ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

Über die Ramanujan-Entwicklung multiplikativer Funktionen

von

WOLFGANG SCHWARZ (Frankfurt am Main)

1. Einleitung. Es bezeichne

$$c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} d\cdot\mu\left(\frac{q}{d}\right) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i\frac{a}{q}\cdot n\right) \tag{1.1}$$

die Ramanujan-Summe (man vgl. [7]),

$$M(f) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sum_{n\leqslant x} f(n) \tag{1.2}$$

den Mittelwert der zahlentheoretischen Funktion f (*falls* dieser existiert), und

$$\mathscr{F}_0 = \{f\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{C};\ |f|\leqslant 1,\ M(f)\neq 0,\ f\ \textit{multiplikativ}\} \tag{1.3}$$

die Menge der komplexwertigen multiplikativen Funktionen vom Betrage $\leqslant 1$, die einen nichtverschwindenden Mittelwert besitzen.

In einer früheren Arbeit [11] zeigte der Verfasser mit Methoden von G. Halász ([4], [5]), daß *stark multiplikative* Funktionen (¹) aus $\mathscr{F}_0$ eine punktweise konvergente *Ramanujan-Entwicklung*

$$f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q c_q(n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

besitzen. In [8], [9] wurden Ramanujan-Entwicklungen *reellwertiger* Funktionen aus $\mathscr{F}_0$ untersucht, was sich als wesentlich einfacher erwies, da sich diese Entwicklungen als absolutkonvergent herausstellen.

In der vorliegenden Note sollen die Ergebnisse aus [11] auf beliebige Funktionen aus $\mathscr{F}_0$ ausgedehnt werden (Satz 1). Ein nützliches Hilfsmittel hierbei ist ein einfaches Ergebnis (Satz 3) über „benachbarte" multipli-

---

(¹) d.h. es ist $f(n) = \prod_{p|n} f(p)$.

kative Funktionen, das zu einem Ergebnis von Delange analog ist. Schließlich wird (Satz 2) in § 7 die Parseval'sche Gleichung für Funktionen aus $\mathcal{F}_0$ hergeleitet.

2. Ergebnisse. In [9] wurden die „Fourierkoeffizienten"[2] $a_q(f)$ für reellwertige Funktionen $f\in\mathcal{F}_0$ bestimmt; es ist naheliegend, für beliebige $f\in\mathcal{F}_0$ dieselben Fourierkoeffizienten zu erwarten.

Wir definieren zunächst die multiplikative Funktion h: $N\to C$ durch

$$h(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r=1, \\ f(p^r)-f(p)\cdot f(p^{r-1}) & \text{für} \quad r\geqslant 2, \end{cases} \tag{2.1}$$

und setzen zur Abkürzung für Primzahlen p

$$\eta(p) = 1+\sum_{r=2}^{\infty} p^{-r}\cdot h(p^r). \tag{2.2}$$

Bemerkung. Auf Grund eines Satzes von Delange (man vgl. § 4, Lemma 1a) gibt es ein $r\geqslant 1$, so daß $f(2^r)\neq -1$ ist; dies hat zur Folge, daß $\eta(2)\neq 0$ ist; $\eta(p)\neq 0$ für $p>2$ ist offensichtlich.

Dann definieren wir eine multiplikative Funktion $q\to a_q^*$ durch ihre Werte an den Primzahlpotenzen, nämlich

$$\eta(p)\cdot a_{p^r}^* = \frac{1}{\varphi(p^r)}\cdot\sum_{0\leqslant\varrho\leqslant r-1} h(p^\varrho)\cdot\{f(p)\}^{r-(\varrho+1)}\cdot\{f(p)-1\}+\sum_{\varrho\geqslant r} p^{-\varrho}\cdot h(p^\varrho), \tag{2.3}$$

und setzen

$$a_q = M(f)\cdot a_q^*. \tag{2.4}$$

Wir zeigen

Satz 1. *Sei $f\in\mathcal{F}_0$; mit den durch (2.3) und (2.4) definierten Koeffizienten konvergiert die Reihe*[3]

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q\cdot c_q(n) \tag{2.5}$$

für $n=1,2,\ldots$ gegen den Wert $f(n)$.

