[3] А. А. Карацуба, *Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа*, Вестник МГУ, сер. матем. 4 (1962), стр. 28–38.
[4] — *О системах сравнений*, Изв. АН СССР, сер. матем. 29 (1965), стр. 959–968.
[5] — *Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы*, Изв. АН СССР, сер. матем. 30 (1966), стр. 183–206.
[6] Ю. В. Линник, *Новые оценки сумм Вейля*, Докл. АН СССР 37, 7 (1942), стр. 201–203.

Поступило 22. 12. 1973 (504)

ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

О функциональной независимости L-функций Дирихле

С. М. Воронин (Москва)

1. Введение и формулировка результатов. Пусть Q — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, $\boldsymbol{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство, $\bar{\boldsymbol{C}}^n$ — прямое произведение n римановых сфер; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — простые числа в порядке следования; $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots$ — вещественные переменные, индексированные простыми числами.

Если M некоторое конечное множество простых чисел, то определим функцию $L_M(s, \chi, \bar{\theta})$ равенством

$$L_M(s, \chi, \bar{\theta}) = \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{\chi(p) e^{-2\pi i \theta_p}}{p^s}\right)^{-1},$$

где $s \in \boldsymbol{C}$, $\bar{\theta} = (\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots)$, χ — характер Дирихле. Функцию $L_M(s, \chi)$ определим равенством:

$$L_M(s, \chi) = \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ — попарно неэквивалентные характеры Дирихле; $L(s, \chi_1), L(s, \chi_2), \ldots, L(s, \chi_n)$ — соответствующие L-функции Дирихле. Обозначим через $\gamma(\sigma, T)$ отображение $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{C}^n$, задаваемое формулой

$$\gamma(\sigma, T) = \big(L(\sigma+iT, \chi_1), L(\sigma+iT, \chi_2), \ldots, L(\sigma+iT, \chi_n)\big).$$

Пусть $\{a\}$ обозначает как обычно дробную часть a. Квазипрогрессией будем называть множество всех тех $t \in (0, +\infty)$, которые удовлетворяют какой-либо системе неравенств вида:

$$0 < a_j < \left\{t \frac{\ln p}{2\pi} j\right\} < \beta_j < 1$$

для $j = 1, 2, \ldots, N$.

Теорема. *При фиксированном $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$ образ любой квазипрогрессии при отображении $\gamma(\sigma, T)$ всюду плотен в $\boldsymbol{C}^n$.*

Следствие 1. *Если $F_0\colon C^n\to C$, $F_1\colon C^n\to C, \ldots, F_m\colon C^n\to C$ — непрерывные функции, не все равные нулю тождественно, то функция*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{m} s^k F_k\big(L(s,\chi_1), L(s,\chi_2), \ldots, L(s,\chi_n)\big) \tag{1}$$

также не равна нулю тождественно.

Другими словами: не существует функциональных зависимостей вида (1), которым бы удовлетворяли L-функции Дирихле с неэквивалентными характерами.

Следствие 2. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — попарно различные квадратичные расширения поля рациональных чисел, $\frac{1}{2}<\sigma\leqslant 1$.*

Тогда кривая

$$\gamma(t) = \big(\zeta_{K_1}(\sigma+it), \ldots, \zeta_{K_n}(\sigma+it)\big), \quad t\in(-\infty, +\infty)$$

(ζ_K — дзета-функция Дедекинда поля K) всюду плотна в C^n.

Следствие 3. *Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — нечетные попарно различные бесквадратные числа, $K_l = Q(\sqrt[D_l]{1})$, $\frac{1}{2}<\sigma\leqslant 1$. Тогда кривая*

$$\gamma(t) = \big(\zeta_{K_1}(\sigma+it), \ldots, \zeta_{K_n}(\sigma+it)\big), \quad t\in(-\infty, +\infty)$$

всюду плотна в C^n.

Следствие 4. *Не существует непрерывных функций $F_0\colon C^n\to C$, $F_1\colon C^n\to C, \ldots, F_n\colon C^n\to C$, не всех равных нулю тождественно, таких, что*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{m} s^k F_k\big(\zeta_{K_1}(s), \zeta_{K_2}(s), \ldots, \zeta_{K_n}(s)\big)$$

тождественно равна нулю, если $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — поля из условий следствия 2, либо 3.

