ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

Вертикальное распределение нулей дзета-функции и расширенная гипотеза Римана

В. Г. Спринджук (Минск)

Светлой памяти
Юрия Владимировича Линника

1. Введение. Ю. В. Линник [1] заметил, что между ζ-функцией и L-рядами существует определенная связь, позволяющая устанавливать многие свойства L-рядов на основе определенных свойств ζ-функции, в частности, вывести функциональное уравнение для L-функций из функционального уравнения для ζ-функции. Он получил также следующую формулу, содержащую (в неявном виде) результат приводимой нами теоремы 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-n/N} =$$
$$= \frac{-\varepsilon(\chi)}{\sqrt{m}}\sum_{\varrho}\Gamma(\varrho)\sum_{k=0}^{m-1}\bar{\chi}(-k)\left(\frac{1}{N}+2\pi i\frac{k}{N}\right)^{-\varrho}+O(\ln^2 N),$$

где $\chi = \chi(n)$ — примитивный характер модуля $n > 1$, $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $N > 0$ и ϱ пробегает все нетривиальные нули ζ-функции.

Идея работы Линника [1] состоит в изучении связи между рядом Дирихле

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > k_0,$$

и получаемым из него „действием оператора χ" аналогом L-ряда

$$A_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$$

за счет перехода к „композиционному" ряду

$$f(z; s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} e^{-nz}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Изучая поведение $f(z;s)$ при z вблизи мнимой оси, можно составить представление, в частности, о функции $A_\chi(s)$, в то время как $f(z;s)$ выражается через $A(s)$ с помощью простого интегрального оператора:

$$f(z;s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}A(s+w)\Gamma(w)z^{-w}dw,$$

где k выбрано так, чтобы ряд $A(s+w)$ абсолютно сходился. Смещая прямую интегрирования влево и учитывая вычеты подинтегральной функции, можно выделить „главную часть" $f(z;s)$. Однако если $|A(s+w)|$ достаточно быстро возрастает при смещении прямой интегрирования влево, то получить удовлетворительное приближение к мнимой оси на комплексной z-плоскости таким путем нельзя, так как приходится ввести ограничение $|\arg z|\leqslant\pi/2-\delta$ с некоторым $\delta>0$. В этой статье мы показываем, как можно преодолеть такую трудность (теорема 1).

Пусть $\delta(s)$ — целая или мероморфная с единственным простым полюсом в точке $s=1$ функция, удовлетворяющая условиям:

1° $\delta(s)=O(1)$, $\sigma>c_1$, и разлагается в ряд Дирихле,

2° $\delta(s)=O(e^{(\pi/2-\varepsilon)|t|})$, $\sigma>c_2$ $(0<\varepsilon<\pi/2)$, $|t|\geqslant 1$,

3° $\delta(s)=O(|s|^{|\sigma|+c_3}e^{-\lambda_1|\sigma|+\lambda(s)|t|})$, $\sigma\leqslant c_2$, $s\geqslant 2$,

где абсолютные постоянные $c_1>1$, $c_2>0$, $c_3>0$, $\lambda_1>1+\ln\pi+\ln(1+\xi)$, $\xi=0{,}7303722\ldots$ — корень уравнения

$$e^{-\xi\,\mathrm{arctg}\,\xi}=\mathrm{arctg}\,\xi,$$

$$\lambda(s)=\begin{cases}\pi/2 & \text{при } |\arg(-s)|<\lambda_2,\\ \pi/2-\lambda_2 & \text{при } |\arg(-s)|\geqslant\lambda_2,\qquad \lambda_2=\mathrm{arctg}\,\xi.\end{cases}$$

Класс всех таких функций обозначим Δ. Ясно, что Δ содержит все конечные ряды Дирихле, но есть и нетривиальные примеры функций $\delta(s)$. Из функционального уравнения для ζ-функции следует при $\sigma>0$:

$$|\zeta(-s)|=O\big((2\pi e)^{-\sigma}|s|^{\sigma+1/2}e^{(\pi/2-|\arg s|)|t|}\big),$$

так что выполняется условие 3°, в то время как условия 1° и 2° выполняются с очевидностью. Поэтому $\zeta(s)\in\Delta$.

Пусть

$$a(s)=\delta(s)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}\qquad(\sigma\geqslant c_1). \tag{1}$$

Положим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{-nz},\qquad \mathrm{Re}\,z>0, \tag{2}$$

где $z=x+iy$ — комплексная переменная, x — положительное вещественное число, y —, как правило, также вещественное, но иногда, специально оговаривая это, мы рассматриваем y как независимую комплексную переменную.

