ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

# Новый класс тождеств для коэффициентов Фурье модулярных форм

Н. В. Кузнецов (Москва)

*Памяти Ю. В. Линника*

В работе исследована структура решений системы функциональных уравнений, аналогичных функциональным уравнениям для тета-функций Якоби. В результате получен новый класс тождеств для коэффициентов Фурье модулярных форм. Эти тождества содержат произвольную функцию и её трансформацию Ганкеля и могут рассматриваться как обобщение формулы суммирования Пуассона. Их следствием является возможность выразить усредненные по модулям суммы Клоостермана через суммы сумм Рамануджана, т.е. через $\mu$-функцию Мёбиуса.

Проблема интерференции сумм Клоостермана в случае усреднения их по модулям вызывала глубокий интерес Ю.В. Линника на протяжении многих лет, и у него есть интересная гипотеза на этот счет [3]. Сравнение этой гипотезы с неарифметическим контрпримером А. Сельберга [5] показывает, что если гипотеза Линника верна, то она имеет глубоко арифметическую природу. Возможность выражения сумм с суммами Клоостермана через $\mu$-функцию Мёбиуса позволяет надеяться, что интерференция классических (арифметических) сумм Клоостермана действительно существует в отличие от неарифметического случая Сельберга [5].

**1. Введение.** Большое число теоретико-числовых задач приводит к изучению регулярных в верхней полуплоскости комплексного переменного $z$ функций $f(z)$, удовлетворяющих системе функциональных уравнений

$$f(z+\lambda)=f(z), \qquad \frac{1}{(-iz)^k}f\left(-\frac{1}{z}\right)=\chi f(z) \tag{1.1}$$

в которых $\lambda, k, \chi$ — фиксированные параметры, причем $\lambda>0$, $k>0$ и $\chi^2=1$.

Регулярное в верхней полуплоскости решение системы функциональных уравнений (1.1), для которого разложение в ряд Лорана по степеням величины $e^{2\pi iz/\lambda}$ (возможное в силу первого из уравнений (1.1)) не содержит членов с отрицательными степенями („голоморфное" на $i\infty$), будем называть модулярной формой типа $(\lambda, k, \chi)$.

Классическая теория модулярных форм началась с изучения тета-функции Якоби $\vartheta(z)$,

$$\vartheta(z) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi n^2 z} \tag{1.2}$$

которая удовлетворяет функциональным уравнениям (1.1) с $\lambda=2$, $k=\frac{1}{2}$, $\chi=1$ ([6], гл. 21).

Наряду с $\vartheta(z)$, Якоби ввел тета-функцию двух переменных $\vartheta(z, v)$,

$$\vartheta(z, v) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}\cos 4\pi n v \tag{1.3}$$

удовлетворяющую системе функциональных уравнений ([6], гл. 21)

$$\vartheta(z+2, v) = \vartheta(z, v), \qquad \frac{1}{(-iz)^{1/2}}\,\vartheta\left(-\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right) = e^{4i\pi v^2/z}\vartheta(z, v). \tag{1.4}$$

По аналогии с (1.1) естественно поставить вопрос об отыскании решений следующего обобщения системы (1.4):

$$g(z+\lambda, v) = g(z, v), \qquad \frac{1}{(-iz)^k}\,g\left(-\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right) = \chi e^{2\pi i\lambda v^2/z} g(z, v) \tag{1.5}$$

где параметры $\lambda, k, \chi$ удовлетворяют тем же условиям, что и в (1.1), а решение ищется в классе функций, регулярных по $z$ в верхней полуплоскости, ограниченных при фиксированном $v$ и $\operatorname{Im} z\to+\infty$ и для каждого фиксированного $z$ с $\operatorname{Im} z>0$ являющихся целыми функциями комплексной переменной $v$.

В отличие от системы функциональных уравнений (1.1), теория которой в работах Якоби, Пуанкаре, Петерсона и Гекке приобрела почти законченную форму, единственным примером решения системы функциональных уравнений (1.5) до сих пор была лишь тета-функция Якоби $\vartheta(z, v)$.

В настоящей работе показана следующая простая связь между решениями систем функциональных уравнений (1.1) и (1.5).

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — модулярная форма типа $(\lambda, k, \chi)$ и $a(n)$, $n\geqslant 0$, — её коэффициенты Фурье,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz/\lambda} \tag{1.6}$$



*причем для некоторой постоянной $B_f>0$ при $n\to\infty$*

$$a(n) = O(n^{B_f}). \tag{1.7}$$

*Тогда функция*

$$g_f(z, v) = \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)}a(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2i\pi nz/\lambda}\frac{J_{k-1}(4\pi v\sqrt{n})}{(v\sqrt{n})^{k-1}} \tag{1.8}$$

*где $J_{k-1}(\cdot)$ — функция Бесселя порядка $k-1$, удовлетворяет системе уравнений* (1.5).

Таким образом, каждому решению системы функциональных уравнений (1.1), удовлетворяющему $O$-условию (1.7), соответствует ассоциированная функция двух переменных, которая удовлетворяет системе (1.5).

