ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

Уравнение Туэ–Малера в относительных полях

С. В. Котов (Минск)

Памяти Ю. В. Линника посвящается

1. Введение. Пусть $F(x,y)$ — целочисленная неприводимая бинарная форма степени $n \geqslant 3$, $p_1, \ldots, p_s$ — фиксированные простые числа. К. Малер [25], [26], [27] доказал, что диофантово уравнение

$$F(x,y) = p_1^{z_1} \ldots p_s^{z_s}, \quad (x,y) = 1, \tag{1}$$

где $x, y, z_1 \geqslant 0, \ldots, z_s \geqslant 0$ — неизвестные целые рациональные числа, имеет лишь конечное число решений. Этот результат был получен неэффективным методом и не позволял даже в принципе построить границу для решений уравнения (1).

А. Виноградов и В. Спринджук [1] указали способ эффективного анализа целочисленных решений диофантова уравнения

$$F(x,y) = Ap_1^{z_1} \ldots p_s^{z_s}, \quad (x,y) = 1, \tag{2}$$

где $A \neq 0$ — целое рациональное, которое содержит в себе уравнение (1) и носит название *уравнение Туэ–Малера*. Эффективный анализ уравнения (2), предложенный в работе [1], основан на оценках линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, полученных А. Бэйкером [17], [18], [19], [20], и p-адических аналогах таких оценок [6], [7]. Дж. Коутес [23], развивая рассуждения А. Бэйкера [21], [22] в применении к уравнению (2), получил оценку вида:

$$\max(|x|, |y|, p_1^{z_1}, \ldots, p_s^{z_s}) < \exp\{c_1(\ln|A|)^{\varkappa}\},$$

где $\varkappa > n(s+1)+1$, $c_1 > 0$ — эффективно определяемая величина, не зависящая от A. В. Спринджук под иным углом зрения провел эффективный анализ целочисленных решений (2). Используя тонкую связь между оценками линейных форм от логарифмов алгебраических чисел в различных метриках (архимедовой и неархимедовых), он установил [9], [10] для бинарных форм $F(x,y)$ степени $n \geqslant 4$ (1) оценку сле-

(1) При $n = 4$ бинарная форма $F(x,y)$ не должна быть „исключительной" в смысле [10].

дующего вида:

$$\max(|x|, |y|, p_1^{z_1}, \ldots, p_s^{z_s}) < \exp\{c_2 \ln|A| (\ln\ln|A|)^{4(s+n+1)}\},$$

где $c_2 > 0$ — величина, не зависящая от A и эффективно определяемая. Он отметил также [11], [12], что в этой оценке $\ln\ln|A|$ можно заменить постоянной величиной.

Для приложений важно знать, какое влияние оказывает „высота" H_F — максимум модулей коэффициентов формы $F(x, y)$ — на величину решений уравнения (2). В этом направлении Дж. Коутес [24] доказал, что все решения x, y уравнения (2) с условием $(x, y, p_1, \ldots, p_s) = 1$ удовлетворяют неравенству

$$\max(|x|, |y|) < \exp\{(\ln|A|)^{\varkappa} + 2^{\nu^2} P^{26\nu n^2} H_F^{2\nu n^3}\},$$

где $\varkappa > n(s+1)+1$, $\nu = 64n(s+1)\varkappa^2/(\varkappa - n(s+1)-1)$, $P = \max(p_1, \ldots, p_s)$. Недавно В. Спринджук [15] получил оценку с учетом влияния всех основных параметров уравнения (2):

$$(3)\qquad \max(|x|, |y|, p_1^{z_1}, \ldots, p_s^{z_s}) <$$
$$< \exp\Big\{(R + s\ln P)\Big(\big(c_3 P^{2g+1}(\ln|A| + \ln H_F + sh\ln P)\big)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} +$$
$$+ \big(c_4 \xi^{-1}(s+1)^3 P^{2(g+1)}(R + \ln P)\big)^{\frac{4(n+s+1)(1+\xi)}{\xi}}\Big)\Big\},$$

где R и h — соответственно регулятор и число классов идеалов поля алгебраических чисел, получаемого присоединением к полю рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ корня формы $F(x, y)$, $P = \max(p_1, \ldots, p_s)$, g — степень поля разложения формы, ξ — любое число из интервала $0 < \xi \leqslant 0{,}48$, величины $c_3 > 0$ и $c_4 > 0$ зависят только от n и эффективно определяются.

Уравнение (2) допускает обобщение на случай формы $F(x, y)$ с целыми алгебраическими коэффициентами из некоторого поля $\boldsymbol{K}$ алгебраических чисел конечной степени над полем $\boldsymbol{Q}$ и относительно неизвестных, лежащих в кольце $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ целых чисел поля $\boldsymbol{K}$. Исследование уравнения такого вида интересно само по себе и важно для приложений. Пусть $F(x, y)$ — бинарная форма степени $n \geqslant 3$ неприводимая над полем $\boldsymbol{K}$ и с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$; $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$; идеалы (β_l) — степени различных простых идеалов $\mathfrak{p}_l$, $(\beta_l) = \mathfrak{P}_l^{u_l}$, $u_l > 0$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$. Уравнение

$$(4)\qquad F(x, y) = \alpha\beta_1^{z_1} \ldots \beta_s^{z_s}, \qquad (x, y) = 1,$$

где $x, y \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, $z_1 \geqslant 0, \ldots, z_s \geqslant 0$ — целые рациональные числа, назовем *обобщенным уравнением Туэ–Малера*.

Обобщая результаты К. Малера [25], [26], [27] на относительные поля, К. Дж. Парри [28], [29] доказал, что если $F(x, y)$ — бинарная форма степени $n \geqslant 3$ с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ и с отличным от нуля дискриминантом, S — любое фиксированное множество простых идеалов в $\boldsymbol{K}$, $a \neq 0$ из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, то существует лишь конечное множество неассоциированных пар целых x, y в $\boldsymbol{K}$, для которых $F(x, y)$ делится только на простые идеалы из S, $(x, y) | (a)$. Иными словами, если $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ — простые идеалы из S, то уравнение

$$(5)\qquad \big(F(x, y)\big) = \mathfrak{P}_1^{z_1} \ldots \mathfrak{P}_s^{z_s}, \qquad (x, y) | (a)$$

в целых $x, y \in \boldsymbol{K}$ и целых рациональных $z_1 \geqslant 0, \ldots, z_s \geqslant 0$ имеет лишь конечное число решений, если не различать пары $\{x, y\}$ и $\{\varepsilon x, \varepsilon y\}$, где ε — единица из $\boldsymbol{K}$.