Теорема 1. *Пусть* $\delta(s)\in\Delta$,

$$\delta(s)=\frac{\delta_{-1}}{s-1}+\delta_0+\ldots$$

в окрестности $s=1$, *и пусть существует такое* η, $0<\eta<\infty$, *что при* $\tau\to+0$

$$\sum_{\varrho}|\delta(\varrho)|e^{-\tau|\varrho|}=O(\tau^{-\eta}), \tag{3}$$

где суммирование ведется по всем нетривиальным нулям ϱ *функции* $\zeta(s)$. *Тогда для* $f(z)$, *определенной через* (1), (2), *имеем*

$$f(z)=-\frac{\delta_{-1}(\ln z-2\gamma)+\delta_0}{z}+\sum_{\varrho}z^{-\varrho}\Gamma(\varrho)\delta(\varrho)+O\left(\ln^2\frac{1}{\mathrm{Re}\,z}\right), \tag{4}$$

где γ — *постоянная Эйлера,* ϱ *пробегает все нетривиальные нули* $\zeta(s)$, *и оценка остатка равномерна по* $\mathrm{Im}\,z$ *в полосе* $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant\pi$.

Теорема 2. *Пусть* $m>1$ — *произвольное натуральное число,* χ — *неглавный характер* $\mathrm{mod}\,m$, $\delta(s)\in\Delta$ *и удовлетворяет* (3). *Если верна гипотеза Римана о нулях* $\zeta(s)$, *то все нули функции* $L(s,\chi)$, *лежащие в полуплоскости* $\sigma>\max(\frac12,\eta)$, *являются также нулями* $\delta_\chi(s)$.

Теорема 3. *Если верна гипотеза Римана о нулях* $\zeta(s)$, *то расширенная гипотеза эквивалентна соотношениям*

$$\sum_{\gamma}|\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-\frac{\pi}{2}|\gamma|}\left(x+2\pi i\frac{l}{m}\right)^{-\frac12-i\gamma}=\frac{-\mu(m)}{\sqrt{2\pi}\varphi(m)}x^{-1}+O(x^{-\frac12-\varepsilon})$$

при $x\to+0$ *для всех целых* $m>1$ *и для всех* l *из системы абсолютно наименьших вычетов* $\mathrm{mod}\,m$, $(l,m)=1$, *где суммирование ведется по мнимым частям* γ *всех нетривиальных нулей* $\zeta(s)$, $\mu(m)$ — *функция Мёбиуса,* $\varphi(m)$ — *функция Эйлера,* $\varepsilon>0$ — *произвольно.*

Обе последние теоремы следуют из теоремы 1. Теорема 3 показывает в достаточно явном виде, что нужно относительно ординат нулей ζ-функции (при условии, что все абсциссы равны $\frac12$), чтобы была верна расширенная гипотеза Римана для всех модулей и всех характеров, в то время как теорема 2 наводит на „странные” рассуждения (см. раздел „Заключение”).

2. Доказательство теоремы 1. Мы будем использовать известную информацию о распределении нулей ζ-функции в критической полосе [2]. В частности, полагая

$$g(t) = \frac{1}{N\ln(|t|+3)}, \quad N > N_0 \geqslant 1, \tag{5}$$

где N — вещественный параметр, мы найдем, что в области $\{0 < \sigma \leqslant \leqslant g(t),\ -\infty < t < \infty\}$ $\zeta(s)$ не имеет нулей, а в области $\{1-g(t) < \sigma < 1,\ -\infty < t < \infty\}$ кроме того удовлетворяет оценке

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\big(\ln(|t|+2)\big).$$

Из функционального уравнения для $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ и асимптотической формулы

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s + O(|s|^{-1}),$$

верной для всех s с условием $|\arg s| \leqslant \pi - \delta$ (δ — любое фиксированное число интеграла $0 < \delta < \pi$) следует при любом $k = 0, 1, \ldots$

$$\frac{\zeta'(s-k)}{\zeta(s-k)} = \begin{cases} O(N), & \text{если} \quad |t| \leqslant 1, \\ O(\ln|s-k|), & \text{если} \quad |t| > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Мы находим из (2):

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-n(x+iy)} = \tag{7}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iyn)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{k!} \varphi_k(x),$$

где

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) n^k e^{-nx}.$$

Из (1) находим

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_k - i\infty}^{\sigma_k + i\infty} x^{-s} a(s-k) \Gamma(s)\, ds, \tag{8}$$

где можно считать $\sigma_k = k + c_1 + 1$. Следующий шаг в рассуждении — смещение прямой интегрирования в (8) до кривой L, определяемой уравнением (5) с $N = \ln(1/x)$, и учет вычетов подинтегрального выражения в (8). Чтобы несколько упростить дальнейшее изложение, мы будем считать, что $\delta(s)$ — целая функция, а в конце рассмотрим те изменения, которые нужно сделать, чтобы охватить случай мероморфной $\delta(s)$.