Отметим, что тета-функция Якоби $\vartheta(z, v)$ получается из $\vartheta(z)$ по правилу (1.8). В самом деле, коэффициенты Фурье функции $\vartheta(z)$ имеют вид: $a(0)=1$, $a(n)=2$ когда $n\geqslant 1$ является точным квадратом и $a(n)=0$ для $n\geqslant 1$, не являющихся точным квадратом. Так как

$$J_{-1/2}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}}\cos v,$$

то ассоциированной с $\vartheta(z)$ по правилу (1.8) является функция

$$g_\theta(z, v) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}\frac{J_{-1/2}(4\pi vn)}{(vn)^{-1/2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}\cos 4\pi vn\right)$$

которая лишь постоянным множителем отличается от $\vartheta(z, v)$.

Классическим результатом теории модулярных форм является утверждение, что линейное пространство $\mathfrak{M}(\lambda, k, \chi)$ модулярных форм $f$, удовлетворяющих $O$-условию (1.7), бесконечномерно при $\lambda>2$ для любого $k>0$ и $\chi=\pm1$, а при $0<\lambda<2$ $\mathfrak{M}(\lambda, k, \chi)=\varnothing$ за исключением тех случаев, когда с целым $q\geqslant 3$ и с некоторым целым $m>0$ параметры $\lambda$ и $k$ имеют вид

$$\lambda = 2\cos\pi/q, \qquad k = \frac{4m}{q-2}+1-\chi \qquad (\chi=\pm1). \tag{1.9}$$

Для этих $\lambda$, $k$ и $\chi=\pm1$ (см., например, [4], гл. 1)

$$\dim\mathfrak{M}(\lambda, k, \chi) = 1+\left[\frac{2m+\chi-1}{2q}\right] \tag{1.10}$$

($[\cdot]$, как обычно, обозначает целую часть). При $\lambda=2$

$$\dim\mathfrak{M}(2, k, \chi) = 1+\left[\frac{k+\chi-1}{4}\right]. \tag{1.11}$$

Вместе с теоремой 1 это дает нижнюю границу для размерности пространства аналитических решений системы (1.5); во всяком случае, для $\lambda > 2$ и $\chi^2 = 1$ это пространство оказывается бесконечномерным для любого $k > 0$.

В некотором смысле обратной к теореме 1 является

Теорема 2. *Пусть $g(z, v)$ — решение системы функциональных уравнений (1) и пусть выполнены условия:*

(a) *для каждого $v$ $g(z, v)$ регулярна по $z$ для $\operatorname{Im} z > 0$ и ограничена при $\operatorname{Im} z \to +\infty$;*

(b) *для каждого $z$ с $\operatorname{Im} z > 0$ $g(z, v)$ является целой функцией комплексного переменного $v$;*

(c) *при некотором $B > 0$ функция $(\operatorname{Im} z)^B |g(z, v)|$ ограничена при $\operatorname{Im} z \to 0$;*

*Тогда $g(z, v)$ можно представить в виде*

$$g(z, v) = \sum_{n \geqslant 0} e^{2\pi i n z/\lambda} \sum_{l \geqslant 0} a_l(n) \frac{J_{k-1+2l}(4\pi v\sqrt{n})}{v^{k-1} n^{k/2-1/2+l}} \tag{1.12}$$

*где $a_l(n)$ — $n$-тый коэффициент Фурье некоторой функции из $\mathfrak{M}(\lambda, k+2l, \chi)$.*

Таким образом, функции вида (1.8), ассоциированные с модулярными формами, исчерпывают пространство аналитических решений системы функциональных уравнений (1.5).

Уравнения (1.5) для функции вида (1.8) позволяют получить большое число тождеств для коэффициентов Фурье модулярных форм, содержащих произвольную функцию.

Преобразования $z \to Uz = z + \lambda$ и $z \to Sz = -1/z$ порождают группу преобразований верхней полуплоскости, изоморфную фактор-группе $G(\lambda) = M(\lambda)/\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $M(\lambda)$ — множество матриц второго порядка, представимых в виде

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = S^{k_1} U^{n_1} S \ldots S U^{n_p} S^{k_2} \tag{1.13}$$

с некоторыми целыми $n_1, \ldots, n_p$ и $k_1, k_2 = 0$ или $1$ (обозначения $U$, $S$ использованы здесь и для матриц $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ соответствующих преобразованиям $U$, $S$).

Для каждой такой матрицы $\sigma = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in M(\lambda)$ положим

$$\chi(\sigma) = (i^k \chi)^N \tag{1.14}$$

где $N$ — число матриц $S$ в представлении (1.13) для $\sigma$.