Satz 2 (Parseval'sche Gleichung). *Für $f\in\mathcal{F}_0$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_q|^2\cdot\varphi(q) = M(|f|^2) \tag{2.6}$$

gegen den Mittelwert von $|f|^2$.

[2] Statt $a_q(f)$ schreiben wir in Zukunft der Kürze halber nur a_q.

[3] Es kann nicht erwartet werden, daß die Konvergenz absolut oder gleichmäßig in n ist.

Folgerung zu Satz 2. *Für $f\in\mathcal{F}_0$, $g\in\mathcal{F}_0$ gilt*[4]

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q(f)\cdot\overline{a_q(g)}\cdot\varphi(q) = M(f\cdot\bar{g}). \tag{2.6'}$$

3. Benachbarte multiplikative Funktionen. Wir nennen zwei multiplikative Funktionen f, g *benachbart*, wenn die über die Primzahlen erstreckte Summe

$$\sum_p p^{-1}\cdot|f(p)-g(p)| < \infty \tag{3.1}$$

konvergiert.

H. Delange [1] zeigte: *Sind die multiplikativen Funktionen f, g benachbart, sind beide vom Betrage $\leqslant 1$, existiert der Mittelwert $M(g)$ und ist*

$$f(2^r) = g(2^r) \quad \textit{für alle } r\geqslant 1, \textit{ falls } g(2^r) = -(-1)^r g(2)^r \quad \textit{für alle } r\geqslant 2 \textit{ und } |g(2)|=1 \textit{ gilt},$$

so existiert auch $M(f)$.

Die Voraussetzungen dieses Satzes lassen sich abschwächen (man vgl. [10]).

Der Satz von Delange legt folgendes Ergebnis nahe.

Satz 3. *Es seien f und g benachbarte multiplikative Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

Mit Konstanten $c_1>0$, $0<c_2<2$, $c_3>0$, $c_4>0$, $\delta>0$ gilt:

$$|f(p^r)|+|g(p^r)|\leqslant c_1\cdot c_2^r, \quad \textit{für} \quad r=2,3,\ldots; \tag{3.2a}$$

$$\sum_{p\leqslant x}\{|f(p)|+|g(p)|\}\leqslant c_3\cdot x; \tag{3.2b}$$

$$|f(p)|+|g(p)|\leqslant c_4\cdot p^{\frac{1}{2}-\delta}; \tag{3.2c}$$

weiterhin sei

$$1+\frac{g(p)}{p^s}+\frac{g(p^2)}{p^{2s}}+\ldots\neq 0 \quad \textit{in} \quad \mathrm{Re}\, s\geqslant 1. \tag{3.2d}$$

Wenn dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\cdot g(n) = \gamma \tag{3.3}$$

[4] Bemerkung. Ist $M(f)\neq 0$ und $M(\bar{g})\neq 0$, so existiert der Mittelwert $M(f\cdot\bar{g})$ auf Grund eines Ergebnisses von H. Delange [Bull. London Math. Soc. 2 (1970), S. 183–185].

konvergiert, so konvergiert auch

(3.4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\cdot f(n) = \gamma\cdot\prod_p \left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{g(p)}{p}+\frac{g(p^2)}{p^2}+\ldots\right)^{-1}$$

gegen den angegebenen Grenzwert.

Beweis. Nach [10] gibt es unter den Voraussetzungen (3.2a) bis (3.2d) von Satz 3 eine multiplikative Funktion h_0, so daß $f = g * h_0$ als Faltung ([5]) von g und h_0 dargestellt werden kann, wobei

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\cdot |h_0(n)| < \infty$$

absolut konvergiert. Dann ist

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{f(n)}{n} = \sum_{n\leqslant N}\frac{1}{n}\sum_{d|n} h_0(d)\cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d\leqslant N}\frac{h_0(d)}{d}\cdot\sum_{m\leqslant N/d}\frac{g(m)}{m};$$

wohlbekannte elementare Abschätzungen zeigen, daß $\sum_{n\leqslant N} n^{-1}\cdot f(n)$ für $N\to\infty$ gegen $\{\sum d^{-1}\cdot h_0(d)\}\cdot\gamma$ konvergiert, und (5.2) aus [10] gibt die in (3.4) angegebene Produktdarstellung für $\sum d^{-1}\cdot h_0(d)$.