Подинтегральное выражение в (8) имеет простые полюсы в точках $s = k+1,\ k+\varrho,\ k-2r$, где ϱ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$, $r = 1, 2, \ldots$ Следовательно, смещая контур интегрирования, как указано выше (это можно сделать в силу ограничений 1° и 3° на $\delta(s)$) находим

$$\varphi_k(x) = -x^{-k-1}\delta(1)\Gamma(k+1) + \Sigma_k + S_k + I_k,$$

$$\Sigma_k = \sum_{\varrho} x^{-k-\varrho}\delta(\varrho)\Gamma(k+\varrho),$$

$$S_k = \sum_{1 \leqslant r < k/2} x^{-k+2r}\delta(-2r)\Gamma(k-2r),$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi i}\int_L x^{-s} a(s-k)\Gamma(s)\, ds.$$

Чтобы иметь возможность использовать эти выражения для подстановки в (7), мы должны рассмотреть поведение функций, определяемых рядами

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{k!} x^{-k-1}\delta(1)\Gamma(k+1), \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{k!} \Sigma_k, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{k!} S_k, \tag{11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{k!} I_k. \tag{12}$$

Ряд (9) при $|y| < x$ легко суммируется и дает

$$x^{-1}\delta(1)\sum_{k=0}^{\infty}(-iy/x)^k = \frac{\delta(1)}{z}. \tag{13}$$

При $|y| < \frac{1}{2}x$ мы сможем поменять порядок суммирования в двойном ряде (10) и получим для его суммы выражение

$$\sum_{\varrho} x^{-\varrho}\delta(\varrho)\Gamma(\varrho). \tag{14}$$

Относительно рядов (11) и (12) мы найдем, что для комплексных y из некоторой области Ω, содержащей интервал $|y| \leqslant \pi$ вещественной оси, определяемые ими функции регулярны и для вещественных y из интервала $|y| \leqslant \pi$ удовлетворяют оценкам $O\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ и $O\left(\ln^2\frac{1}{x}\right)$ соответственно. Рассматривая (13) и (14) как функции комплексной переменной y (при фиксированном $x > 0$), мы с очевидностью найдем, что они аналитически продолжимы на область Ω. Этим оправдываются сделанные преобразования, и мы получаем (4).

Переходя к (10), заметим, что по формуле Стирлинга при s с ограничением $|\arg s| \leqslant \pi - \delta$ имеем

$$\Gamma(s) = e^{(s-\frac{1}{2})\ln s - s}\sqrt{2\pi}\left(1+O(|s|^{-1})\right).$$

Поэтому

$$|\Gamma(s)| = |s|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\sigma - t\arg s}\sqrt{2\pi}\left(1+O(|s|^{-1})\right).$$

Полагая $\varrho = \beta + i\gamma$, находим

$$|\Gamma(\varrho)| = |\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-\beta-\frac{\pi}{2}|\gamma|}\sqrt{2\pi}\left(1+O(|\gamma|^{-1})\right). \tag{15}$$

При $k = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\frac{|\Gamma(k+\varrho)|}{\Gamma(k+1)} \leqslant \left|1+\frac{\varrho}{k}\right|^{k+1/2} e^{-\gamma\arg(k+\varrho)}. \tag{16}$$

Из (3) и (15) следует

$$\sum_{\varrho}|\delta(\varrho)\Gamma(\varrho)| \ll \sum_{\varrho}|\delta(\varrho)|\,|\gamma|^{1/2}e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma|} \ll 1,$$

а при $k = 1, 2, \ldots$ из (16) получаем

$$\frac{1}{k!}\sum_{\varrho}|\delta(\varrho)\Gamma(k+\varrho)| \ll \sum_{\varrho}|\delta(\varrho)|\left|1+\frac{\varrho}{k}\right|^{k+1/2}e^{-\gamma\arg(k+\varrho)} = \tag{17}$$

$$= \sum_{|\varrho|\leqslant k} + \sum_{|\varrho|>k}. \tag{18}$$

Первая сумма не превосходит

$$\sum_{|\varrho|\leqslant k}|\delta(\varrho)|2^{k+\frac{1}{2}}e^{-|\gamma|\operatorname{arctg}\frac{\gamma_0}{k+\beta_0}},$$

где $\beta_0 + i\gamma_0$ — нуль $\zeta(s)$, лежащий в верхней полуплоскости и имеющий наименьший аргумент. В силу (3) эта сумма оценивается величиной

$$O\left(2^k\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma_0}{k+\beta_0}\right)^{-\eta}\right) = O(2^k k^\eta). \tag{19}$$

Вторая сумма (18) не превосходит

$$\sum_{|\varrho|>k}|\delta(\varrho)|k^{-k-\frac{1}{2}}(2|\varrho|)^{k+\frac{1}{2}}e^{-\gamma\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\beta+|\gamma|}} \leqslant (2/k)^{k+\frac{1}{2}}\sum_{|\varrho|>k}|\delta(\varrho)|\,|\varrho|^{k+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}|\gamma|} \leqslant$$

$$\leqslant (2/k)^{k+\frac{1}{2}}\sum_{|\varrho|>k}|\delta(\varrho)|\frac{|\varrho|^{k+\frac{1}{2}}}{e^{|\varrho|\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)}}e^{-\tau|\gamma|},$$