Теорема 3. *Пусть $a(n)$, $n \geqslant 0$, — коэффициенты Фурье модулярной формы типа $(\lambda, k, \chi)$, удовлетворяющей O-условию (1.7). Пусть непрерывная в интервале $(0, +\infty)$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:*

(a) *преобразование Ганкеля порядка $k-1$, т.е. интеграл*

$$\hat{\varphi}(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_{k-1}(xy) \varphi(y)\, dy \tag{1.15}$$

*существует для всех $x > 0$;*

(b) *ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{1/4-k/2} a(n) e^{2\pi i n \xi_1} \varphi(\xi_2 \sqrt{n}) \tag{1.16}$$

*сходится для $\xi_1 \geqslant 0$ и $\xi_2 > 0$;*

(c) *функции $x^{k-1/2}|\varphi(x)|$ и $x^{k-1/2}|\hat{\varphi}(x)|$ принадлежат $\mathscr{L}_1(0, +\infty)$;*

(d) *для любого фиксированного $\xi > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=1}^\infty n^{1/4-k/2} |a(n)| \int_0^\infty e^{\frac{-\beta(x-\xi\sqrt{n})^2}{\varepsilon}} \left| \varphi(x) - \left(\frac{x}{\xi\sqrt{n}}\right)^{k-1/2} \varphi(\xi\sqrt{n}) \right| dx = 0. \tag{1.17}$$

*Тогда для любого $\sigma = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in M(\lambda)$, $\gamma > 0$ и для любых положительных $\xi$ и $t$, удовлетворяющих условию*

$$\xi t = \frac{4\pi}{\lambda\gamma} \tag{1.18}$$

*справедливо тождество*

$$\frac{t^k a(0)}{2^{k-1}\Gamma(k)} \int_0^\infty x^{k-1/2} \varphi(x)\, dx + \sqrt{t} \sum_{n=1}^\infty n^{1/4-k/2} a(n) e^{-2\pi i n\delta/\lambda\gamma} \hat{\varphi}(t\sqrt{n}) = \tag{1.19}$$

$$= e^{-ik\pi/2} \chi(\sigma) \left\{ \frac{\xi^k a(0)}{2^{k-1}\Gamma(k)} \int_0^\infty x^{k-1/2} \hat{\varphi}(x)\, dx + \sqrt{\xi} \sum_{n=1}^\infty n^{1/4-k/2} a(n) e^{2\pi i n\alpha/\lambda\gamma} \varphi(\xi\sqrt{n}) \right\}$$

*где ряд слева суммируем по Абелю.*

Замечание 1. Если нулевой коэффициент Фурье $a(0)$ обращается в нуль, то тождество (1.19) справедливо без предположения (c).

Замечание 2. При $\lambda = 2$, $k = \frac{1}{2}$ и $\chi = 1$ единственной модулярной формой типа $(2, \frac{1}{2}, 1)$ является тета-функция Якоби $\vartheta(z)$ (см., например, [4], гл. 1).

Для $k=\frac{1}{2}$ преобразование Ганкеля порядка $k-1$ совпадает с косинус-преобразованием Фурье, так как $\sqrt{v}J_{-1/2}(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos v$.

Поэтому при $k=\frac{1}{2}$, $a=\delta=0$ и с $a(n)$, равными коэффициентам Фурье тета-функции Якоби $\vartheta(z)$, тождество (1.19) лишь обозначениями отличается от формулы суммирования Пуассона.

Замечание 3. Возможное теоретико-числовое значение тождеств (1.19) определяется тем, что они позволяют выразить суммы сумм Клоостермана через суммы сумм Рамануджана. Сумма Клоостермана определяется равенством

$$S(m,n;\gamma)=\sum_{\substack{1\leqslant\delta\leqslant|\gamma|\\(\delta,\gamma)=1,\ a\delta\equiv 1 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} e^{2\pi ima/\gamma+2\pi in\delta/\gamma}. \tag{1.20}$$

В частном случае, когда $m$ или $n$ обращаются в нуль, эту сумму принято называть суммой Рамануджана $c_\gamma(n)$:

$$c_\gamma(n)=S(0,n;\gamma)=\sum_{\substack{1\leqslant\delta\leqslant|\gamma|\\(\delta,\gamma)=1}} e^{2\pi in\delta/\gamma}. \tag{1.21}$$

Суммы $c_\gamma(n)$ могут быть выражены в явной форме и их исследование значительно проще изучения сумм Клоостермана.

Положим в тождестве (1.19) $\lambda=1$, так что $G(\lambda)$ будет совпадать с классической модулярной группой, и будем считать характер $\chi(\sigma)$ единичным. При этом матрицы $\sigma$ — обычные унимодулярные матрицы, однозначно определяющиеся по своей нижней строке $(\delta,\gamma)$ ($\delta$ и $\gamma$ — любые взаимно простые целые рациональные). Умножая тождество (1.19) на $e^{2\pi im\delta/\gamma}$ с некоторым целым $m$ и суммируя по $\delta$, взаимно простым с $\gamma$ и меньшим $\gamma$, получаем выражение для суммы сумм Клоостермана через сумму сумм Рамануджана с произвольной (удовлетворяющей условиям теоремы 3) функцией $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\xi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/4-k/2}a(n)S(n,m;\gamma)\varphi(\xi\sqrt{n}) &= \\ = i^k\sqrt{t}\,m^{1/4-k/2}a(m)c_\gamma(0)\hat{\varphi}(t\sqrt{m}) &+ \\ +\frac{a(0)c_\gamma(m)}{2^{k-1}\Gamma(k)}\left(t^k\int_0^\infty x^{k-1/2}\varphi(x)\,dx-(i\xi)^k\int_0^\infty x^{k-1/2}\hat{\varphi}(x)\,dx\right) &+ \\ +i^k\sqrt{t}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty} n^{1/4-k/2}a(n)c_\gamma(|n-m|)\hat{\varphi}(t\sqrt{n}).\end{aligned} \tag{1.22}$$