Folgerung zu Satz 3. *Sei $f\in\mathscr{F}_0$; definiert man eine multiplikative Funktion b: $N\to C$ durch*

(3.5)
$$b(n) = \begin{cases} \mu^2(n)\cdot\prod_{p|n}(1-f(p)) & \text{für} \quad 2\nmid n, \\ 0 & \text{für} \quad 2\,|\,n, \end{cases}$$

so ist die Reihe

(3.6)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n}$$

konvergent.

Beweis. In [11] wurde gezeigt ([6]), daß für die durch

$$v(r) = \begin{cases} \mu^2(r)\cdot\prod_{p|r}\{1-f(p)\}\cdot\left\{1+\frac{f(p)-1}{p}\right\}^{-1}, & \text{falls } (r,6)=1, \\ 0, & \text{falls } (r,6)\neq 1, \end{cases}$$

([5]) d.h. es ist $f(n) = \sum_{d|n} h_0(d)\cdot g(n/d)$.

([6]) Hierfür waren die verhältnismäßig tief liegenden Hilfsmittel von Halász erforderlich.

definierte multiplikative Funktion die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{-1}\cdot v(r)$$

konvergiert. Offenbar sind die Funktionen $b(\cdot)$ und $v(\cdot)$ benachbart und erfüllen die Voraussetzungen (3.2a) bis (3.2c) von Satz 3; weiterhin ist in $\mathrm{Re}\, s\geqslant 1$

$$|v(p)\cdot p^{-s}|\leqslant\frac{2}{p-2}<1 \quad \text{für } p\geqslant 5, \quad \text{bzw.} = 0 \quad \text{für } p=2,3;$$

somit ist auch (3.2d) erfüllt. Nach Satz 3 konvergiert dann $\sum n^{-1}\cdot b(n)$.

4. Hilfssätze. Nach Delange [1] gilt

Lemma 1. a) *Ist f: $N\to C$ multiplikativ, $|f|\leqslant 1$, und existiert $M(f)\neq 0$, so konvergiert die Reihe*

(4.1)
$$\sum_p\frac{1-f(p)}{p}$$

und

(4.2)
$$\exists r\geqslant 1, \text{ so daß } f(2^r)\neq -1 \text{ ist.}$$

b) *Ist f: $N\to C$ multiplikativ, $|f|\leqslant 1$ und konvergiert die Reihe* (4.1), *so existiert der Mittelwert* ([7])

(4.3)
$$M(f) = \prod_p\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right)\right\}.$$

Im weiteren geben wir einige Formeln für die in § 2 definierten Koeffizienten $a_q(f)$. Mit (2.1) und (2.2) erhält man leicht

(4.4)
$$1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots = \left(1-\frac{f(p)}{p}\right)^{-1}\cdot\eta(p).$$

Lemma 2. *Sei $f\in\mathscr{F}_0$. Mit einer nur von f abhängigen Konstanten γ_1 gilt für alle p und alle $r\geqslant 0$ die Abschätzung*

(4.5)
$$|a_{p^r}^*|\leqslant\gamma_1\cdot(r+1)\cdot p^{-r}.$$

Denn es ist nach (2.3)

$$|a_{p^r}^*|\leqslant\sup_p\left|\frac{1}{\eta(p)}\right|\cdot\frac{1}{p^{r-1}(p-1)}\cdot\{4r+2\};$$

für γ_1 kann man demnach $8\cdot\sup|1/\eta(p)|$ nehmen.

([7]) Gilt zusätzlich (4.2), so ist $M(f)\neq 0$.