где $0 < \tau < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{e}$. Так как функция

$$u^{k+\frac{1}{2}}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)u} \qquad (u > 0)$$

(при фиксированном τ) достигает максимума в точке $u = (k+\frac{1}{2})\times \times\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)^{-1}$, то последняя сумма оценивается величиной

$$\left[(k+\tfrac{1}{2})\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)^{-1}e^{-1}\right]^{k+1/2}\sum_{\varrho}|\delta(\varrho)|e^{-\tau|\gamma|},$$

и в силу (3), (18), (19) для суммы (17) получаем оценку

$$O(2^k k^\eta) + O\left(\left(\frac{2}{\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)e}\right)^k\right).$$

Так как $\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)e > 1$, то мы видим, что двойной ряд (10) абсолютно сходится при $|y| < \frac{1}{2}x$. Следовательно, при этом условии мы можем поменять порядок суммирования, что дает

$$\sum_{\varrho}x^{-\varrho}\delta(\varrho)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iy/x)^k}{k!}\Gamma(k+\varrho).$$

В силу интегрального представления $\Gamma(k+\varrho)$ внутренняя сумма легко преобразуется в

$$\Gamma(\varrho)\left(1+\frac{iy}{x}\right)^{-\varrho}$$

и (10) принимает вид (14).

Рассмотрим теперь сумму (11). Вначале заметим, что представляющий ее ряд

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-iy)^k}{k!}\sum_{1\leqslant r<k/2}\delta(-2r)x^{-k+2r}\Gamma(k-2r) \tag{20}$$

мажорируется абсолютно сходящимся рядом

$$\sum_{2\leqslant 2r<k<\infty}\frac{|y|^k}{k!}|\delta(-2r)|x^{-k+2r}\Gamma(k-2r), \tag{21}$$

если $|y|<x<e^{\lambda_1-1}$. Действительно, в силу условия 3° на $\delta(s)$ имеем

$$\delta(-2r)=O\big((2r)^{2r+c_3}e^{-2\lambda_1 r}\big), \tag{22}$$

и так как при $k\geqslant 3$

$$\frac{\Gamma(k-2r)}{k!}<\frac{1}{(2r)!},$$

то видим, что ряд (21) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}(|y|/x)^k(xe^{-\lambda_1+1})^r r^{c_3+1/2}.$$

Следовательно, можно записать (20) в виде

$$S(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\delta(-2r)x^{2r}\sum_{k=2r+1}^{\infty}\left(\frac{-iy}{x}\right)^k\frac{\Gamma(k-2r)}{k!}. \tag{23}$$

Внутренняя сумма имеет вид

$$\psi_r(u)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{u^{l+2r}}{l(l+1)\ldots(l+2r)},\qquad |u|<1.$$

Пользуясь равенством

$$\frac{1}{(2r)!}\int_0^1 t^{l-1}(1-t)^{2r}\,dt=\frac{1}{l(l+1)\ldots(l+2r)},$$

находим

$$\psi_r(u)=\frac{u^{2r+1}}{(2r)!}\int_0^1\frac{(1-t)^{2r}}{1-ut}\,dt.$$

Это интегральное представление дает аналитическое продолжение $\psi_r(u)$ на все чисто мнимые значения u за пределами единичного круга. Если $|\mathrm{Re}\,u|\leqslant\frac{1}{2}$, то при вещественных t из интервала $(0,1)$

$$|1-tu|=\sqrt{(1-t\,\mathrm{Re}\,u)^2+t^2(\mathrm{Im}\,u)^2}\geqslant\max(\tfrac{1}{2},t|\mathrm{Im}\,u|),$$

и для таких u получаем

$$|\psi_r(u)|\leqslant\frac{|u|^{2r+1}}{(2r)!}\int_0^1\frac{dt}{\max(\frac{1}{2},t|\mathrm{Im}\,u|)}.$$

Интеграл не превосходит 2, если $|\mathrm{Im}\,u|\leqslant\frac{1}{2}$, и не превосходит $(1+\ln|2\,\mathrm{Im}\,u|)|2\,\mathrm{Im}\,u|^{-1}$, если $|\mathrm{Im}\,u|>\frac{1}{2}$.

Возвращаясь к (23), мы видим, что при $|y|<x<e^{\lambda_1-1}$

$$S(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\delta(-2r)x^{2r}\psi_r\left(\frac{-iy}{x}\right), \tag{24}$$

причем этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{r=1}^{\infty}|\delta(-2r)|\frac{|y|^{2r}}{(2r)!}d(x,y), \tag{25}$$

если $|\mathrm{Re}(-iy/x)|\leqslant\frac{1}{2}$ и где

$$d(x,y)=\begin{cases}|y|/x & \text{при}\quad |y|\leqslant x,\\ 1+\ln(|y|/x) & \text{при}\quad |y|>x.\end{cases}$$

В силу (22) ряд (25) сходится в круге $|y|<e^{\lambda_1-1}$, и так как $\lambda_1>1+\ln\pi$, то он сходится в круге $|y|\leqslant\pi$, и его сумма равномерно оценивается величиной $O\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ при $x\to+0$. Мы видим, таким образом, что $S(x,y)$ как аналитическая функция от y в силу разложения (24) имеет продолжение на область Ω, представляющую собой пересечение области $|\mathrm{Re}(iy)|\leqslant x/2$ и круга $|y|\leqslant\pi$, причем в этой области

$$S(x,y)=O\left(\ln\frac{1}{x}\right) \tag{26}$$

при $x\to+0$. Область Ω изменяется вместе с x, но для нас существенно то, что она всегда содержит вещественный интервал $|y|\leqslant\pi$.