Из теоремы сразу следует всюду плотность образа вещественной оси при отображении $\gamma(\sigma, T)$. Выбор формулировки в более общем виде был продиктован тем, что при более сложных ситуациях, чем описанные в следствии 2 и следствии 3, могут участвовать L-функции с эквивалентными характерами. В таких случаях удобно рассматривать образы квазипрогрессий при отображении $\gamma(\sigma, T)$ с тем, чтобы не учитывать множители, которыми отличаются L-функции.

Способ доказательств теорем и следствий в основных чертах повторяет соответствующие рассуждения работ [2] и [3].

Вопросы аналогичные вопросам, рассматриваемым в следствиях 1 и 4, рассматривались в более частных случаях в работах [5] и [6].

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. (Теорема Кронекера.) *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — вещественные числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, γ — подобласть N-мерного единичного куба с объемом в смысле Жордана Γ. Пусть, далее, $I_\gamma(T)$ — мера множества чисел t из интервала $(0, T)$, для которых $(a_1t, a_2t, \ldots, a_Nt)$ лежит внутри γ по $\operatorname{mod} 1$, т.е. существует набор целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ такой, что $(a_1t-a_1, a_2t-a_2, \ldots, a_Nt-a_N)\in\gamma$. Тогда*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{I_\gamma(T)}{T} = \Gamma.$$

Доказательство см. [9], стр. 208.

Лемма 2. *Пусть кривая $\gamma(T)$ равномерно распределена в единичном N-мерном кубе, т.е. для любой подобласти D N-мерного единичного куба с объемом в смысле Жордана d,*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{I_D(T)}{T} = d,$$

где $I_D(T)$ — мера тех $t\in(0, T)$ для которых $\gamma(t)\in D$. Тогда для любой функции, интегрируемой по Риману, на единичном N-мерном кубе $F(\bar\theta)$ выполняется

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 F(\bar\theta)\,d\theta_1\ldots d\theta_N = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^1 F\big(\gamma(t)\big)\,dt.$$

Доказательство следует из определения интеграла в смысле Римана.

Лемма 3. *Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ составлен из $u_k\in R^n$. Если для каждого единичного вектора $e\in R^n$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k, e)$ сходится при некоторой перестановке условно, то для любого $a\in R^n$ существует перестановка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ такая, что переставленный ряд сходится к a.*

Доказательство этой леммы содержится в [8].

Лемма 4. *При постоянном D, $(l, D) = 1$, имеет место формула*

$$\pi(x, D, l) = \frac{1}{\varphi(D)}\operatorname{li}x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $\pi(x, D, l)$ — число простых чисел меньших x в прогрессии $Dm+l$ и $\varphi(D)$ — функция Эйлера.

Доказательство см. [7], стр. 157.

Лемма 5. *Если* $(D, l) = 1$, *то*

$$\sum_{\substack{p\equiv l (\mathrm{mod}\, D)\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p} = \ln\ln x + c_1 + O(e^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Лемма 5 следует из леммы 4 применением формулы суммирования по Абелю.

Лемма 6. *Предположим, что* $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$, $0<\omega\leqslant 1$ *и* y — *положительное целое число такое, что* $\pi y\geqslant |t|$.

Тогда

$$\zeta(s, \omega) = \sum_{n=0}^{y}(n+\omega)^{-s} - \frac{y^{1-s}}{1-s} + O(y^{-\sigma}),$$

где $\zeta(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\omega)^{-s}$ *при* $\mathrm{Re}\, s>1$, $s = \sigma+it$.

Доказательство см. [4], стр. 183.

Лемма 7. *Оценка*

$$\sum_{0<m<n<T} \frac{1}{m^{\sigma}n^{\sigma}\ln\frac{n}{m}} = O(T^{2-2\sigma}\ln^2 T)$$

справедлива равномерно для $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$.

Доказательство содержится в [9], стр. 138 с заменой последней оценки в доказательстве леммы равномерной по $\sigma\in[\frac{1}{2}, 1]$:

$$\sum_{n<T} n^{1-2\sigma}\sum_{r\leqslant n/2}\frac{1}{r}\leqslant cT^{2-2\sigma}\ln^2 T.$$

3. Основная лемма.