LEMMA 3. *Mit der Abkürzung*

$$(4.6)\qquad e_p = \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{f(p)}{p}\right)^{-1}\cdot\eta(p)$$

gilt für $r = 0, 1, 2, \ldots$ *und für* $f\in\mathscr{F}_0$

$$(4.7)\qquad e_p\cdot\{1+a_p^*\varphi(p)+\ldots+a_{p^r}^*\varphi(p^r)-a_{p^{r+1}}^*\cdot p^r\} = f(p^r).$$

Bemerkung. Dieses Ergebnis findet sich in [9], (3.7), wurde aber dort mit Hilfe einiger Formeln hergeleitet, die hier nicht zur Verfügung stehen.

Beweis. Mit (2.3) und mit der in (4.6) gegebenen zweiten Darstellung von e_p [man vgl. hierzu (4.4)] ist (4.7) für $r = 0$ und $r = 1$ ziemlich rasch nachzurechnen. Eine etwas mühsame vollständige Induktion gibt dann (4.7) für jedes r, wobei man noch zweckmäßigerweise die Beziehung

$$(4.8)\qquad \sum_{0\leqslant\varrho\leqslant r} h(p^\varrho)\cdot f^{r-\varrho}(p) = f(p^r),\qquad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

benützt (die ebenfalls rasch durch vollständige Induktion bewiesen werden kann).

5. Konvergenz der Reihe (2.5). Wie in [11] ist

$$\sum_{q\leqslant Q} a_q c_q(n) = \sum_{d\mid n} d\cdot \sum_{r\leqslant Q/d}\mu(r)\cdot a_{rd};$$

wegen $a_q = M(f)\cdot a_q^*$ genügt es also, für die endlich vielen Teiler d von n die Partialsummen

$$(5.1)\qquad S_d(R) = M(f)\cdot\sum_{r\leqslant R}\mu(r)\cdot a_{rd}^*$$

für $R\to\infty$ auf Konvergenz zu untersuchen. Sei $d = \prod p^\delta$ die kanonische Primfaktorzerlegung von d; wir zerlegen $d = t\cdot D$ in ein Produkt zweier teilerfremder Faktoren, wobei (8)

$$(5.2)\qquad t = \prod_{p^\delta\| d,\, a_{p^\delta}^*=0} p^\delta$$

das Produkt derjenigen Primzahlpotenzen p^δ aus der Faktorzerlegung von d ist, für die $a_{p^\delta}^*$ verschwindet; demnach ist $a_D^*\neq 0$.

(8) Ein leeres Produkt ist als 1 zu interpretieren.

Zu $S_d(R)$ tragen wegen der Multiplikativität der Funktion a^* höchstens solche Terme etwas bei, für die $r\equiv 0 \bmod \alpha(t)$ ist, wobei

$$(5.3)\qquad \alpha(t) = \prod_{p\mid t} p$$

den quadratfreien Kern von t bezeichnet. Somit erhält man aus (5.1) mit $r = r'\cdot\alpha(t)$ und der Umbenennung $r'\to r$ wegen der Multiplikativität der Funktion $q\to a_q^*$

$$(5.4)\qquad S_d(R) = \mu(\alpha(t))\cdot a_{t\cdot\alpha(t)}^*\cdot M(f)\cdot \sum_{\substack{r\leqslant \frac{R}{\alpha(t)}\\ (r,t)=1}}\mu(r)\cdot a_{rD}^*.$$

Die Funktion $r\to r\cdot B_t(r)$ mit

$$(5.5)\qquad B_t(r) = \begin{cases}\dfrac{\mu(r)\cdot a_{rD}^*}{a_D^*} = \displaystyle\prod_{p\mid r,\, p\nmid D}(-a_p^*)\cdot\prod_{p\mid(r,D)}\left\{\frac{-a_{p^{\delta+1}}^*}{a_{p^\delta}^*}\right\} & \text{für}\quad (r,t) = 1,\\ 0 & \text{für}\quad (r,t)\neq 1,\end{cases}$$

ist multiplikativ und zu der in (3.5) definierten Funktion $b(n)$ benachbart; wegen (2.3), (3.5) und (5.5) ist nämlich (9) für $p\nmid 2\cdot t\cdot D$