Теперь перейдем к сумме (12). Для $s\in L$ при $k=0,1,\ldots$ из условия 3° на $\delta(s)$ и из (6) получаем

$$|a(s-k)|=|\delta(s-k)|\left|\frac{\zeta'(s-k)}{\zeta(s-k)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases}(k+2)^{k+c_3+1}e^{-\lambda_1 k}N, & \text{если}\quad |t|\leqslant 1,\\ (k+1+|t|)^{k+c_3+1}e^{-\lambda_1 k+\lambda(s-k)|t|}, & \text{если}\quad |t|>1.\end{cases}$$

Кроме того, для $s \in L$

$$|\Gamma(s)| \ll \begin{cases} N, & \text{если} \quad |t| \leqslant 1, \\ e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{-1/2}, & \text{если} \quad |t| > 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$(27)\qquad \begin{aligned} |I_k| &\ll e^{-\frac{\ln x}{N\ln 4}} N^2(k+2)^{k+c_3+1}e^{-\lambda_1 k} + e^{-\lambda_1 k}J_{k+1}, \\ J_k &= \int\limits_1^\infty (k+t)^{k+c_3} e^{\lambda(g(t)+it-k)t-\frac{\pi}{2}t}\frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Чтобы оценить интеграл J_k, разобьем интервал интегрирования на две части в соответствии с определением функции $\lambda(s)$: так как

$$|\arg(-g(t)-it+k)| = \operatorname{arctg}\frac{t}{k-g(t)},$$

то рассматриваем отдельно случай $\frac{t}{k-g(t)} < \xi$ и случай $\frac{t}{k-g(t)} \geqslant \xi$. Первый случай дает вклад, не превосходящий величины

$$(28)\qquad \ll \big((1+\xi)k\big)^{k+c_3},$$

а во втором случае вклад не превышает

$$J_k' = \int\limits_{\xi k}^\infty (k+t)^{k+c}e^{-\lambda t}dt, \qquad c = c_3,\ \lambda = \lambda_2.$$

Интегрируя по частям, находим

$$J_k' = \frac{(1+\xi)^{k+c}k^{k+c}}{\lambda}e^{-\lambda\xi k} + \frac{k+c}{\lambda}\,\frac{(1+\xi)^{k+c-1}k^{k+c-1}}{\lambda}e^{-\lambda\xi k} + \ldots + \\ + \frac{(k+c)(k+c-1)\ldots(1+c)}{\lambda^k}\int\limits_{\xi k}^\infty (k+t)^c e^{-\lambda t}dt.$$

Так как последний интеграл не превосходит

$$\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^c \int\limits_0^\infty t^c e^{-\lambda t}dt \ll 1,$$

то получаем

$$J_k' \ll (1+\xi)^k(k+c)^{k+c}e^{-\lambda\xi k}\lambda^{-k}k < (k+c)^{k+c+1}\big((1+\xi)e^{-\lambda\xi}\lambda^{-1}\big)^k.$$

Полагая $N = \ln\frac{1}{x}$, в силу (27), (28) и последней оценки находим

$$|I_k| \ll (k+2)^{k+c_3+1}e^{-\lambda_1 k}\ln^2\frac{1}{x} + \big((1+\xi)k\big)^{k+c_3}e^{-\lambda_1 k} + \\ + (k+c_3)^{k+c_3+1}\big((1+\xi)e^{-\lambda_2\xi}\lambda_2^{-1}\big)^k e^{-\lambda_1 k}.$$

Обращаясь к ряду (12), мы замечаем теперь, что он представляет аналитическую функцию от y в круге $|y| < r$, где

$$r = \min\left(e^{\lambda_1-1}, \frac{e^{\lambda_1-1}}{1+\xi}, \frac{e^{\lambda_1-1+\lambda_2\xi}\lambda_2}{1+\xi}\right),$$

и в силу определения $\lambda_1, \lambda_2, \xi$ имеем $r > \pi$. Кроме того, сумма ряда (12) при $|y| \leqslant \pi$ оценивается величиной $O\left(\ln^2\frac{1}{x}\right)$, что вместе с оценкой (26) завершает доказательство теоремы для целых $\delta(s)$.