**2. Доказательство теорем 1 и 2.** Пусть $f(z)$ — модулярная форма из $\mathfrak{M}(\lambda,k,\chi)$, т.е. регулярная в полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$ и ограниченная при $\mathrm{Im}\,z\to+\infty$ функция, удовлетворяющая функциональным уравнениям

$$f(z)=f(z+\lambda),\qquad \chi f(z)=\frac{1}{(-iz)^k}f\left(-\frac{1}{z}\right). \tag{2.1}$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые модулярные формы удовлетворяют дополнительному $O$-условию: для каждой $f\in\mathfrak{M}(\lambda,k,\chi)$ найдется постоянная $B_f>0$ такая, что

$$\lim_{\mathrm{Im}\,z\to 0}(\mathrm{Im}\,z)^{B_f}|f(z)|=0. \tag{2.2}$$

Как показано в [4], гл. 1, это эквивалентно условию, что коэффициенты Фурье $a(n)$ функции $f$ при $n\to\infty$ растут не быстрее некоторой фиксированной степени $n$.

Каждой функции $f\in\mathfrak{M}(\lambda,k,\chi)$ поставим в соответствие функцию двух переменных:

$$g(z,v)=\frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)}a(0)+\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{2\pi inz/\lambda}\frac{J_{k-1}(4\pi v\sqrt{n})}{(v\sqrt{n})^{k-1}}. \tag{2.3}$$

Так как $v^{-\nu}J_\nu(v)$ однозначна и регулярна во всей плоскости $v$ и так как при $|v|\to\infty$ модуль этой функции не превосходит $|v|^{\mathrm{const}}e^{|\mathrm{Im}\,v|}$, то ряд (2.3) для любого $z$ из верхней полуплоскости определяет целую функцию переменной $v$.

Очевидно, $g(z+\lambda,v)=g(z,v)$. Чтобы вывести уравнение для $g(z,v)$ при преобразовании $z\to-1/z$, соответствующем мнимому преобразованию Якоби для тета-функций, нам понадобится

Лемма 1. *Пусть $a(n)$, $n\geqslant 0$, — коэффициенты Фурье модулярной формы $f\in\mathfrak{M}(\lambda,k,\chi)$. Тогда при любом $x>0$*

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}' a(n)=\frac{\chi a(0)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)^k+\chi\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{k/2}J_k\left(\frac{4\pi x\sqrt{n}}{\lambda}\right) \tag{2.4}$$

*где штрих у суммы означает, что при целом $x$ последнее слагаемое берется с коэффициентом $\frac{1}{2}$ а ряд в правой части суммируем чезаровскими средними достаточно высокого порядка.*

Это тождество для коэффициентов Фурье произвольной модулярной формы было получено Гекке [2] как непосредственное следствие известной теоремы Э. Ландау, когда Гекке установил взаимнооднозначное соответствие между пространством модулярных форм $\mathfrak{M}(\lambda, k, \chi)$ и множеством рядов Дирихле

$$\psi(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a(n)}{n^s}$$

с функциональным уравнением Риманова типа

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\psi(s) = \chi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s)\psi(k-s).$$

Для наших целей достаточно проинтегрированной формы тождества (2.4):

$$A_q(x) \equiv \sum_{0\leqslant n\leqslant x} \frac{(x-n)^q}{q!} a(n) = \frac{\chi a(0)}{\Gamma(k+q+1)}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^k x^{k+q} + \chi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^q \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{k+q}{2}} J_{k+q}\left(\frac{4\pi\sqrt{nx}}{\lambda}\right). \tag{2.5}$$

В силу сделанного предположения о порядке роста $a(n)$, ряд в правой части (2.5) сходится абсолютно (и равномерно на любом конечном интервале) при всех достаточно больших $q$.