Лемма. *Пусть* $(a_1, a_2, \dots, a_n)\in \boldsymbol{C}^n$, $\bar{\theta}_0 = (\theta_{p_1}^{(0)}, \theta_{p_2}^{(0)}, \dots)$ — *набор чисел* $\theta_p^{(0)}$, *в котором не более чем конечное число* $\theta_p^{(0)}$ *отличны от нуля;* $\varepsilon>0$, $y>0$ — *вещественные числа.*

Существует множество простых чисел M *такое, что* $M\supset\{p_1, p_2, \dots, p_y\}$, *и для* $k = 1, 2, \dots, n$ *выполняется*

$$|L_M(s, \chi_k, \bar{\theta}_0) - a_k| < \varepsilon,$$

где $s = \sigma+i$, $\sigma\in(\frac{1}{2}, 1]$.

(*Как оговаривалось выше* χ_k *неэквивалентен* χ_j; *при* $j\neq k$.)

Доказательство. Рассмотрим ряд, составленный из векторов C^n:

$$(2)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} u_k = \sum_{m=1}^{\infty}\big(\ln(1-p_m^{-s}\chi_1(p_m))^{-1}, \dots, \ln(1-p_m^{-s}\chi_n(p_m))^{-1}\big).$$

$\boldsymbol{C}^n$ будем рассматривать как $\boldsymbol{R}^{2n}$. Ряд (2) будет удовлетворять условиям леммы 3, если показать, что для любого единичного вектора $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{R}^{2n}$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(u_m, \boldsymbol{e})$ условно сходится при некоторой перестановке. Заметим, что вещественный ряд, общий член которого стремится в нулю, можно превратить в условно сходящийся ряд в том и только том случае, если существует частичный ряд расходящийся к $+\infty$, и частичный ряд расходящийся к $-\infty$. В силу определения ряд (2) на абсолютно сходящийся ряд отличается от ряда

$$(3)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} u'_m = \sum_{m=1}^{\infty}\big(\chi_1(p_m)p_m^{-s}, \chi_2(p_m)p_m^{-s}, \dots, \chi_n(p_m)p_m^{-s}\big).$$

Пусть $\boldsymbol{e} = (a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n)$. Проверим, что из ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(u'_m, \boldsymbol{e}),$$

можно выделить частичный ряд расходящийся к $+\infty$. Тем самым будет доказана условная сходимость ряда (2).

Имеем

$$(u'_m, \boldsymbol{e}) = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}(a_k - ia'_k)p_m^{-s}\chi_k(p_m) =$$

$$= p^{-\sigma}\mathrm{Re}\, p_m^{-i}\sum_{k=1}^{n}(a_k - ia'_k)\chi_k(p_m).$$

Рассмотрим выражение

$$\varphi(a) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ia'_k)\chi_k(a).$$

Функция $\varphi(a)$ периодическая с периодом D равным произведению модулей χ_k и в силу попарной неэквивалентности χ_k не равная нулю тождественно на числах a, взаимно простых с D. Поэтому существует a_0 такое, что

$$\varphi(a_0+rD) = \varphi(a_0) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ia'_k)\chi_k(a_0) = Re^{i\varphi_0}\neq 0.$$

В качестве частичного ряда, расходящегося к $+\infty$, возьмем ряд из (u'_m, e) таких, что

1. $p_m \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, D)$,

2. $-2k\pi - \dfrac{\pi}{10} < \varphi_0 - \ln p_m < -2k\pi + \dfrac{\pi}{10}$

для некоторого натурального k.

Пусть

$$S_r = \sum_{\substack{m \\ |\varphi_0 - \ln p_m + 2r\pi| < \pi/10 \\ p_m \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, D)}} (u', e).$$

Имеем

$$S_r \geqslant c_0 R \sum_{\substack{m \\ |\varphi_0 - \ln p_m + 2r\pi| < \pi/10 \\ p_m \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, D)}} \frac{1}{p_m^{\sigma}} \geqslant$$

$$\geqslant c_0 R \sum_{\substack{m \\ |\varphi_0 - \ln p_m + 2r\pi| < \frac{\pi}{10}\; e^{2r\pi - \frac{\pi}{10} + \varphi_0} < p < e^{2r\pi + \frac{\pi}{10} + \varphi_0} \\ p_m \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, D),\; p \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, D)}} \frac{1}{p_m} = c \sum_{p} \frac{1}{p},$$