$$p\cdot B(p)-b(p) = \frac{1}{\eta(p)}\cdot\left\{\frac{p}{p-1}(1-f(p))-p\cdot\sum_{\varrho=1}^{\infty}p^{-\varrho}h(p^\varrho)\right\}-\{1-f(p)\}$$
$$= \{1+O(p^{-2})\}\cdot\{1-f(p)+O(p^{-1})\}-\{1-f(p)\} = O(p^{-1});$$

somit konvergiert (10) die Reihe $\sum_p p^{-1}\cdot|pB(p)-b(p)|$. Wir wenden Satz 3 auf die Funktionen $r\to r\cdot B_t(r)$ und $r\to b(r)$ an; es ist leicht nachzuprüfen (man vgl. § 2 und § 4), daß die Voraussetzungen (3.2a), (3.2b) und (3.2c) erfüllt sind; schließlich ist für $\operatorname{Re} s\geqslant 1$

$$\left|1+\frac{b(p)}{p^s}+\frac{b(p^2)}{p^{2s}}+\ldots\right|\geqslant 1-\frac{2}{p}>0\quad\text{für}\quad p>2$$
$$\text{bzw.} = 1\quad\text{für}\quad p = 2,$$

und wegen (3.6) und Satz 3 ist

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\cdot rB_t(r)$$

konvergent, woraus wegen (5.4) und (5.5) unmittelbar die Konvergenz von $S_d(R)$ für $R\to\infty$ und damit die Konvergenz der Reihe $\sum a_q c_q(n)$ folgt.

(9) Man beachte $h(p) = 0$, $|h(p^\varrho)|\leqslant 2$, $|f|\leqslant 1$.

(10) Wegen der Abhängigkeit von d und $d\mid n$ kann gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2.5) in n nicht erwartet werden.

6. Bestimmung des Grenzwertes der Reihe (2.5). Nach dem Stetigkeitssatz für Dirichletreihen [11] ist der Grenzwert der nach § 5 konvergenten Reihe (2.5) gleich

$$\lim_{\sigma\to 0+} A(\sigma, n), \quad A(\sigma, n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-\sigma}\cdot a_q\cdot c_q(n); \tag{6.1}$$

die für $\sigma > 0$ absolut konvergente Reihe für $A(\sigma, n)$ besitzt die Produktdarstellung

$$A(\sigma, n) = M(f)\cdot\prod_p\left\{1+\frac{a_p^* c_p(n)}{p^\sigma}+\ldots\right\} = \prod_p\left\{e_p\cdot\left(1+\frac{a_p^* c_p(n)}{p^\sigma}+\ldots\right)\right\} \tag{6.2}$$

wegen der Produktdarstellung (4.3) für $M(f)$ und mit (4.6). Man zerlege dieses Produkt in

$$A(\sigma, n) = \prod_{p\leqslant K}\{\ldots\}\cdot\prod_{p>K}\{\ldots\} = P_1(\sigma)\cdot P_2(\sigma),$$

wobei K fest, aber größer als n angenommen wird. Für das erste Produkt erhält man (für $K > n$)

$$\lim_{\sigma\to 0+} P_1(\sigma) = P_1(0) = f(n), \tag{6.3}$$

wie leicht aus Lemma 3 folgt, wenn man beachtet, daß $c_{p^r}(n)$ die Werte $\varphi(p^r)$ bzw. $-p^{r-1}$ bzw. 0 annimmt, je nachdem ob $p^r \mid n$ bzw. $p^{r-1}\| n$ bzw. $p^{r-1}\nmid n$ gilt. Das zweite Produkt ist von einfacher Bauart; mit (2.3) und (4.6) erhält man für die einzelnen Faktoren von $P_2(\sigma)$ die Gestalt

$$\{\ldots\} = \frac{p-1}{p-f(p)}\cdot\left\{\eta(p)-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p^\sigma}(f(p)-1)-\frac{1}{p^\sigma}(\eta(p)-1)\right\} \tag{6.4}$$
$$= \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right)\cdot\left\{\frac{p-1}{p-f(p)}\cdot\eta(p)-1\right\}+1.$$