Уравнение (4) по форме аналогично уравнению Туэ–Малера (2), но на самом деле существенно отличаются от него, и известные способы эффективного анализа обычного уравнения Туэ–Малера [1], [9], [23] нуждаются в развитии, чтобы их можно было использовать для анализа (4). Основная особенность уравнения (4) заключается в том, что если $\boldsymbol{K}$ не совпадает с $\boldsymbol{Q}$ или с мнимым квадратичным полем, то в области его решений $\{x, y\}$ есть единицы бесконечного порядка. Как мы видели, эта особенность ярко проявляется на примере уравнения (5). В. Спринджук и автор [4] предложили способ для эффективного анализа обобщенного уравнения Туэ–Малера. Основное содержание этого способа состоит в сведении (4) к эффективному анализу уравнения

$$(6)\qquad F(x, y) = \tau\alpha\beta_1^{z_1} \ldots \beta_s^{z_s}, \qquad (x, y) = 1,$$

где τ — новая неизвестная, значения которой принадлежат группе единиц поля $\boldsymbol{K}$.

В этой статье дается детальный анализ целочисленных решений уравнения (6), когда $(x, y) | (a)$, a — фиксированное число из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, и выводится для $\max(\overline{|\eta x|}, \overline{|\eta y|}, p_1^{f_1 u_1 z_1}, \ldots, p_s^{f_s u_s z_s})$ оценка вида (3), где η — некоторая единица поля $\boldsymbol{K}$, $\overline{|\eta x|}$ — максимум модулей величин, сопряженных с x относительно поля $\boldsymbol{K}$ (аналогично $\overline{|\eta y|}$), $p_l^{f_l} = N(\mathfrak{P}_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$. Используемые рассуждения являются детальной реализацией схемы, указанной в работе [4].

2. Обозначения и формулировки теорем. В дальнейшем мы используем, в основном, стандартные обозначения.

$\boldsymbol{Q}$ — поле рациональных чисел; $\boldsymbol{K}$ — конечное расширение $\boldsymbol{Q}$ степени $[\boldsymbol{K}:\boldsymbol{Q}] = m$; $\boldsymbol{G}$ — поле разложения формы $F(x, y)$, $[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{Q}] = g$ и $[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{K}] = d$; $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}$ — кольцо целых чисел поля $\boldsymbol{G}$ (аналогично $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$); $D = D_{\boldsymbol{G}}$ — дискриминант, $h = h_{\boldsymbol{G}}$ — число классов идеалов, $R = R_{\boldsymbol{G}}$ —

регулятор поля G (аналогично $D' = D_{\boldsymbol{K}}$, $h' = h_{\boldsymbol{K}}$, $R' = R_{\boldsymbol{K}}$ для поля $\boldsymbol{K}$); $\overline{|a|} = \max\limits_{(i)}(|a^{(i)}|)$ — наибольшая из абсолютных величин всех сопряженных $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ — „размер" a; $h(a)$ — высота алгебраического числа a; H_F — максимальный из „размеров" коэффициентов бинарной формы $F(x, y)$ — „размер" формы $F(x, y)$.

Мы будем использовать без пояснений известные свойства функций $\overline{|a|}$ и $h(a)$ и взаимосвязь между ними [14].

Формулируемая ниже теорема содержит основной результат статьи и является „ключевой" для обоснования последующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть $F(x, y)$ — бинарная форма степени $n \geqslant 5$ с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ и неприводимая над полем $\boldsymbol{K}$, a — фиксированное число из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ и $(x, y)\,|\,(a)$. Существует такая единица $\eta \in \boldsymbol{K}$, что для всех целочисленных решений $x, y \in \boldsymbol{K}$, $z_1, \ldots, z_s$ уравнения* (6) *справедлива оценка*

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\ln\{\max(\overline{|\eta x|}, \overline{|\eta y|}, p_1^{f_1 u_1 z_1}, \ldots, p_s^{f_s u_s z_s})\} < \\ &< c_5 R'(R + sh\ln P)\Big\{\Big(c_6 P^{2g}\big(\ln|Nm(a)| + \\ &\quad + (\ln H_F + \ln|Nm(a)|)(R + h\ln P) + sh\ln P\big)\Big)^{(1+\xi)/(1-2\xi)} + \\ &\quad + \big(c_7\xi^{-1}(s+1)^3 P^{2(g+1)}(R + h\ln P)^2\big)^{c_8/\xi}\Big\}, \end{aligned}$$

где ξ — любое вещественное число интервала $0 < \xi < \frac{1}{2}$, положительные величины c_5, c_6, c_7 зависят только от степени поля $\boldsymbol{K}$, степени n формы $F(x, y)$ и эффективно определяются, $c_8 = 4(sd + g + 1)(1 + \xi)$.

Пусть θ — целое алгебраическое над полем $\boldsymbol{K}$ число степени $n \geqslant 5$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}(\theta)$, $A \neq 0$ — целое рациональное, $p_1, \ldots, p_s$ — фиксированный набор рациональных простых чисел, a — фиксированное число из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$. Рассмотрим уравнение

$$(8)\qquad N_{\boldsymbol{L}/\boldsymbol{Q}}(x + \theta y) = A p_1^{z_1} \ldots p_s^{z_s}, \quad (x, y)\,|\,(a),$$

где $x, y \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, $z_1 \geqslant 0, \ldots, z_s \geqslant 0$ — целые рациональные числа.

Имеет место

Теорема 2. *Существует такая единица $\eta \in \boldsymbol{K}$, что для всех целочисленных решений $x, y, z_1, \ldots, z_s$ уравнения* (8) *справедлива оценка*

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\ln\{(\overline{|\eta x|}, \overline{|\eta y|}, p^{z_1}, \ldots, p_s^{z_s})\} < \\ &< c_9 R'(R + sh\ln P)\Big\{\Big(c_{10} P^{2g}\big(\ln|A| + \\ &\quad + (\ln\overline{|\theta|} + \ln|Nm(a)|)(R + h\ln P) + (h + h')s\ln P\big)\Big)^{(1+\xi)/(1-2\xi)} + \\ &\quad + \big(c_7\xi^{-1}(s+1)^3 P^{2(g+1)}(R + h\ln P)^2\big)^{c_8/\xi}\Big\}, \end{aligned}$$

где величины c_7, c_8, c_9, c_{10} имеют тот же смысл, что и в (7).

Из результатов К. Малера [25], [26], [27] вытекает, что наибольший простой делитель $P(X)$ неприводимой бинарной формы $F(x, y)$ степени $n \geqslant 3$ с целыми рациональными коэффициентами возрастает с ростом $X = \max(|x|, |y|)$, где x, y — целые рациональные взаимно простые числа. Однако скорость этого возрастания долгое время установить не удавалось, поскольку проводимые рассуждения являлись неэффективными. Впервые на реальную возможность соответствующей эффективизации указал [8] В. Спринджук. Дж. Коутес [24] установил, что

$$P(X) > c_{11}(\ln\ln X)^{1/4}, \quad X \geqslant X_1,$$

где $c_{11} > 0$, X_1 — величины, зависящие только от формы $F(x, y)$ и эффективно определяемые. В. Спринджук [15] получил более точную оценку для $P(X)$. Он показал, что для бинарных форм $F(x, y)$ степени $n \geqslant 3$ ([2]) справедливо неравенство

$$P(X) > c_{12}\ln\ln X, \quad X \geqslant X_2,$$

где $c_{12} > 0$, X_2 — вычислимые величины, зависящие только от формы $F(x, y)$. Если анализировать произвольные целочисленные бинарные формы степени $n \geqslant 3$, имеющие по крайней мере три различных корня, то будет иметь место оценка

$$P(X) > c_{13}(\ln\ln X \cdot \ln\ln\ln X)^{1/2}, \quad X \geqslant X_3,$$

где $c_{13} > 0$ и X_3 эффективно определяются по $F(x, y)$ [15].