Рассмотрим теперь ряд

$$\Phi = \sum_{n\geqslant 1} a(n)\omega(n) = \int_0^\infty \omega(x)\, d\big(A_0(x) - a(0)\big)$$

где для фиксированных $v$ и $z$ через $\omega(x)$ обозначена функция $x^{1/2-k/2}e^{2\pi ixz/\lambda}J_{k-1}(4\pi v\sqrt{x})$. Учитывая, что при $x<1$ $A_0(x)-a(0)\equiv 0$, а при $x\to+\infty$ функция $\omega(x)$ убывает быстрее любой фиксированной степени $x$, с помощью достаточно большого числа интегрирований по частям ряд $\Phi$ можно записать в виде

$$\Phi = (-1)^{q+1}\int_0^\infty \omega^{(q+1)}(x)\left(A_q(x) - \frac{a(0)x^q}{q!}\right)dx. \tag{2.6}$$

Если $q$ взято достаточно большим (чтобы ряд в (2.5) сходился абсолютно), то в (2.6) вместо $A_q(x)$ можно подставить ряд и проинтегрировать почленно (в силу равномерной сходимости на любом конечном интервале и быстрого убывания $\omega(x)$). В результате получим,

$$\Phi = (-1)^{q+1}a(0)\int_0^\infty \omega^{(q+1)}(x)\left\{\frac{\chi}{\Gamma(k+q+1)}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^k x^{k+q} - \frac{x^q}{q!}\right\}dx + (-1)^{q+1}\chi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^q \sum_{n=1}^\infty n^{-k/2-q/2}a(n)\int_0^\infty \omega^{(q+1)}(x)J_{k+q}\left(\frac{4\pi\sqrt{nx}}{\lambda}\right)x^{k/2+q/2}dx. \tag{2.7}$$



В каждом из слагаемых теперь можно снова выполнить интегрирование по частям, чтобы возвратиться к интегралам, не содержащим производных от $\omega(x)$. Учитывая рекуррентные формулы

$$\frac{d}{dz}z^\nu J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

интегральные формулы из теории бесселевых функций (см., например, [1], стр. 60)

$$\int_0^\infty J_\mu(at)e^{-\gamma t^2}t^{\mu+1}dt = \frac{a^\mu}{(2\gamma)^{\mu+1}}e^{-a^2/4\gamma}, \quad \operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\gamma > 0, \tag{2.8}$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at)J_\mu(\beta t)e^{-\gamma t^2}t\,dt = \frac{1}{2\gamma}e^{-\frac{i\mu\pi}{2}-\frac{a^2+\beta^2}{4\gamma}}J_\mu\left(\frac{ia\beta}{2\gamma}\right), \quad \operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\gamma > 0 \tag{2.9}$$

правую часть (2.7) можно записать в виде

$$\frac{(2\pi)^{k-1}\chi a(0)}{\Gamma(k)}\left(\frac{v}{-iz}\right)^{k-1}e^{-2\pi i\lambda v^2/z} - \frac{(2\pi)^{k-1}a(0)}{\Gamma(k)} + \frac{\chi e^{-2\pi i\lambda v^2/z}}{(-i)^k z}\sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{n^{k/2-1/2}}e^{-2\pi in/\lambda z}J_{k-1}\left(\frac{4\pi v\sqrt{n}}{z}\right) = \frac{v^{1-k}}{(-iz)^k}g\left(-\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right)e^{-2\pi i\lambda v^2/z} - \frac{(2\pi)^{k-1}a(0)}{\Gamma(k)}. \tag{2.10}$$

С другой стороны, по определению $\Phi$, это выражение равно $v^{1-k}g(z, v) - \frac{(2\pi)^{k-1}a(0)}{\Gamma(k)}$. Следовательно,

$$g(z, v) = \frac{\chi}{(-iz)^k}e^{-2\pi i\lambda v^2/z}g\left(-\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right) \tag{2.11}$$

и теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Первое из уравнений (1.5) означает, что $g(z, v)$ можно представить в виде ряда Фурье

$$g(z, v) = \sum_{n=0}^\infty e^{2\pi inz/\lambda}c_n(v). \tag{2.12}$$

Коэффициенты с $n<0$ в этом разложении отсутствуют в силу предположения об ограниченности $g(z, v)$ при $\operatorname{Im}z\to+\infty$, а каждая из функций

$c_n(v)$, $n \geqslant 0$, является целой функцией комплексного переменного $v$. Разложим $c_n(v)$ для $n \geqslant 1$ в ряд Неймана. Условия справедливости этого разложения дает

Лемма 2 ([1], стр. 74). *Пусть $F(v)$ представима степенным рядом*

$$F(v) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l v^l \tag{2.13}$$

*с отличным от нуля радиусом сходимости. Тогда при любом $\nu$, не равном целому отрицательному числу, $F(v)$ представима в виде ряда Неймана*

$$F(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n v^{-\nu} J_{\nu+n}(v) \tag{2.14}$$

*где*

$$\tilde{b}_n = (\nu+n) \sum_{0 \leqslant l \leqslant n/2} \frac{2^{\nu+n-2l}\Gamma(\nu+n-l)}{l!} b_{n-2l}. \tag{2.15}$$

Полагая в разложении вида (2.14) для функций $c_n(v)$, $n \geqslant 1$, $\nu = k-1$ (в случае целых функций этот ряд сходится во всей плоскости), представим эти функции в виде

$$c_n(v) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(n) \frac{J_{k-1+l}(4\pi v\sqrt{n})}{v^{k-1}} \tag{2.16}$$