Если $\delta(s)$ имеет простой полюс в точке $s = 1$, то при смещении контура интегрирования в (8) нужно учесть вычет в полюсе второго порядка функции $a(s)$,

$$a(s) = \frac{a_{-2}}{(s-1)^2} + \frac{a_{-1}}{s-1} + \ldots,$$

где $a_{-2} = -\delta_{-1}$, $a_{-1} = \delta_{-1}\gamma - \delta_0$. Легко видеть, что вычет равен

$$x^{-k+1}\big(a_{-1}\Gamma(k+1) - a_{-2}\Gamma(k+1)\ln x + a_{-2}\Gamma'(k+1)\big).$$

Умножая на $(-iy)^k/k!$ суммируя по $k = 0, 1, \ldots$, при $|y| < x$ находим для первого члена

$$a_{-1}x\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{-iy}{x}\right)^k = \frac{a_{-1}}{z},$$

а для второго члена $-a_{-2}\ln x/z$. Третий член дает вклад

$$a_{-2}x\sum_{k=0}^\infty \frac{(-iy/x)^k}{k!}\Gamma'(k+1) \qquad (|y| < x).$$

Имеем

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma, \qquad \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}, \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

что дает при $|u| < 1$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{u^k}{k!}\Gamma'(k+1) = -\frac{\gamma}{1-u} + \frac{\ln(1-u)}{1-u}.$$

Поэтому общий вклад, получаемый за счет полюса $\delta(s)$, равен

$$\frac{a_{-1}-\gamma a_{-2}}{z} + a_{-2}\frac{\ln z}{z},$$

чем завершается доказательство теоремы.

3. Доказательство теоремы 2. Если в равенстве (4) сумму по ϱ оценить абсолютно, то в силу (15) мы найдем, что она

$$\ll \sum_{\varrho} |\delta(\varrho)|\,|z|^{-\beta} e^{-\gamma \arg z} |\gamma|^{\beta-1/2} e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma|}.$$

Предполагая, что верна гипотеза Римана, мы найдем в силу (3) для этой суммы оценку

$$\ll |z|^{-1/2}\left(\frac{\pi}{2}-|\arg z|\right)^{-\eta} \ll \begin{cases} x^{-1/2} & \text{при} \quad y=0,\\ x^{-\eta} & \text{при} \quad y\neq 0,\end{cases}$$

так как

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y + O\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (y\neq 0)$$

(символ $\ll$ в последней оценке зависит от y).

Из (2) и (4) находим теперь при любых целых $m>1$ и a:

$$\sum_{n\equiv a (\operatorname{mod} m)} a(n) e^{-nx} = \frac{1}{m}\sum_{k (\operatorname{mod} m)} f\left(x+2\pi i\frac{k}{m}\right) e^{2\pi i \frac{ak}{m}} =$$
$$= \frac{2\gamma\delta_{-1}-\delta_0}{mx} - \frac{\delta_{-1}\ln x}{mx} + O(x^{-\max(1/2,\,\eta)}),$$

где k пробегает полную систему абсолютно наименьших вычетов $\operatorname{mod} m$, $0<x<1/2$. Следовательно, если χ — неглавный характер $\operatorname{mod} m$, то

$$f_\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a(n) e^{-nx} = O(x^{-\max(1/2,\,\eta)}). \tag{29}$$

Так как из (1) следует

$$\delta_\chi(s)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)a(n)n^{-s} \qquad (\sigma\geqslant c_1),$$

то по формуле Меллина

$$\delta_\chi(s)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty f_\chi(x)x^{s-1}dx.$$

В силу (29) мы видим, что интеграл представляет регулярную при $\sigma>\max(\frac{1}{2},\eta)$ функцию. Это значит, что все нули функции $L(s,\chi)$, лежащие в полуплоскости $\sigma>\max(\frac{1}{2},\eta)$ являются нулями $\delta_\chi(s)$, что и утверждает теорема.

4. Доказательство теоремы 3. При $\delta(s)=1$ из (4) находим

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{\varrho} z^{-\varrho}\Gamma(\varrho) + O\left(\ln^2\frac{1}{x}\right). \tag{30}$$

Считая, что $\beta=\frac{1}{2}$ (гипотеза Римана), находим

$$z^{-\varrho} = z^{-1/2}|z|^{-i\gamma}e^{\gamma\arg z},$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\gamma) = |\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-\frac{\pi}{2}|\gamma|}\sqrt{2\pi}\left(1+O(|\gamma|^{-1})\right).$$

Поэтому сумма по ϱ есть

$$\sqrt{2\pi}\sum_{\gamma}|z|^{-1/2-i\gamma}|\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-|\gamma|\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sgn}\gamma\arg z\right)} + O\left(|z|^{-1/2}\sum_{\gamma}\frac{1}{|\gamma|}e^{-|\gamma|\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sgn}\gamma\arg z\right)}\right).$$