Рассмотрим теперь бинарную форму $F(x, y)$ степени $n \geqslant 5$ с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ и неприводимую над полем $\boldsymbol{K}$.

Теорема 3. *Пусть $F(x, y)$ — бинарная форма указанного вида. Тогда для наибольшей нормы $N(\mathfrak{P}) = P^f$ простых идеалов $\mathfrak{P}$, входящих в $F(x, y)$, справедлива оценка*

$$(10)\qquad N(\mathfrak{P}) > c_{14}(\ln\ln N)^f, \quad N \geqslant N_0,$$

где $N = \max(|Nm(x)|, |Nm(y)|)$, $(x, y) = 1$, $c_{14} > 0$ и N_0 — величины, зависящие только от поля $\boldsymbol{K}$, формы $F(x, y)$ и эффективно определяемые.

3. Вспомогательные утверждения и леммы. Для вывода оценки (7) мы применяем предложение 1 о связи между оценками линейных форм от логарифмов алгебраических чисел в различных метриках и его p-адический аналог — предложение 2.

([2]) При $n = 3$ бинарная форма $F(x, y)$ не должна быть „исключительной" в смысле [15]. См. также работу В. Спринджука *О наибольшем простом делителе бинарной формы*, Докл. АН БССР 15 (5) (1971), стр. 389–391.

Предложение 1. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n - n \geqslant 2$ — *отличных от нуля чисел поля* G, $\alpha_i \neq 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$; $h(\alpha_n) \leqslant A$, $h(\alpha_i) \leqslant B$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $A \geqslant 80g$ *и* $B \geqslant 80g$; $h_1, \ldots, h_{n-1}$ — *целые рациональные числа,* $\max\limits_{(i)}(|h_i|) \leqslant H$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, *где* $H \geqslant \exp\{2^{2g+1}\}$; $\delta, \xi > 0$ — *вещественные числа,* $0 < \delta \leqslant 1$, ξ^{-1} — *целое. Пусть, далее,* q — *простое число, удовлетворяющее неравенству*

$$2q^{2g} \leqslant H^{\xi/(n+1)(1+\xi)} \ln H,$$

$|\ldots|_q$ — *q-адическое нормирование* G, *индуцированное простым идеалом* $\mathfrak{q}$ *с нормой* $q^{\varkappa}$, $S = q^{2e\varkappa} - q^{(2e-1)\varkappa}$, $e = \operatorname{ord}_{\mathfrak{q}} q$; $|\alpha_1|_q = \ldots = |\alpha_{n-1}|_q = 1$.

Тогда из неравенства

$$|\alpha_n - \alpha_1^{h_1} \ldots \alpha_{n-1}^{h_{n-1}}| < e^{-\delta H} \tag{11}$$

при условии, что $|\alpha_n|_q \neq 1$ *и* $0 < \xi < \frac{1}{2}$ *следует*

$$H \leqslant (\ln A)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \big(c_{15}(\delta^{-1}+\xi^{-1}) g^2 n^2 \ln B\big)^{\frac{4(n+1)(1+\xi)}{\xi}}, \tag{12}$$

где c_{15} — *вычислимая абсолютная постоянная. Если же* $|\alpha_n|_q = 1$, *то из* (11) *следует*

$$H \leqslant (\ln A)^{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + \big(c_{16}(\delta^{-1}+\xi^{-1}) g^2 n^2 \ln B\big)^{\frac{4(n+1)(1+\xi)}{\xi}}, \tag{13}$$

где c_{16} — *вычислимая абсолютная постоянная, для любого* ξ *из интервала* $0 < \xi < 1$ *при условии, что*

$$|\log(\alpha_n^S) - h_1 \log(\alpha_1^S) - \ldots - h_{n-1} \log(\alpha_{n-1}^S)|_q > q^{-H^{\frac{1-\xi}{1+\xi}}}, \tag{14}$$

где $\log(\ldots)$ *означает q-адический логарифм, определенный в метрике* $|\ldots|_q$.

Впервые предложение 1 приведено в [13] (теорема 2), а его подробное доказательство изложено в [14] (теорема 1).

Предложение 2. *Пусть выполняются предпосылки предыдущего предложения;* q — *простое число, удовлетворяющее неравенству*

$$2q^{2g} \leqslant H^{\xi/(n+1)(1+\xi)}, \tag{15}$$

p — *простое число* $(p \neq q)$ *такое, что*

$$p \leqslant \ln H \tag{16}$$

и в поле G *определено p-адическое нормирование* $|\ldots|_p$, *причем*

$$|\alpha_i^T - 1|_p < p^{-\frac{1}{p-1}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{17}$$

где T — *некоторое натуральное число.*

Тогда для p-адических чисел $\alpha^{Th_i} = \exp\big(h_i \log(\alpha_i^T)\big)$ *из неравенства*

$$|\alpha_n^T - \alpha_1^{Th_1} \ldots \alpha_{n-1}^{Th_{n-1}}|_p < p^{-\delta H}, \tag{18}$$

при условии, что $|\alpha_n|_q \neq 1$ *и* $\dfrac{8(n+1)\ln\ln H}{\ln H} \leqslant \xi < \frac{1}{2}$, *следует*

$$H \leqslant \big(T \ln(gA)\big)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \big(c_{17}\delta^{-1} g^2 p n \ln(gB)\big)^{\frac{4(n+1)(1+\xi)}{\xi}}, \tag{19}$$

где c_{17} — *вычислимая абсолютная постоянная. Если же* $|\alpha_n|_q = 1$, *то из* (18) *следует*

$$H \leqslant \big(T \ln(gA)\big)^{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + \big(c_{18}\delta^{-1} g^2 p n \ln(gB)\big)^{\frac{4(n+1)(1+\xi)}{\xi}}, \tag{20}$$

где c_{18} — *вычислимая абсолютная постоянная, для любого* ξ *из интервала* $\dfrac{8(n+1)\ln\ln H}{\ln H} \leqslant \xi < 1$ *при условии, что выполняется* (14).

Доказательство предложения 2 подобно доказательству теоремы 2 из работы [9], при этом необходимо сделать те изменения в выборе основных параметров, о которых сказано в [14].