с некоторыми постоянными $a_l(n)$ (для каждого фиксированного $n \geqslant 1$ $c_n(v)$ можно считать функцией переменной $4\pi v\sqrt{n}$). Разлагая ещё $c_0(v)$ в ряд Тейлора,

$$c_0(v) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(0) v^l$$

можно записать второе функциональное уравнение системы (1.5) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l(0) v^l + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi inz/\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} a_l(n) \frac{J_{k-1+l}(4\pi v\sqrt{n})}{v^{k-1}} = \tag{2.17}$$

$$= \frac{\chi}{(-iz)^k} e^{-2\pi i\lambda v^2/z} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} a_l(0) \left(\frac{v}{z}\right)^l + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi in/z\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} a_l(n) \frac{J_{k-1+l}\left(\frac{4\pi v\sqrt{n}}{z}\right)}{(v/z)^{k-1}} \right\}.$$

Положим в этом уравнении $v = 0$. Учитывая, что при $v \to 0$

$$\frac{J_\nu(v)}{v^\nu} = \frac{1+O(v^2)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$



находим, что числа $a_0(0)$ и $\frac{(2\pi\sqrt{n})^{k-1}}{\Gamma(k)} a_0(n)$ при $n \geqslant 1$ — коэффициенты Фурье некоторой модулярной формы из $\mathfrak{M}(\lambda, k, \chi)$ (возможно, нулевой). Обозначим эту модулярную форму через $f_0$,

$$f_0(z) = a_0(0) + \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n) n^{k/2-1/2} e^{2\pi inz/\lambda}. \tag{2.18}$$

По теореме 1 функция

$$g_0(z, v) = \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)} a_0(0) + \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n) e^{2\pi inz/\lambda} \frac{J_{k-1}(4\pi v\sqrt{n})}{v^{k-1}} \tag{2.19}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{1}{(-iz)^k} g_0\left(-\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right) = \chi e^{2\pi i\lambda v^2/z} g_0(z, v). \tag{2.20}$$

Это уравнение означает, что сумма слагаемых с $l = 0$ в левой части (2.17) равна сумме слагаемых с $l = 0$ в правой части этого равенства. Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l(0) v^{l-1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi inz/\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} a_l(n) \frac{J_{k-1+l}(4\pi v\sqrt{n})}{v^k} = \tag{2.21}$$

$$= \frac{\chi}{(-iz)^k} e^{-2\pi i\lambda v^2/z} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l(0) \frac{v^{l-1}}{z^l} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi in/z\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} a_l(n) \frac{J_{k-1+l}\left(\frac{4\pi v\sqrt{n}}{z}\right)}{v^k z^{-k+1}} \right\}$$

(в (2.17) мы опустили слагаемые с $l = 0$ и полученное равенство разделили на $v$). Полагая в (2.21) $v = 0$, находим, что $a_1(0)$ и $\frac{(2\pi\sqrt{n})^k}{\Gamma(k+1)} a_1(n)$ — коэффициенты Фурье некоторой модулярной формы $f_1 \in \mathfrak{M}(\lambda, k+1, \chi)$. Поэтому, в силу теоремы 1, функция

$$g_1(z, v) = \frac{(2\pi)^k a_1(0)}{\Gamma(k+1)} + \frac{(2\pi)^k}{\Gamma(k+1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n) e^{2\pi inz/\lambda} \frac{J_k(4\pi v\sqrt{n})}{v^k} \tag{2.22}$$

удовлетворяет уравнению (2.20), с заменой $k$ на $k+1$. Таким образом, уравнение (2.17) останется справедливым, если в обеих частях вести суммирование лишь по $l \geqslant 2$. Повторяя это рассуждение, точно также находим, что для любого $l \geqslant 0$ числа $a_l(0)$ и $\frac{(2\pi\sqrt{n})^{k-1+l} a_l(n)}{\Gamma(k+l)}$, $n \geqslant 1$, — коэффициенты Фурье некоторой модулярной функции из $\mathfrak{M}(\lambda, k+l, \chi)$.

Отметим теперь, что ненулевое решение системы функциональных уравнений (1.5) возможно лишь при $\chi^2=1$ и это решение должно быть четной функцией $v$.

В самом деле, $\lim\limits_{v\to 0}\left(g(z,v)/v^m\right)$ при некотором целом $m\geqslant 0$ является модулярной формой типа $(\lambda, k+m, \chi)$. Обозначим эту модулярную форму через $F$; тогда

$$F(z)=\frac{\chi}{(-iz)^{k+m}}F\left(-\frac{1}{z}\right)=\chi^2F(z).$$

Следовательно, необходимым условием существования ненулевых решений системы (1.5) является равенство $\chi^2=1$. Далее, дважды используя второе из уравнений (1.5), получаем $g(z,v)=\chi^2g(z,-v)=g(z,-v)$. Следовательно, в разложении (1.6) коэффициенты $a_l(n)$ с нечетными $l$ должны быть равны нулю (так как $v^{1-k}J_{k-1+l}(v)$ является четной лишь при четных $l$), чем и завершается доказательство возможности представления (1.12).

**3. Тождества с произвольной функцией для коэффициентов Фурье модулярных форм.** Прежде всего, получим закон преобразования решений системы функциональных уравнений (1.5) относительно преобразований из группы $G(\lambda)$.