Ersetzt man $\eta(p)$ nach (2.2) durch $1+O(p^{-2})$ und berücksichtigt man nur Glieder, die größer als $O(p^{-2})$ sind, so folgt für die einzelnen Faktoren von $P_2(\sigma)$

$$\{\ldots\} = \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right)\cdot\frac{f(p)-1}{p}+1+O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum p^{-1}(f(p)-1)$ [man vgl. (4.1)] konvergiert (etwa nach dem 1. Abelschen Kriterium [12]) die Reihe

$$\sum_{p>K}\left(\frac{f(p)-1}{p}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right)$$

[11] Dieser beruht nur auf einer partiellen Summation.

[12] [6], S. 334 — oder man wende direkt partielle Summation an.

gleichmäßig in $0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}$, also auch das Produkt $P_2(\sigma)$, und es ist

$$\lim_{\sigma\to 0+} P_2(\sigma) = P_2(0) = 1, \tag{6.5}$$

da für $\sigma = 0$ nach (6.4) alle Faktoren gleich 1 werden. (6.3) und (6.5) zusammen geben

$$\lim_{\sigma\to 0+} A(\sigma, n) = f(n).$$

7. Beweis von Satz 2. Wenn $\sum_{q=1}^{\infty}|a_q|^2\cdot\varphi(q)$ konvergiert, so ist diese Reihe gleich

$$= |M(f)|^2\cdot\prod_p\left(1+|a_p^*|^2\varphi(p)+|a_{p^2}^*|^2\varphi(p^2)+\ldots\right); \tag{7.1}$$

berücksichtigt man die Produktdarstellung für

$$|M(f)|^2 = \prod_p |e_p|^2$$

[man vgl. (4.3) und (4.6)], so liegt es nahe, die Funktionen

$$k_p(n) = e_p\cdot\sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r}^*\cdot c_{p^r}(n) \tag{7.2}$$

zu betrachten und zunächst für diese die Parseval'sche Gleichung herzuleiten; wegen (4.5) ist die Reihe für $k_p(n)$ absolut konvergent [13]. Mit $n = p^\nu\cdot n'$, $p\nmid n'$ und $c_{p^r}(n) = \varphi(p^r)$ bzw. $-p^\nu$ bzw. 0 für $r\leqslant\nu$ bzw. $r = \nu+1$ bzw. $r > \nu+1$ und Lemma 3 erhält man sofort

$$k_p(n) = f(p^\nu), \quad \text{wenn } p^\nu\| n. \tag{7.3}$$

Zur Bestimmung des Mittelwertes von $|k_p|^2$ berechnet man

$$\sum_{n\leqslant x}|k_p(n)|^2 = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\frac{\log x}{\log p}}|f(p^\beta)|^2\cdot\sum_{\substack{n\leqslant x/p^\beta\\(n,p)=1}}1$$
$$= x\cdot\frac{\varphi(p)}{p}\cdot\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{|f(p^\beta)|^2}{p^\beta}\cdot\left(1+o(1)\right),$$

denn es ist

$$\sum_{n\leqslant y,(n,p)=1}1 = [y]-\left[\frac{y}{p}\right] = y\cdot\frac{\varphi(p)}{p}+O(1).$$

[13] Die Reihe ist in Wirklichkeit eine endliche Summe, die höchstens bis $\left[\frac{\log n}{\log p}\right]+1$ geht.