Укажем иную, более компактную, запись условия (14). Из того, что

$$|\alpha_i^{Sh_i} - 1|_q \leqslant q^{-e_q} < q^{-\frac{1}{q-1}}$$

следует

$$|\alpha_i^{Sh_i} - 1|_q = |\exp(h_i \alpha_i^S) - 1|_q = |h_i \log(\alpha_i^S)|_q$$

$(1 \leqslant i \leqslant n,\ h_n = 1)$ и (14) равносильно неравенству

$$|(\alpha_1^{h_1} \ldots \alpha_{n-1}^{h_{n-1}} \alpha_n^{-1})^S - 1|_q > q^{-H^{\frac{1-\xi}{1+\xi}}}. \tag{21}$$

В дальнейшем через $c_{19}, c_{20}, \ldots$ мы будем обозначать положительные величины, зависящие только от m — степени поля K и n — степени бинарной формы $F(x, y)$ (в противном случае будет оговорено) и эффективно определяемые.

Нам окажутся полезными следующие леммы.

Лемма 1. *Существуют такие независимые алгебраические единицы* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ $(k \leqslant g-1)$ *поля* G, *что все элементы матрицы*

$$(\ln|\varepsilon_j^{(\sigma)}|)_{j,\sigma=1,\ldots,k}$$

по абсолютной величине не превосходят $c_{19}R$, *а элементы обратной матрицы не превосходят* c_{20}, *при этом*

$$R < c_{21}|D|^{1/2}(\log|D|)^{g-1}. \tag{22}$$

Справедливость леммы вытекает из результатов работы [30].

Очевидно, что единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ порождают группу $\boldsymbol{E}$, которая является подгруппой $\boldsymbol{E_G}$ — группы единиц поля $\boldsymbol{G}$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in \boldsymbol{G}$, $Nm(\alpha) = A \neq 0$. *Тогда существует такая единица* $\varepsilon \in \boldsymbol{E}$, *что*

$$\alpha^{(\sigma)}\varepsilon^{(\sigma)} = |A|^{1/g}e^{\delta(\sigma)}, \quad |\delta(\sigma)| \leqslant M \quad (1 \leqslant \sigma \leqslant g),$$

где $M = c_{22}R$ *и для* R *верна оценка* (22).

Доказательство следует из леммы 1 и рассуждений описанных в доказательстве леммы 4.5 из [14].

Заметим, что относительно поля $\boldsymbol{K}$ леммы 1 и 2 имеют свои аналоги.

Лемма 3. *Если* $\alpha \in \boldsymbol{G}$, S — *натуральное число*, $|\ldots|_q$ — *q-адическое нормирование поля* $\boldsymbol{G}(\zeta_0)$, ζ_0 — *первообразный корень степени* S *из* 1, *то*

$$|\alpha - \zeta|_q = |\alpha^S - 1|_q |S|_q^{-1},$$

где ζ — *некоторый корень степени* S *из* 1.

Доказательство см. в [14], лемма 1.6.

Лемма 4. *Пусть* α — *целое алгебраическое число, отличное от нуля. Тогда*

$$|\alpha|_q |Nm(\alpha)| \geqslant 1,$$

где $|\ldots|_q$ — *q-адическая норма.*

Доказательство следует из „формулы произведения" (см. [5], стр. 91).

Лемма 5. *Пусть* θ — *алгебраическое над полем* $\boldsymbol{K}$ *число степени* $n \geqslant 4$, $\theta_2, \ldots, \theta_n$ — *сопряженные числа с* $\theta = \theta_1$ *относительно* $\boldsymbol{K}$; S — *натуральное число*; $|\ldots|_q$ — *q-адическое нормирование поля* $\boldsymbol{K}(\theta_1, \ldots, \theta_n, \zeta_0)$, *где* ζ_0 — *первообразный корень степени* S *из* 1, ζ_i — *произвольные различные корни степени* S *из* 1 $(3 \leqslant i \leqslant n)$, *отличные от* 1. *Если выражение*

$$\zeta_{ij} = (1-\zeta_i)\frac{\theta_2 - \theta_i}{\theta_1 - \theta_i} - (1-\zeta_j)\frac{\theta_2 - \theta_j}{\theta_1 - \theta_j}$$

отлично от нуля, то

$$|\zeta_{ij}|_q \geqslant c_{23}\big(h(\theta)\big)^{-c_{24}S}.$$

Доказательство см. в [14], лемма 2.6.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{p}$ — *простой идеал в* $\boldsymbol{G}$, T — *натуральное число*, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{G}$, *причем*

$$(\alpha, \mathfrak{p}) = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha - \beta) > \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} T.$$

Тогда

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha^T - \beta^T) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha - \beta) + \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} T.$$

Доказательство см. в [9], лемма 3.5.

Дадим следующие определения.

Алгебраическое над полем $\boldsymbol{K}$ число θ степени $n \geqslant 4$ называется *исключительным*, если существует такая нумерация его сопряженных $\theta_1, \ldots, \theta_n$ относительно поля $\boldsymbol{K}$, что выполняются равенства

$$\frac{\theta_1 - \theta_i}{\theta_2 - \theta_i} \cdot \frac{\theta_2 - \theta_j}{\theta_1 - \theta_j} = \frac{1 - \zeta_i}{1 - \zeta_j} \tag{23}$$

для любых индексов i, j $(i \neq j;\ 3 \leqslant i,\ j \leqslant n)$, где $\zeta_i, \zeta_j \neq 1$ — некоторые различные корни из 1.

Бинарная форма $F(x, y)$ степени $n \geqslant 4$ с коэффициентами из $\boldsymbol{Z_K}$ называется *исключительной*, если ее корни являются исключительными числами.

Имеет место

Лемма 7. *Если* $F(x, y)$ — *неприводимая над полем* $\boldsymbol{K}$ *бинарная форма степени* $n \geqslant 5$, *то она не является „исключительной".*

Доказательство проводится по аналогии с рассуждениями, приведенными в [12], лемма 1.4.

4. Анализ уравнения (6). Пусть

$$F(x, y) = a_0(x - \theta_1' y) \ldots (x - \theta_n' y) \tag{24}$$

— разложение формы $F(x, y)$ в поле $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{K}(\theta_1', \ldots, \theta_n')$, $[\boldsymbol{G} : \boldsymbol{Q}] = g$. Учитывая равенство (6), производим в $\boldsymbol{Z_G}$ разложение на идеалы правой части (24):

$$\big(a_0(x - \theta_1' y) \ldots (x - \theta_n' y)\big) = (\alpha)\mathfrak{p}_1^{U_1} \ldots \mathfrak{p}_t^{U_t}, \tag{25}$$

простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ входят в простые в $\boldsymbol{Z_K}$ идеалы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l$ и $t \leqslant sd$, где $[\boldsymbol{G} : \boldsymbol{K}] = d$. Умножаем обе части (25) на идеал $(a_0)^{n-1}$ и положим $\theta_i = a_0\theta_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $x' = a_0 x$, $y' = y$. Можем записать

$$(x' - \theta_i y') = \mathfrak{a}_i \mathfrak{p}_1^{U_{1i}} \ldots \mathfrak{p}_t^{U_{ti}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{26}$$

где идеал $\mathfrak{a}_i | (a_0^{n-1}\alpha)$, $U_{li} \leqslant U_l$ $(1 \leqslant l \leqslant t)$.