Лемма 3. *Пусть $g(z,v)$ удовлетворяет системе функциональных уравнений* (1.5). *Тогда для любого преобразования $z\to\sigma z=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\sigma\in G(\lambda)$, $\gamma>0$,*

$$g(z,v)=\frac{\chi(\sigma)}{(\gamma z+\delta)^k}e^{-2\pi i\lambda\gamma v^2/(\gamma z+\delta)}g\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\frac{v}{\gamma z+\delta}\right)\tag{3.1}$$

*где $\chi(\sigma)=(i^k\chi)^N$, $N$ — число матриц $S$ в представлении* (1.13) *для $\sigma$.*

Для доказательства при фиксированных $v$ и $z$, $\operatorname{Im}z>0$, рассмотрим следующую функцию от $\sigma$:

$$\psi(\sigma)=(\gamma z+\delta)^{-k}\exp\left(-\frac{2\pi i\lambda\gamma v^2}{\gamma z+\delta}\right)g\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\frac{v}{\gamma z+\delta}\right).\tag{3.2}$$

С этим обозначением доказываемое равенство (3.1) можно записать в форме

$$\psi(\sigma^{-1}\sigma)\equiv\psi(S^{k_2}U^{-n_p}S\ldots U^{-n_1}S^{k_1}\sigma)=(i^k\chi)^N\psi(\sigma)\tag{3.3}$$

если $\sigma$ представлено в форме (1.13). Поэтому достаточно показать, что для целых $m$

$$\psi(\sigma)=\psi(U^m\sigma)\tag{3.4}$$

и что

$$\psi(\sigma)=i^k\chi\psi(S\sigma).\tag{3.5}$$



Равенство (3.4) очевидно, поскольку $g(z,v)$ периодична по $z$ с периодом $\lambda$. Для доказательства (3.5) заменим во втором из уравнений (1.5) $z$ на $\sigma z$, $v$ на $\dfrac{v}{\gamma z+\delta}$, и умножим полученное равенство на

$$(\gamma z+\delta)^{-k}\exp\left(-2\pi i\lambda\gamma v^2/(\gamma z+\delta)\right).$$

В результате получим, что

$$\begin{aligned}\psi(\sigma)&=\frac{\chi}{\left(-i(\alpha z+\beta)\right)^k}\exp\left(-\frac{2\pi i\lambda\gamma v^2}{\gamma z+\delta}-\frac{2\pi i\lambda v^2}{(\gamma z+\delta)(\alpha z+\beta)}\right)g\left(-\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta},\frac{v}{\alpha z+\beta}\right)\\&=i^k\chi\psi\left(\begin{pmatrix}-\gamma & -\delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\right)=i^k\chi\psi\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right)=i^k\chi\psi(S\sigma).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Таким образом, (3.5) доказано, и повторное применение этого равенства вместе с (3.4) непосредственно дает (3.3).

Приступая к доказательству теоремы 3, положим в уравнении (3.1) $z=-\delta/\gamma+i\varepsilon$, $\varepsilon>0$, умножим обе части полученного равенства на $v^{k-1/2}\varphi(4\pi v/t)$, и проинтегрируем по $v$ в пределах от 0 до $+\infty$. В левой части проинтегрированного равенства получим

$$(4\pi)^{-3/2}\left\{\frac{t^{k+1/2}a(0)}{2^{k-1}\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty x^{k-1/2}\varphi(x)\,dx+t\sum_{n=1}^\infty n^{1/4-k/2}a(n)e^{\frac{-2\pi in\delta}{\lambda\gamma}-\frac{2\pi\varepsilon n}{\lambda}}\hat{\varphi}(t\sqrt{n})\right\}.\tag{3.7}$$

Законность почленного интегрирования следует из равномерной сходимости ряда $g(-\delta/\gamma+i\varepsilon,v)$ для всех $v\geqslant 0$. Так как $a(n)$ и $\hat{\varphi}(t\sqrt{n})$ растут не быстрее некоторой степени $n$, то ряд в (3.7) сходится для любого $\varepsilon>0$. Покажем, что существует предел этого ряда при $\varepsilon\to 0$ (в этом и состоит утверждение о суммируемости по Абелю). Для этого рассмотрим правую часть проинтегрированного равенства.