$$S_r \geqslant \frac{c}{\varphi(D)} \left[\ln\ln e^{2r\pi + \frac{\pi}{10} + \varphi_0} - \ln\ln e^{2r\pi - \frac{\pi}{10} + \varphi_0}\right] + O\left(e^{-c_1\sqrt{2r\pi + \frac{\pi}{10} + \varphi_0}}\right) =$$

$$= \frac{c}{\varphi(D)} \left[\ln\left(2r\pi + \frac{\pi}{10} + \varphi_0\right) - \ln\left(2r\pi - \frac{\pi}{10} + \varphi_0\right)\right] + O(e^{-c_2\sqrt{r}}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c_3}{\varphi(D)} \frac{1}{r}$$

при r достаточно больших. Поэтому

$$\sum_{r=1}^{N} S_r \geqslant c_4 \ln N$$

при N достаточно больших. Аналогично можно выбрать частичный ряд расходящийся к $-\infty$. В силу леммы 3 ряд (3), а, следовательно, и ряд (2), можно переставить таким образом, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_{m_j} = \bar{a},$$

где $\bar{a}$ — любой наперед заданный вектор из C^n и $\sum_{j=1}^{\infty} u_{m_j}$ — соответствующе переставленный ряд (2). Поскольку ряд (2) и ряд из условия леммы отличаются лишь конечным числом членов, то аналогичное утверждение справедливо и для последнего ряда. Взяв достаточно длинную частную сумму переставленного ряда, получим тем самым утверждение леммы.

4. Доказательства теоремы и следствий.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы достаточно установить, что к любому вектору $(a_1, \ldots, a_n) \in C^n$ можно приблизиться сколь угодно близко вектором

$$\big(L(\sigma+it, \chi_1), L(\sigma+it, \chi_2), \ldots, L(\sigma+it, \chi_n)\big)$$

при подходящем значении t из заданной квазипрогрессии A. Пусть квазипрогрессия A определяется числами $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_N, \beta_N$.

В силу основной леммы для всякого $\varepsilon > 0$ и $y > 0$ существует M такое, что для $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется

$$|L_M(\sigma, \chi_k, \bar{\theta}^{(0)}) - a_k| < \varepsilon$$

причем $\alpha_k < \theta^{(0)}_{p_k} < \beta_k$, для $k = 1, 2, \ldots, N$. В силу непрерывности $L_M(s, \chi, \bar{\theta})$ существует $\Delta > 0$ такое, что для $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется

$$|L_M(\sigma, \chi_k, \bar{\theta}) - a_k| < 2\varepsilon$$

если для $p \in M$ выполняется $|\theta^0_p - \theta_p| \leqslant \Delta$. Можно считать, что $0 < \theta^{(0)}_p - \Delta < \theta^0_p + \Delta < 1$ для всех $p \in M$ и

$$0 < \alpha_k < \theta^{(0)}_{p_k} - \Delta < \theta^0_p + \Delta < \beta_k < 1 \tag{4}$$

для $k = 1, 2, \ldots, N$.

Далее, под

$$\int_1^{T(\Delta)} \ldots dt$$

будем понимать интегрирование по тем t из интервала $(1, T)$, для которых вектор

$$\bar{\theta} = \left(\left\{\frac{t \ln p_1}{2\pi}\right\}, \left\{\frac{t \ln p_2}{2\pi}\right\}, \ldots\right)$$

удовлетворяет условиям (4).

Если t входит в множество, по которому ведется интегрирование, то t принадлежит квазипрогрессии A.

Рассмотрим теперь выражение

$$S = \frac{1}{T} \int_1^{T(\Delta)} \sum_{k=1}^{n} |L(\sigma+it, \chi_k) - L_M(\sigma+it, \chi_k, \bar{0})|^2\, dt.$$

Будем выбирать z большим, чем любое $p \in M$. Имеем

$$S \leqslant \frac{2}{T} \int\limits_1^{T(A)} \sum_{k=1}^{n} |L(\sigma+it, \chi_k) - L_Q(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})|^2 dt +$$

$$+ \frac{2}{T} \int\limits_1^{T(A)} \sum_{k=1}^{n} |L_Q(\sigma+it, \chi_k, \overline{0}) - L_M(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})|^2 dt,$$

где $Q = \{p\colon p \leqslant z\}$.