Полагая $U_{li} = hu_{li} + r_{li}$, $0 \leqslant r_{li} < h$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant t)$, из (26) получаем

$$(x' - \theta_i y') = (\pi_i \varrho_1^{u_{1i}} \ldots \varrho_t^{u_{ti}}), \tag{27}$$

$(\varrho_l) = \mathfrak{p}_l^h$ и $(\pi_i) = \mathfrak{a}_i \mathfrak{p}_1^{r_{1i}} \ldots \mathfrak{p}_t^{r_{ti}}$ — главные идеалы, причем $\varrho_l, \pi_i \in \boldsymbol{Z_G}$. Так как

$$N_{\boldsymbol{G}}(\pi_i) = N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{a}_i) \prod_{l=1}^{n} N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{p}_l^{r_{li}}),$$

то можно считать в силу леммы 2 (в результате умножения на подходящую единицу поля G), что

$$(28)\qquad \overline{|\pi_i|} \leqslant \Big(|Nm_{K}(\alpha)|^d \big(\max_{(l)} N_G(\mathfrak{p}_l)\big)^{sd(h-1)}\Big)^{1/g} e^M < \\ < |Nm_K(\alpha)| P^{shg} e^M \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где $N_G(\mathfrak{p}_l) = p_l^{f'_l}$ (3) $(1 \leqslant f'_l \leqslant g)$, $P = \max_{(l)}(p_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant t)$. Также устанавливаем, что

$$(29)\qquad \overline{|\varrho_l|} \leqslant \big(\max_{(l)} N_G(\mathfrak{p}_l)\big)^{(h-1)/g} e^M < P^h e^M.$$

Переходя после подобной „нормировки" (4) от равенства идеалов в (27) к равенству чисел, имеем

$$(30)\qquad x' - \theta_i y' = \pi_i \varrho_1^{u_{1i}} \ldots \varrho_t^{u_{ti}} \varepsilon'_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где $\varepsilon'_i \epsilon \boldsymbol{E}$.

Отметим следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Пусть $\varepsilon' = \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_n = \varepsilon_1^{W_1} \ldots \varepsilon_k^{W_k}$. Полагаем $W_j = nw_j + v_j$, $0 \leqslant v_j < n$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ и $\varepsilon = \varepsilon_1^{-w_1} \ldots \varepsilon_k^{-w_k}$. Тогда

$$(31)\qquad \varepsilon^n \varepsilon' = \varepsilon_1^{v_1} \ldots \varepsilon_k^{v_k}$$

и $\varepsilon\varepsilon'_i = \varepsilon_1^{v_{1i}} \ldots \varepsilon_k^{v_{ki}}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В силу (31) можем записать, что

$$(32)\qquad \sum_{i=1}^{n} v_{ji} = v_j < n \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Умножая обе части (30) на ε, получаем

$$(33)\qquad X - \theta_i Y = \pi_i \varrho_1^{u_{1i}} \ldots \varrho_t^{u_{ti}} \varepsilon_1^{v_{1i}} \ldots \varepsilon_k^{v_{ki}} = \mu_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где $X = \varepsilon x'$, $Y = \varepsilon y'$, причем выполняются неравенства (28), (29) и (32). Из (33), исключая X и Y, получаем систему равенств

$$(34)\qquad (\theta_j - \theta_l)\mu_i - (\theta_i - \theta_l)\mu_j - (\theta_j - \theta_i)\mu_l = 0$$

при любых различных индексах i, j, l $(1 \leqslant i, j, l \leqslant n)$.

Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы найти оценку сверху для

$$H = \max_{(i,j,l)} (|u_{li}|, |v_{ji}|)$$

$(1 \leqslant l \leqslant t,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$, позволяющую оценить $\overline{|\mu_i|}$.

---

(3) Заметим, что $N(\mathfrak{P}) = N_K(\mathfrak{P}) = P^f$ и $f | f'$ поскольку $N_G(\mathfrak{p}) = N_K(N_{G/K}(\mathfrak{p})) = P^{f'}$ (см., например, [2], стр. 144–146).

(4) После „нормировки" мы сохраним прежние обозначения, чтобы не усложнять записи.

Без ограничения общности можем считать, что $u_{12} = \max_{(l,i)}(|u_{li}|)$. Из (34) выделяем подсистему

$$(35)\qquad (\theta_2 - \theta_1)\mu_i - (\theta_i - \theta_1)\mu_2 - (\theta_2 - \theta_i)\mu_1 = 0 \quad (3 \leqslant i \leqslant n).$$

Допустим, что

$$(36)\qquad \mathfrak{p}_1^u \| \big((\theta_2 - \theta_i)\pi_1 \varrho_1^{u_{1i}}, \varrho_1^{u_{12}}\big),$$

тогда

$$\mathfrak{p}_1^{u - hu_{11} - r_{11}} | (\theta_2 - \theta_i)\mathfrak{a}_1,$$

следовательно, $\mathfrak{p}_1^{u-hu_{11}-r_{11}}$ входит в $Nm_G(\theta_2 - \theta_i) N_G(\mathfrak{a}_1)$. Так как $|Nm_G(\theta_2 - \theta_i)| \leqslant (2nH_F)^g$, а $N_G(\mathfrak{a}_1) \leqslant |Nm_G(a_0^{n-1}\alpha)| \leqslant H_F^{(n-1)g} |Nm_K(\alpha)|^d$, то

$$(37)\qquad u \leqslant 1/\ln 2 \big(g \ln 2n + gnH_F + d \ln |Nm_K(\alpha)|\big) + hu_{11} + r_{11}.$$

По предложению $u_{12} \geqslant u_{1i}$, поскольку $\mathfrak{p}_1^{hu_{1i}}$ входит в идеалы $(X - \theta_2 Y)$ и $(X - \theta_i Y)$ $(i \neq 2;\ 1 \leqslant i \leqslant n)$, следовательно, в $\big((\theta_2 - \theta_i)Y\big)$. Пусть $\mathfrak{p}_1^{u'} \| (Y)$ и $u'_i = \min(u', hu_{1i})$. Рассмотрим случай, когда $u'_i = hu_{1i}$ (или $hu_{1i} \leqslant u'$). Поскольку $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1}(X - \theta_i Y) \geqslant \min\big(\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1}(X), \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\theta_i Y)\big)$, то $\mathfrak{p}_1^{hu_{1i}} | (X)$ и $\mathfrak{p}_1^{hu_{1i}} | (X, Y)$. Так как $(X, Y) = (a_0 x, y)$ и $(a_0 x, y) | a_0 a$, то

$$hu_{1i} \leqslant 1/\ln 2 \big(g \ln H_F + d \ln |Nm_K(\alpha)|\big).$$

Рассматривая второй случай: $u'_i = u'$ (или $u' < hu_{11}$) и аналогично рассуждая, находим $u' \leqslant 1/\ln 2 \big(g \ln H_F + d \ln |Nm_K(\alpha)|\big)$. Далее, $\mathfrak{p}_1^{hu_{1i} - u'_i} | (\theta_2 - \theta_i)$, тогда $\mathfrak{p}_1^{hu_{1i} - u'_i}$ входит в $Nm_G(\theta_2 - \theta_i)$ и $hu_{1i} - u'_i \leqslant g/\ln 2 (\ln 2n + \ln H_F)$. Таким образом,

$$hu_{1i} \leqslant 1/\ln 2 \big(g \ln 2n + 2g \ln H_F + d \ln |Nm_K(\alpha)|\big) \quad (i \neq 2;\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Учитывая, что $r_{1i} < h$, из (37) заключаем,

$$u < c_{25}\big(\ln H_F + \ln |Nm_K(\alpha)| + \ln |Nm_K(\alpha)|\big) + h \doteq U.$$