Somit ist

$$M(|k_p|^2) = \frac{\varphi(p)}{p}\cdot\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{|f(p^\beta)|^2}{p^\beta}. \tag{7.4}$$

Andererseits erhält man mit (7.2) und der Abkürzung $R = \left[\frac{\log x}{\log p}\right]+1$

$$\sum_{n\leqslant x}|k_p(n)|^2 = |e_p|^2\cdot\sum_{0\leqslant r,r'\leqslant R}\sum a^*_{p^r}\cdot\overline{a^*_{p^{r'}}}\cdot\sum_{n\leqslant x}c_{p^r}(n)\cdot c_{p^{r'}}(n).$$

Dabei ist die innerste Summe (mit (1.1)) gleich

$$S(x,r,r') := \sum_{n\leqslant x}c_{p^r}(n)\cdot c_{p^{r'}}(n)$$
$$= \sum_{d|p^r}d\mu\left(\frac{p^r}{d}\right)\cdot\sum_{d'|p^{r'}}d'\mu\left(\frac{p^{r'}}{d'}\right)\cdot\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 0 \bmod kgV[d,d']}}1.$$

Dies ist leicht auszurechnen, da d nur p^r oder p^{r-1} sein kann (entsprechend für d'); man erhält mit O-Konstanten, die von x, r, r', p unabhängig sind,

$$S(x,r,r') = x\cdot\varphi(p^r)+O(p^{2r}) \quad \text{für} \quad r = r',$$

und

$$S(x,r,r') = O(p^{r+r'}) \quad \text{für} \quad r\neq r'.$$

Somit wird, wenn man die Abschätzung (4.6) für a^*_q beachtet,

$$\sum_{n\leqslant x}|k_p(n)|^2 = |e_p|^2\cdot\sum_{0\leqslant r\leqslant R}|a^*_{p^r}|^2\cdot\varphi(p^r)\cdot x+|e_p|^2\cdot\sum_{0\leqslant r,r'\leqslant R}\sum O(1);$$

wegen $R = O(\log x)$ folgt

$$M(|k_p|^2) = |e_p|^2\cdot\sum_{r=0}^{\infty}|a^*_{p^r}|^2\cdot\varphi(p^r). \tag{7.5}$$

Ein Vergleich mit (7.4) gibt

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\frac{|f(p)|^2}{p}+\frac{|f(p^2)|^2}{p^2}+\ldots\right) = |e_p|^2\cdot\sum_{r=0}^{\infty}|a^*_{p^r}|^2\cdot\varphi(p^r). \tag{7.6}$$

Bildet man das Produkt der linken Seite von (7.6) über alle p, so konvergiert dieses [man vgl. Lemma 1, b, (4.3)] gegen $M(|f|^2)$. Somit konvergiert auch

$$\prod_p\left\{|e_p|^2\cdot\sum_{r=0}^{\infty}|a^*_{p^r}|^2\cdot\varphi(p^r)\right\}$$

gegen $M(|f|^2)$, also konvergiert auch

$$\sum_{q=1}^{\infty}|a_q|^2\cdot\varphi(q) = M(|f|^2).$$

Die Folgerung zu Satz 2 kann leicht und auf wohlbekannte Weise aus Satz 2 erhalten werden.

Literaturverzeichnis

[1] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Scient. de l'École Norm. Sup. (3) 78 (1961), S. 273–304.

[2] — *On a class of multiplicative arithmetical functions*, Scripta Math. 26 (1963), S. 121–141.

[3] M. J. Delsarte, *Essai sur l'application de la théorie des fonctions presque périodiques à l'arithmétique*, Ann. Scient. de l'École Norm. Sup. (3) 62 (1945), S. 185–204.

[4] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19 (1968), S. 365–403.

[5] — *Über die Konvergenz multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Studia Scient. Math. Hung. 4 (1969), S. 171–178.

[6] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin 1922.

[7] S. Ramanujan, *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers*, Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1918), S. 259–276.

[8] W. Schwarz, *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Arith. 22 (1973), S. 329–338.

[9] — *Die Ramanujan-Entwicklung reellwertiger multiplikativer Funktionen vom Betrage kleiner oder gleich Eins*, Erscheint in J. Reine Angew. Math. 264.

[10] — *Eine weitere Bemerkung über multiplikative Funktionen*, Coll. Math. 28 (1973), S. 81–89.

[11] — *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973), S. 66–73.

[12] A. Wintner, *Eratosthenian averages*, Baltimore 1943.

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK

Eingegangen 17. 9. 1973 (453)