Первый интеграл обозначим S_1, второй — S_2. Оценим сначала S_2. В силу определения $L_M(\sigma+it, \chi, \overline{0})$ и $L_Q(\sigma+it, \chi, \overline{0})$ имеем

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_1^{T(A)} \left| L_Q\left(\sigma, \chi_k, \frac{t\ln p_1}{2\pi}, \frac{t\ln p_2}{2\pi}, \ldots\right) - L_M\left(\sigma, \chi_k, \frac{t\ln p_1}{2\pi}, \ldots\right)\right|^2 dt.$$

Далее,

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_1^{T(A)} \left| L_M\left(\sigma, \chi_k, \frac{t\ln p_1}{2\pi}, \ldots\right)\right|^2 dt \times$$

$$\times \int \left| L_{Q\setminus M}\left(\sigma, \chi_k, \frac{t\ln p_1}{2\pi}, \frac{t\ln p_2}{2\pi}\right) - 1\right|^2 dt.$$

В силу леммы 2 и определения $\int^{(A)} \ldots dt$ заключаем

(5) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} S_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_K \ldots \int |L_M(\sigma, \chi_k, \overline{\theta})|^2 d\theta_{p_1} d\theta_{p_2} \ldots \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 |L_{Q\setminus M}(\sigma, \chi_k, \overline{\theta}) - 1|^2 d\theta_{p_1} d\theta_{p_2} \ldots,$$

где K — куб, определяемый неравенствами (4). Вследствие определения области интегрирования K, первый интеграл в (5) оценивается сверху как

$$\operatorname{mes} K \cdot (|a_k|^2 + 2\varepsilon)^2,$$

второй интеграл оценивается (вследствие определения $L_{Q\setminus M}(\sigma, \chi, \overline{\theta})$) как

$$\sum_{m>y} \frac{1}{m^{2\sigma}} = O\left(\frac{1}{y^{2\sigma-1}}\right).$$

Таким образом,

(6) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} S_2 \leqslant B \cdot \frac{\operatorname{mes} K}{y^{2\sigma-1}},$$

где B — константа, независимая от y и z. Возьмем теперь y таким, чтобы выполнялось

$$\frac{B}{y^{2\sigma-1}} < \varepsilon^2.$$

Оценим теперь (при фиксированном y и M) S_1.

Имеем

$$S_1 = \int\limits_1^{T(A)} \sum_{k=1}^{n} |L(\sigma+it, \chi_k) - L_Q(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_1^{T} |L(\sigma+it, \chi_k) - L_Q(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})|^2 dt.$$

Из леммы 6 следует равенство

$$L(\sigma+it, \chi_k) = \sum_{m\leqslant 2q_k(|t|+1)} \frac{\chi_k(n)}{m^{\sigma+it}} + O(q_k|t|^{-\sigma})$$

где q_k — модуль характера χ_k. Поэтому

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} S_k' \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T} \int\limits_1^{T} \Big| \sum_{m\leqslant 2q_k(|t|+1)} \chi_k(m) m^{-\sigma-it} - L_Q(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})\Big|^2 dt.$$

Пусть $L_Q(s, \chi_k, \overline{0}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s}$. В силу абсолютной сходимости ряда Дирихле для $L_Q(s, \chi, \overline{0})$ в области $\operatorname{Re} s > 0$ далее заключаем, что

(7) $$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} S_k' \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T} \int\limits_1^{T} \Big| \sum_{m\leqslant 2q_k(|t|+1)} \frac{\chi_k(m) - b_m}{m^{\sigma+it}}\Big|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int\limits_1^{T} \Big| \sum_{m\leqslant 2q_k(|t|+1)} \frac{\chi_k(m) - b_m}{m^{\sigma+it}}\Big|^2 dt.$$

Оценим какое-нибудь слагаемое в (7). Имеем, обозначая $\chi_k(m) - b_m = c_m$,

$$\frac{1}{T} \int\limits_1^{T} \Big| \sum_{m\leqslant 2q_k(|t|+1)} \frac{\chi_k(m) - b_m}{m^{\sigma+it}}\Big|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m_1\leqslant 2q_k(T+1)} \sum_{m_2\leqslant 2q_k(T+1)} c_{m_1} c_{m_2} m_1^{-\sigma} m_2^{-\sigma} \int\limits_{\max(m_1,m_2)}^{T} \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{it} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m\leqslant 2q(T+1)} \frac{|c_m|^2}{m^{2\sigma}} + \frac{1}{T} \sum\sum_{0<m_1<m_2<2q_k(T+1)} \frac{c_{m_1} c_{m_2}}{(m_1 m_2)^{\sigma}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{m_2}{m_1}}.$$