Если $hu_{12} \leqslant U$, то мы имеем удовлетворительную оценку для u_{12}. Если же $hu_{12} > U$, то из (36) следует, что

$$\mathfrak{p}_1^u \| \big((\theta_2 - \theta_i)\pi_1 \varrho_1^{u_{11}}\big).$$

Отсюда, в силу (35), имеем

$$\mathfrak{p}_1^u \| \big((\theta_2 - \theta_1)\pi_i \varrho_1^{u_{1i}}\big)$$

и $\mathfrak{p}_1$ не входит в отношение

$$\frac{(\theta_2 - \theta_1)\pi_i}{(\theta_2 - \theta_i)\pi_1} \varrho_1^{u_{1i} - u_{11}}$$

для любого индекса $i = 3, \ldots, n$.

Из (35) заключаем, что

$$(38)\qquad 1-\frac{(\theta_2-\theta_1)\mu_i}{(\theta_2-\theta_i)\mu_1}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{hu_{12}-U}},$$

где

$$\frac{(\theta_2-\theta_1)\mu_i}{(\theta_2-\theta_i)\mu_1}=\left[\frac{(\theta_2-\theta_1)\pi_i}{(\theta_2-\theta_i)\pi_1}\varrho_1^{u_{1i}-u_{11}}\right]\prod_{l=2}^{t}[\varrho_l]^{u_{li}-u_{l1}}\prod_{j=1}^{k}[\varepsilon_j]^{v_{ji}-v_{j1}},$$

$$\max_{(i,j,l)}(|u_{li}-u_{l1}|,|v_{ji}-v_{j1}|)\leqslant 2H\qquad (3\leqslant i\leqslant n)$$

и каждое число в прямых скобках есть $\mathfrak{p}_1$-адическая единица. Нам необходимо получить в неархимедовой (p_1-адической) метрике оценку снизу для выражения, стоящего в левой части (38). Для этого используем предложение 2, предварительно проверив выполнение его условий.

Из (28) и (29) следует, что

$$h(\pi_i)\leqslant\left(2|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|P^{shg}e^M\right)^g<\left(|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|P^{sh}e^M\right)^{c_{26}}\qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

и

$$h(\varrho_l)\leqslant(2P^he^M)^g<(P^he^M)^{c_{27}}\qquad (1\leqslant l\leqslant t).$$

Высоты чисел $\theta_2-\theta_1$ и $\theta_2-\theta_i$ не превосходят $(4nH_F)^g$. Так как

$$|u_{11}-u_{1i}|<c_{28}\left(\ln H_F+\ln|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|\right)=U',$$

то

$$h(\varrho_1^{u_{11}-u_{1i}})<(P^he^M)^{c_{29}U'}\qquad (i\neq 2;\ 1\leqslant i\leqslant n).$$

Следовательно,

$$h\left(\frac{(\theta_2-\theta_i)\pi_1}{(\theta_2-\theta_1)\pi_i}\varrho_1^{u_{11}-u_{1i}}\right)<\left(|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|P^{h(s+U')}e^{MU'}H_F\right)^{c_{30}}\qquad (3\leqslant i\leqslant n).$$

В силу оценок леммы 1 имеем

$$h(\varepsilon_j)\leqslant(2e^{c_{19}R})^g<e^{c_{31}R}\qquad (1\leqslant j\leqslant k).$$

Полагаем

$$(39)\qquad A=\left(|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|P^{h(s+U')}e^{MU}H_F\right)^{c_{30}}$$

и

$$(40)\qquad B=\max\left((P^he^M)^{c_{27}},e^{c_{31}R}\right).$$

Пусть $|\ldots|_{p_1}$ — p_1-адическое нормирование поля $\boldsymbol{G}$, индуцированное простым идеалом $\mathfrak{p}_1$ с нормой $N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{p}_1)=p_1^{f_1'}$. Считаем, что p_1 удовлетворяет неравенству (16) ибо в противном случае сразу получаем оценку сверху для H. Пусть, далее, $T=p_1^{2e_1f_1'}-p_1^{(2e_1-1)f_1'}$, где $e_1=$

$=\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1}p_1$. Очевидно, что

$$\left|\left(\frac{(\theta_2-\theta_i)\pi_1}{(\theta_2-\theta_1)\pi_i}\varrho_1^{u_{11}-u_{1i}}\right)^T-1\right|_{p_1}<p_1^{-\frac{1}{p_1-1}}\qquad (3\leqslant i\leqslant n),$$

$$|\varrho_l^T-1|_{p_1}<p_1^{-\frac{1}{p_1-1}}\qquad (2\leqslant l\leqslant t)$$

и

$$|\varepsilon_j^T-1|_{p_1}<p_1^{-\frac{1}{p_1-1}}\qquad (1\leqslant j\leqslant k).$$

Пусть q — простое число, удовлетворяющее неравенству $P<q<2P$ (такое q существует, см. [16], стр. 849), $|\ldots|_q$ — q-адическое нормирование поля $\boldsymbol{G}$, индуцированное некоторым простым делителем q в $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}$. Можно считать, что выполняется условие (15), налагаемое на q, так как в противном случае мы имеем сразу оценку сверху для H.

Предположим, что H не удовлетворяет ни одному из неравенств (19) или (20) с A и B, определенными (39) и (40) соответственно. Согласно формулировке предложения 2, рассматриваем возможности: или

$$(41)\qquad \left|\frac{(\theta_2-\theta_i)\pi_1}{(\theta_2-\theta_1)\pi_i}\varrho_1^{u_{11}-u_{i1}}\right|_q\neq 1$$

для некоторого индекса i $(3\leqslant i\leqslant n)$, или же эта норма равна 1.

Допустим, что выполняется (41). Тогда имеет место неравенство

$$(42)\qquad \left|1-\left(\frac{(\theta_2-\theta_1)\mu_i}{(\theta_2-\theta_i)\mu_1}\right)^T\right|_{p_1}\geqslant p_1^{-2\delta H}$$

для хотя бы одного индекса i $(3\leqslant i\leqslant n)$ при

$$(43)\qquad H>\tfrac{1}{2}\left(T\ln(gA)\right)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}}+\tfrac{1}{2}\left(c_{17}\delta^{-1}g^2p_1(sd+g-1)T\ln(gB)\right)^{\frac{4(sd+g)(1+\xi)}{\xi}},$$

если $\dfrac{8(sd+g-1)\ln\ln H}{\ln H}\leqslant\xi<\dfrac{1}{2}$.

