. Этот факт установлен H.-J. Kanold'ом [6].

15. Изложенные здесь в §§ 3–9 положения могут быть соответствующим образом использованы для нового варианта доказательства теорем о нечетных h-кратно совершенных числах, сообщенных автором в [1].

Литература

[1] M. M. Artuhov, *On the problem of odd h-fold perfect numbers*, Acta Arith. 23 (1973), стр. 249–255.

[2] L. E. Dickson, *Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors*, Amer. J. Math. 35 (1913), стр. 413–422.

[3] И. С. Градштейн, *О нечетных совершенных числах*, Матем. сб. 32 (1925), стр. 476–510.

[4] H.-J. Kanold, *Über einen Satz von L. E. Dickson*, Math. Ann. 131 (1956), стр. 167–179.

[5] — *Über einen Satz von L. E. Dickson, II*, Math. Ann. 132 (1956), стр. 246–255.

[6] — *Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen*, Arch. Math. 5–6 (1953), стр. 399–401.

[7] E. J. Lee and J. S. Madachy, *The history and discovery of amicable numbers*, Part I, J. Recreat. Math. 5 (1972), стр. 77–93.

[8] — — *The history and discovery of amicable numbers*, Part II, J. Recreat. Math. 5 (1972), стр. 153–173.

Поступило 18. 9. 1973 (462)