Результат интегрирования члена с $a(0)$ в правой части при $\varepsilon>0$ равен

$$\frac{(2\pi)^{k-1}\chi(\sigma)a(0)}{\Gamma(k)(i\gamma)^k}\int\limits_0^\infty e^{-2\pi\lambda v^2}\left(\frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k-1}\varphi\left(\frac{4\pi\sqrt{\varepsilon}v}{t}\right)\sqrt{v}\,dv.\tag{3.8}$$

Этот интеграл сходится равномерно по $\varepsilon$ для $\varepsilon\geqslant 0$ в силу предположения об абсолютной интегрируемости функции $x^{k-1/2}\hat{\varphi}(x)$. Поэтому к пределу $\varepsilon\to 0$ можно перейти под знаком интеграла, что дает для интеграла в (3.8) выражение

$$\left(\frac{4\pi}{t}\right)^{k-1/2}\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^{k-1/2}}\int\limits_0^\infty e^{-2\pi\lambda v^2}v^{2k-1}dv=\frac{\xi^k\sqrt{t}\,\Gamma(k)}{2^{k+2}\pi^k}\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^{k-1/2}}.\tag{3.9}$$

Далее, в силу предположения об абсолютной интегрируемости $x^{k-1/2}\hat{\varphi}$ ($\hat{\varphi}$ — трансформация Ганкеля функции $\varphi$ порядка $k-1$), интеграл

$$(3.10)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{J_{k-1}(xy)}{(xy)^{k-1}}\, y^{k-1/2}\hat{\varphi}(y)\,dy = \frac{\varphi(x)}{x^{k-1/2}}$$

сходится равномерно по $x$ для $x \geqslant 0$. Поэтому предел из (3.9) равен

$$(3.11)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^{k-1/2}} = \frac{1}{2^{k-1}\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty x^{k-1/2}\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Остальные слагаемые проинтегрированного равенства имеют вид

(3.12)

$$\frac{e^{-ik\pi/2}\chi(\sigma)}{\gamma\varepsilon}\sum_{n=1}^\infty n^{1/4-k/2}a(n)\,e^{2i\pi n\alpha/\lambda\gamma}\int\limits_0^\infty \sqrt{v}\,e^{-\frac{2\pi}{\varepsilon}\left(\lambda v^2+\frac{n}{\lambda\gamma^2}\right)} I_{k-1}\left(\frac{4\pi v\sqrt{n}}{\gamma\varepsilon}\right)\varphi\left(\frac{4\pi v}{t}\right)dv$$

где $I_{k-1}(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя порядка $k-1$, определяемая равенством

$$I_{k-1}(v) = e^{-i(k-1)\pi/2}J_{k-1}(ve^{i\pi/2}).$$

Воспользуемся интегральной формулой (2.8):

$$(3.13)\qquad \int\limits_0^\infty e^{-2\pi\lambda v^2/\varepsilon-2\pi n/\lambda\gamma^2\varepsilon} I_{k-1}\left(\frac{4\pi v\sqrt{n}}{\gamma\varepsilon}\right)v^k\,dv = \frac{\varepsilon n^{(k-1)/2}}{4\pi(\lambda\gamma)^k}.$$

Тогда $n$-тый интеграл в (3.12) (обозначим его $\Phi_n$) можно записать в виде

$$(3.14)\qquad \Phi_n = \frac{\varepsilon(\xi t)^{1/2}n^{-1/4}}{(4\pi)^{3/2}}\varphi(\xi\sqrt{n}) +$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-\frac{2\pi}{\varepsilon}\left(\lambda v^2+\frac{n}{\lambda\gamma^2}\right)} I_{k-1}\left(\frac{4\pi v\sqrt{n}}{\gamma\varepsilon}\right)\left\{\varphi\left(\frac{4\pi v}{t}\right)-\left(\frac{4\pi v}{t\xi\sqrt{n}}\right)^{k-1/2}\varphi(\xi\sqrt{n})\right\}\sqrt{v}\,dv.$$

Так как для всех $v>0$ $I_{k-1}(v) < e^v/\sqrt{v}$ (для вещественных $v>0$, $k>0$, $I_{k-1}(v)$ положительна), то интеграл в правой части (3.14) оценивается величиной

$$(3.15)\qquad \tilde{\Phi}_n(\varepsilon) = \frac{t\sqrt{\gamma\varepsilon}}{n^{1/4}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\lambda t^2}{8\pi\varepsilon}(v-\xi\sqrt{n})^2}\left|\varphi(v)-\left(\frac{v}{\xi\sqrt{n}}\right)^{k-1/2}\varphi(\xi\sqrt{n})\right|dv$$

(здесь сделана замена переменной интегрирования $v\to\dfrac{t}{4\pi}v$ и использована связь между параметрами $\xi t = 4\pi/\lambda\gamma$). По предположению (d)



теоремы 3

$$(3.16)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^\infty \tilde{\Phi}_n(\varepsilon)\,|a(n)|\,n^{1/2-k/2} = 0$$

а по условию (b) ряд с $\varphi(\xi\sqrt{n})$ сходится. Таким образом, предел при $\varepsilon\to 0$ правой части проинтегрированного равенства существует и теперь простое объединение полученных равенств дает (1.19).

**Литература**


[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Москва 1966.

[2] E. Hecke, *Dirichlet Series*, Institute for Advanced Study, Princeton 1938.

[3] Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues of the modular operators*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockholm 1962, стр. 270–284.

[4] A. Ogg, *Modular Forms and Dirichlet Series*, New-York–Amsterdam 1969.

[5] A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. VIII, Theory of Numbers, Amer. Math. Soc., Providence 1965, стр. 1–15.

[6] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т. 2, Москва 1969.


*Поступило 21. 1. 1974* (529)