Теперь предположим, что ни при каком индексе $i=3,\ldots,n$ не выполняется (41). Для дальнейшего применения предложения 2 необходимо установить неравенство

$$(44)\qquad \left|\log\left(\left(\frac{(\theta_2-\theta_i)\pi_1}{(\theta_2-\theta_1)\pi_i}\varrho_1^{u_{11}-u_{1i}}\right)^S\right)-\sum_{l=2}^{t}(u_{li}-u_{l1})\log(\varrho_l^S)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{k}(v_{ji}-v_{j1})\log(\varepsilon_j^S)\right|_q>q^{-(2H)^{\frac{1-\xi}{1+\xi}}}$$

для какого-либо индекса i $(3 \leqslant i \leqslant n)$, где $\log(\ldots)$ — q-адический логарифм в метрике $|\ldots|_q$, S определено в формулировке предложения 2.

Допустим, что справедливо неравенство, противоположное (43). Учитывая это, в силу (21) можем записать

$$(45)\qquad \left|\left(\frac{(\theta_2-\theta_1)\mu_i}{(\theta_2-\theta_i)\mu_1}\right)^S - 1\right|_q \leqslant q^{-(2H)^{\frac{1-\xi}{1+\xi}}} \quad (3 \leqslant i \leqslant n).$$

Рассмотрим поле $G(\zeta_0)$, где ζ_0 — первообразный корень степени S из 1 и $|\ldots|_q$ — продолжение q-адического нормирования $|\ldots|_q$ из G на $G(\zeta_0)$. Применим к (45) лемму 3. Получаем

$$\left|\frac{(\theta_2-\theta_1)\mu_i}{(\theta_2-\theta_i)\mu_1} - \zeta_i\right|_q \leqslant |S|_q^{-1} q^{-(2H)^{\frac{1-\xi}{1+\xi}}} = q^{-\nu}$$

для некоторого корня ζ_i $(3 \leqslant i \leqslant n)$ степени S из 1. Принимая во внимание (34), находим

$$(46)\qquad \left|(1-\zeta_i)\frac{\theta_2-\theta_i}{\theta_1-\theta_i} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right|_q \leqslant q^{-(\nu+\nu_i)},$$

где

$$q^{-\nu_i} = \left|\frac{\theta_2-\theta_i}{\theta_1-\theta_i}\right|_q \quad (3 \leqslant i \leqslant n).$$

Заметим, что $\zeta_i \neq 1$ при любом индексе $i = 3, \ldots, n$. Действительно, если $\zeta_i = 1$, то из (46) следует:

$$|\mu_2|_q \leqslant |\mu_1|_q q^{-(\nu+\nu_i)} \leqslant q^{-(\nu+\nu_i)}.$$

Так как

$$|\mu_2|_q \geqslant |Nm_G(a_0 a)|^{-1} \geqslant H_F^{-g} |Nm_K(a)|^{-d},$$

то

$$(47)\qquad \nu+\nu_i \leqslant 1/\ln q\big(g \ln H_F + d \ln |Nm_K(a)|\big).$$

Поскольку $(\theta_2-\theta_i)$ — целое, то $|\theta_2-\theta_i|_q \leqslant 1$. Далее, по лемме 4

$$|\theta_1-\theta_i|_q \geqslant |Nm_G(\theta_1-\theta_i)|^{-1} \geqslant (2nH_F)^{-g}.$$

Таким образом,

$$\nu_i \geqslant g/\ln q(\ln 2n + \ln H_F) \quad (3 \leqslant i \leqslant n)$$

и из (47) следует

$$\nu \leqslant 1/\ln q\big(d \ln |Nm_K(a)| - g \ln 2n\big)$$

или

$$(48)\qquad H < \tfrac{1}{2}\big(1/\ln q\big(d \ln |Nm_K(a)| - g \ln 2\big) + 2g\big)^{\frac{1+\xi}{1-\xi}},$$

поскольку $|S|_q^{-1} \leqslant S < q^{2g}$. Мы считаем, что выполняется неравенство, противоположное (48), иначе имеем сразу удовлетворительную оценку сверху для H. Следовательно, $\zeta_i \neq 1$ $(3 \leqslant i \leqslant n)$ и из (46) мы выводим

$$(49)\qquad \left|(1-\zeta_i)\frac{\theta_2-\theta_i}{\theta_1-\theta_i} - (1-\zeta_j)\frac{\theta_2-\theta_j}{\theta_1-\theta_j}\right|_q \leqslant q^{-(\nu+\nu')},$$

где $\nu' = \min\limits_{(i,j)}(\nu_i, \nu_j)$, для любой пары индексов i, j $(i \neq j;\ 3 \leqslant i, j \leqslant n)$. Можем считать, что

$$(50)\qquad (1-\zeta_i)\frac{\theta_2-\theta_i}{\theta_1-\theta_i} - (1-\zeta_j)\frac{\theta_2-\theta_j}{\theta_1-\theta_j} = 0.$$

Если же допустить, противное, то, применяя лемму 5, получаем

$$H \leqslant \tfrac{1}{2}(c_{32} q^{2g}/\ln q \ln H_F + 2g)^{\frac{1+\xi}{1-\xi}}.$$

Мы приходим к удовлетворительной оценке сверху для H. Поэтому предполагаем справедливость (50), откуда

$$(51)\qquad \frac{\theta_1-\theta_i}{\theta_2-\theta_i}\cdot\frac{\theta_2-\theta_j}{\theta_1-\theta_j} = \frac{1-\zeta_i}{1-\zeta_j},$$

где $\zeta_i, \zeta_j \neq 1$ — различные корни степени S из 1 $(i \neq j;\ 3 \leqslant i, j \leqslant n)$. Но по условию теоремы 1 бинарная форма $F(x, y)$ неприводима над K и имеет степень $n \geqslant 5$, следовательно, в силу леммы 7 равенства (51) не имеют места. Таким образом, наше допущение противоречиво и справедливо неравенство (44).

Тогда, на основании предложения 2, выполняется (42) при

$$(52)\qquad H > \tfrac{1}{2}\big(T \ln(gA)\big)^{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + \tfrac{1}{2}\big(c_{18}\delta^{-1} g^2 p_1 (sd+g-1)\ln(gB)\big)^{\frac{4(sd+g)(1+\xi)}{\xi}},$$

если $\dfrac{8(sd+g-1)\ln\ln H}{\ln H} \leqslant \xi < 1$.