Чтобы упростить остаток, оценим сумму

$$S = \sum_{\gamma>0}\frac{1}{\gamma}e^{-\tau\gamma} \qquad (0<\tau<1/2).$$

Полагая

$$N(x) = \sum_{0<\gamma\leqslant x} 1 \qquad (x>0),$$

находим

$$S = \int_1^\infty \frac{1}{x}e^{-\tau x}dN(x) = \int_1^\infty N(x)\frac{\tau x e^{-\tau x}+e^{-\tau x}}{x^2}\,dx.$$

Так как $N(x)\sim\frac{1}{2\pi}x\ln x$ $(x\to\infty)$, то

$$S \sim \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \ln x\, d(-e^{-\tau x}) + \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty\frac{\ln x}{x}e^{-\tau x}dx = O\left(\ln^2\frac{1}{\tau}\right).$$

Таким образом, получаем из (30)

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \sqrt{2\pi}\sum_{\gamma}|\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-\frac{\pi}{2}|\gamma|}z^{-1/2-i\gamma} +$$
$$+O\left(|z|^{-1/2}\ln^2\frac{1}{\tau}\right) + O\left(\ln^2\frac{1}{x}\right), \tag{31}$$

где $\tau=\pi/2-|\arg z|$. При $x\to+0$ остаток есть $O(x^{-1/2})$, если $y=0$, и $O\left(\ln^2\frac{1}{x}\right)$, если $y\neq 0$. Так как

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-nz}, \tag{32}$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, то для целых $m>1$ и a находим

$$T_{m,a} = -\sum_{n\equiv a(\operatorname{mod} m)}\Lambda(n)e^{-nx} = \frac{1}{m}\sum_{k(\operatorname{mod} m)} f\left(x+2\pi i\frac{k}{m}\right)e^{2\pi i\frac{nk}{m}},$$

где k пробегает полную систему абсолютно наименьших вычетов $\mathrm{mod}\ m$. В силу (31)

$$T_{m,a} = -\frac{1}{mx} + \sqrt{2\pi}\sum_{\gamma}|\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-\frac{\pi}{2}|\gamma|}S_{m,a}(x,\gamma)+O(x^{-1/2}),$$

$$S_{m,a}(x,\gamma) = \frac{1}{m}\sum_{k(\mathrm{mod}\,m)}\left(x+2\pi i\frac{k}{m}\right)^{-1/2-i\gamma}e^{2\pi i\frac{ak}{m}}. \tag{33}$$

Если $(a,m)\neq 1$, то $T_{m,a} = O\left(\ln\frac{1}{x}\right)$, а в случае $(a,m)=1$ соотношения

$$T_{m,a} = -\frac{1}{\varphi(m)x}+O(x^{-1/2-\varepsilon})$$

равносильны отсутствию нулей в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ у всех функций $L(s,\chi)$ с характерами χ модуля m.

Следовательно, расширенная гипотеза равносильна соотношениям

$$U_{m,a}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{mx}+O(x^{-1/2-\varepsilon}) & \text{при} \quad (a,m)\neq 1, \\ \left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{\varphi(m)}\right)\dfrac{1}{x}+O(x^{-1/2-\varepsilon}) & \text{при} \quad (a,m)=1, \end{cases} \tag{34}$$

где

$$U_{m,a} = \sqrt{2\pi}\sum_{\gamma}|\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-\frac{\pi}{2}|\gamma|}S_{m,a}(x,\gamma).$$

Положим для целого l из системы абсолютно наименьших вычетов $\mathrm{mod}\,m$, $(l,m)=1$,

$$V_{m,l} = \sqrt{2\pi}\sum_{\gamma}|\gamma|^{i\gamma}e^{-i\gamma-\frac{\pi}{2}|\gamma|}\left(x+2\pi i\frac{l}{m}\right)^{-1/2-i\gamma}.$$

Так как из (32) следует

$$\left(x+2\pi i\frac{l}{m}\right)^{-1/2-i\gamma} = \sum_{a(\mathrm{mod}\,m)}S_{m,a}e^{-2\pi i\frac{al}{m}},$$

то имеем

$$V_{m,l} = \sum_{a(\mathrm{mod}\,m)}U_{m,a}e^{-2\pi i\frac{al}{m}}. \tag{35}$$

Если принять соотношения (34), то получаем

$$V_{m,l} = \frac{1}{mx}\sum_{\substack{a(\mathrm{mod}\,m)\\(a,m)\neq 1}}e^{-2\pi i\frac{al}{m}}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\varphi(m)}\right)\frac{1}{x}\sum_{\substack{a(\mathrm{mod}\,m)\\(a,m)=1}}e^{-2\pi i\frac{al}{m}}+O(x^{-1/2-\varepsilon}) =$$
$$= -\frac{\mu(m)}{\varphi(m)x}+O(x^{-1/2-\varepsilon}).$$

В силу (35) это равносильно (34), чем завершается доказательство теоремы.