Вследствие определения c_m и оценки из леммы 9 имеем

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} S'_k \leqslant n\left(\sum_{m>z} \frac{1}{m^{2\sigma}}\right).$$

Следовательно существует $z_0 = z_0(y)$ такое, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} S_1 \leqslant \operatorname{mes} K \cdot \varepsilon^2 \tag{8}$$

если $z > z_0$. Возьмем такое z_0. Вследствие выбора y, z_0, определения S, S_1 и S_2, из (6) и (8) получаем

$$S \leqslant \operatorname{mes} K \cdot 5\varepsilon^2$$

если только $T > T_0(y, z)$, $z > z_0$; т.е.

$$\int_1^{T(\Delta)} \sum_{k=1}^{n} |L(\sigma+it, \chi_k) - L_M(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})|^2 dt \leqslant T \cdot \operatorname{mes} K \cdot 5\varepsilon^2. \tag{9}$$

В силу леммы 1 мера множества Y тех $t \in (1, T)$, по которому производится интегрирование в (9), при T достаточно большом будет больше, чем $\frac{1}{2}T \operatorname{mes} K$. Из определения $\int^{(\Delta)}$ все точки Y лежат в квазипрогрессии A. Поэтому найдется $Z \subset Y$, $\operatorname{mes} Z > \frac{1}{4}\operatorname{mes} K \cdot T$, для которого подинтегральное выражение в (9) меньше, чем $25\varepsilon^2$. В точках Z для $k = 1, 2, \ldots, n$ будет выполняться

$$|L(\sigma+it, \chi_k) - L_M(\sigma+it, \chi_k, \overline{0})| < 5\varepsilon. \tag{10}$$

В силу определения $\int^{(\Delta)} \ldots dt$ следует, что в точках $t \in Z$ будет выполняться

$$|L(\sigma+it, \chi_k) - a_k| < 7\varepsilon.$$

В силу произвольности ε теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Можно считать, что F_m не равна нулю тождественно. Поэтому найдется ограниченная окрестность U точки $\overline{z} \in C^n$ такая, что

$$|F_m(\overline{z}_1)| > \delta > 0$$

для всех $\overline{z}_1 \in U$.

В силу теоремы существует последовательность

$$t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots \to \infty$$

такая, что

$$\big(L(\sigma+it_r, \chi_1), L(\sigma+it_r, \chi_2), \ldots, L(\sigma+it_r, \chi_n)\big) \in U.$$

Отсюда с необходимостью F_m равна нулю тождественно. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. Если K — квадратичное поле, то $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s, \chi)$, причем различным полям соответствуют различные характеры χ (см. [1], стр. 390). Поэтому следствие 2 следует из теоремы.

Доказательство следствия 3. Имеем

$$\zeta_{K_l}(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi),$$

где произведение берется по всем примитивным характерам по всем модулям d, являющимися делителями D_l (см. [1], стр. 327). Поскольку в каждое произведение будет входить примитивный действительный характер по $\operatorname{mod} D_l$ то следствие 3 следует из теоремы.

Доказательство следствия 4. Проводится так же как и доказательство следствия 1 с точностью до обозначений.

Литература

[1] З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Москва 1972.

[2] С. М. Воронин, *О распределении ненулевых значений ζ-функции Римана*, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР 128 (1972), стр. 131–150.

[3] — *О дифференциальной независимости ζ-функций*, Докл. АН СССР 209 (6) (1973), стр. 1264–1266.

[4] Г. Давенпорт, *Мультипликативная теория чисел*, Москва 1971.

[5] А. Г. Постников, *О дифференциальной независимости рядов Дирихле*, Докл. АН СССР 66 (4) (1949), стр. 561–564.

[6] — *Обобщение одной из задач Гильберта*, Докл. АН СССР 107 (4) (1956), стр. 512–515.

[7] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Москва 1967.

[8] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. Reine Angew. Math. 143 (1913), стр. 128–175; 144 (1914), стр. 1–40; 146 (1916), стр. 1–52.

[9] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Поступило 22. 12. 1973 (505)