5. Заключение. В связи с теоремой 2 возникает вопрос: насколько широк класс тех функций $\delta(s)\in\Delta$, для которых выполняется (3) с $\eta<1$. Если этот класс достаточно широк, то должен быть достаточно широк класс функций $\delta_{\chi}(s)$ и, вероятно, найдутся две функции $\delta_{\chi}^{(1)}(s)$ и $\delta_{\chi}^{(2)}(s)$, не имеющие общих нулей в полуплоскости $\sigma>\frac{1}{2}$. Но тогда, в силу теоремы 2, $L(s,\chi)$ не будет иметь нулей при $\sigma>\max(\frac{1}{2},\eta)$.

Трудно ожидать, что класс функций $\delta(s)\in\Delta$, принимающих „малые" значения в нулях $\zeta(s)$, не содержит функций, существенно отличных от $\zeta(s)$: отрицание этого утверждения равносильно признанию, что $\zeta(s)$ определяется столь грубыми свойствами, как условия 1°, 2° 3° и (3) с $\eta<1$. Следовательно, приведенное выше рассуждение кажется правдоподобным. Его детальная реализация требует глубокого проникновения в конструктивную теорию функций, представимых рядами Дирихле (или, может быть, создания такой теории).

Реальная ценность разложений типа (4) может проявиться в полной мере при решении бинарных аддитивных задач, например, задачи о простых близнецах, о простых вида n^2+1, и т.п. Действительно, в задаче о близнецах получаем:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\Lambda(n+2)e^{-2(n+1)x} = \int_{-1/2}^{1/2}f(x+2\pi iy)f(x-2\pi iy)e^{-4\pi iy}\,dy,$$

где $f(x+2\pi iy)$ определяется по (32). В силу (30) интеграл выражается двойным рядом по нулям ϱ,ϱ' ζ-функции через $\Gamma(\varrho)$, $\Gamma(\varrho')$, интегралы вида

$$\int_{-1/2}^{1/2}(x+2\pi iy)^{-\varrho}(x-2\pi iy)^{-\varrho'}e^{-4\pi iy}\,dy$$

и аналогичные более простые интегралы. Доказав таким путем, что $T(x)\gg x^{-\delta}$ при $x\to+0$, мы найдем, что существует бесконечное число простых чисел p, q и целых $u > 0$, $v > 0$, для которых $p^u - q^v = 2$, причем $\max(u, v) \ll 1$. Из теории диофантовых уравнений следует тогда, что хотя бы одно из чисел u, v равно 1, и мы найдем, что существует бесконечное число простых чисел вида $q^w + 2$ или $q^w - 2$, где q — простое, а w ограничено.

Цитированная литература

[1] Ю. В. Линник, *О выражении L-рядов через ζ-функцию*, Докл. АН СССР 57 (1947), стр. 435–437.
[2] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Поступило 11. 10. 1973 (472)

ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

On shifted primes

by

E. Fogels (Riga)

In memory of Yu. V. Linnik

1. Introduction. Using the extended Riemann hypothesis in 1930 Titchmarsh [15] proved an asymptotic estimate for the sum of the number of divisors $d(p-c_1)$ extended over the shifted primes $p-c_1$ (c_1 an integer constant $\neq 0$). In 1957 Hooley [10] proved an analogous formula (also on the extended Riemann hypothesis) with $d(p-c_1)$ replaced by $r(p-c_1)$, the number of representations of $p-c_1$ as a sum of two squares (which is also the number of integers having the norm $p-c_1$ in the field generated by $\sqrt{-1}$). About 1960 Linnik (see [13]) showed that these results of Titchmarsh and Hooley can be proved without any hypotheses but using his rather complicated method of dispersions. In 1965 Bombieri ([1], Theorem 4) proved a mean value theorem for the function

$$\max_{1\leqslant y\leqslant x}\max_{(k,l)=1}\Big|\sum_{y\geqslant n\equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}\Lambda(n)-y/\varphi(k)\Big|$$

where $\Lambda(n) = \log p$ if $n = p^k$ (p prime, $k = 1, 2, \ldots$), $\Lambda(n) = 0$ otherwise and $\varphi(k)$ is the number of reduced classes mod k. This theorem has been used since by many authors as a powerful substitute for the extended Riemann hypothesis. We shall mention here merely Elliott and Halberstam [6] who showed that some small changes in Hooley's paper would make his proofs unconditional. In the present paper we shall prove a generalization of this result for a set of primes p^* which are norms of ideals of a fixed class $\mathfrak{K}_1$ in a quadratic field K_1 (of discriminant Δ_1) on the condition that the shifted primes p^*-c_1 are norms of integer ideals $\mathfrak{a}$ belonging to another class $\mathfrak{K}$ (possibly $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$) in the same or another quadratic field K with the discriminant Δ. For the sum

$$\pi(x;\mathfrak{K}) = \pi(x;\mathfrak{K},\mathfrak{K}_1,c_1) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{K},(N\mathfrak{a},\Delta)=1\\ p^*-c_1=N\mathfrak{a}\leqslant x}} 1 \qquad (1)$$