Из сравнения (38) по лемме 6 находим, что

$$(53)\qquad \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1}\left(1-\left(\frac{(\theta_2-\theta_1)\mu_i}{(\theta_2-\theta_i)\mu_1}\right)^T\right) = hu_{12} - U + \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1} T,$$

поскольку $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1} T = \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1} p_1^{(2e_1-1)f_1'} = e_1(2e_1-1)f_1' < 2g^3 < hu_{12} - U$. Из (42) и (53) заключаем, что $hu_{12} - U + \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_1} T \leqslant 2\delta H$. Таким образом, мы устанавливаем, что $u_{12} < 2\delta H + U$, или

$$(54)\qquad u_{li} < 3\delta H \quad (1 \leqslant l \leqslant t,\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Следующая наша задача состоит в том, чтобы получить оценку сверху для $|v_{ji}|$ $(1 \leqslant j \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$.

Обратимся вновь к системе равенств (34), не фиксируя, вначале, индексы i, j, l. Допустим, что $|v_{12}| = \max\limits_{(i,j)}(|v_{ji}|)$ $(1 \leqslant j \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$. Полагаем $V_{ji} = v_{j2} - v_{ji}$, $V_i^! = \max\limits_{(j)}(|V_{jl}|)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ и

$$V_1 = \max_{(i)}(V_i) \quad (i \neq 2;\ 1 \leqslant i \leqslant n). \tag{55}$$

С учетом этого, выделяем из (34) подсистему [5]

$$(\theta_2 - \theta_1)\mu_i - (\theta_i - \theta_1)\mu_2 - (\theta_2 - \theta_i)\mu_1 = 0 \quad (3 \leqslant i \leqslant n). \tag{56}$$

Переходя к сопряженным с полем $G = G^{(1)}$ полям $G^{(2)}, \ldots, G^{(g)}$, получаем из (56) систему равенств

$$1 - \frac{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\mu_i^{(\sigma)}}{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_i^{(\sigma)})\mu_1^{(\sigma)}} = \frac{(\theta_i^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\mu_2^{(\sigma)}}{(\theta_i^{(\sigma)} - \theta_2^{(\sigma)})\mu_1^{(\sigma)}} \tag{57}$$

для каждого σ $(1 \leqslant \sigma \leqslant g)$.

Сейчас нам необходимо указать оценку снизу для абсолютной величины выражения, стоящего в левой части (57). Воспользуемся предложением 1.

Как и ранее устанавливаем, что

$$h\left(\frac{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_i^{(\sigma)})\pi_1^{(\sigma)}}{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\pi_i^{(\sigma)}}\right) \leqslant \left(|Nm_K(\alpha)| P^{sh} e^M H_F\right)^{c_{33}} \quad (3 \leqslant i \leqslant n),$$

$$h(\varrho_l^{(\sigma)}) \leqslant (P^h e^M)^{c_{34}} \quad (1 \leqslant l \leqslant t).$$

Полагаем

$$A = \left(|Nm_K(\alpha)| P^{sh} e^M H_F\right)^{c_{33}} \tag{58}$$

и

$$B = \max\left((P^h e^M)^{c_{34}},\ e^{c_{31}R}\right). \tag{59}$$

Пусть q — простое число, как и прежде, $|\ldots|_q$ — q-адическое нормирование поля $G^{(\tau)}$, индуцированное некоторым простым делителем q в $\mathbf{Z}_{G^{(\tau)}}$.

Предположим, что H не удовлетворяет ни одному из неравенств (12) или (13) с A и B, определенными (58) и (59) соответсвенно. Учитывая условия предложения 1, рассматриваем два случая: либо

$$\left|\frac{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_i^{(\sigma)})\pi_1^{(\sigma)}}{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\pi_i^{(\sigma)}}\right|_q \neq 1 \tag{60}$$

для хотя бы одного индекса $i = 3, \ldots, n$, либо эта норма равна 1.

[5] Подсистема (56) может отличаться, вообще говоря, от подсистемы (35).

Допустим, что справедливо (60). Тогда имеет место наревенство

$$\left|1 - \frac{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\mu_i^{(\sigma)}}{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_i^{(\sigma)})\mu_1^{(\sigma)}}\right| \geqslant e^{-2\delta_1 H} \tag{61}$$

для некоторого индекса i $(3 \leqslant i \leqslant n)$ при

$$H > \tfrac{1}{2}(\ln A)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \tfrac{1}{2}\left(c_{15}(\delta_1^{-1} + \xi^{-1})g^2(sd+g)^2 \ln B\right)^{\frac{4(sd+g+1)(1+\xi)}{\xi}}, \tag{62}$$

где $0 < \xi < \frac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим второй случай: ни при каком индексе $i = 3, \ldots$ $\ldots, n$ не выполняется (60). Для применения предложения 1 нужно иметь неравенство

$$\left|\log\left(\left(\frac{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_i^{(\sigma)})\pi_1^{(\sigma)}}{(\theta_2^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\pi_i^{(\sigma)}}\right)^S\right) - \sum_{l=1}^{t}(u_{li} - u_{l1})\log\left((\varrho_l^{(\sigma)})^S\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{k}(v_{ji} - v_{j1})\log\left((\varepsilon_j^{(\sigma)})^S\right)\right|_q > q^{-(2H)^{\frac{1-\xi}{1+\xi}}} \tag{63}$$

хотя бы для одного индекса i $(3 \leqslant i \leqslant n)$, где $\log(\ldots)$ — q-адический логарифм в метрике $|\ldots|_q$, S определено в формулировке предложения 1. Но справедливость (63) можно доказать, рассуждая, как и ранее. Тогда, применяя предложение 1, мы заключаем, что выполняется (61) в предположении

$$H > \frac{1}{2}(\ln A)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \frac{1}{2}\left(c_{16}(\delta_1^{-1} + \xi^{-1})g^2(sd+g)^2 \ln B\right)^{\frac{4(sd+g+1)(1+\xi)}{\xi}}, \tag{64}$$

где $0 < \xi < 1$.

Из (57) и (61) имеем

$$\left|\frac{(\theta_i^{(\sigma)} - \theta_1^{(\sigma)})\mu_2^{(\sigma)}}{(\theta_i^{(\sigma)} - \theta_2^{(\sigma)})\mu_1^{(\sigma)}}\right| \geqslant e^{-2\delta_1 H} \tag{65}$$

для каждого σ $(1 \leqslant \sigma \leqslant g)$.

Поскольку норма правой части (57) равна

$$\frac{Nm_G(\theta_i - \theta_1)}{Nm_G(\theta_i - \theta_2)},$$

то при любом σ правая часть (60) оценивается сверху величиной $\exp\{g(2\delta_1 H + \ln 2n + \ln H_F')\}$. Принимая это во внимание и неравенство

(65), находим

$$\left|\ln\left|\frac{(\theta_i^{(\sigma)}-\theta_1^{(\sigma)})\,\mu_2^{(\sigma)}}{(\theta_i^{(\sigma)}-\theta_2^{(\sigma)})\,\mu_1^{(\sigma)}}\right|\right| < g(2\delta_1 H+\ln 2n+\ln H_F), \tag{66}$$

где σ пробегает все изоморфизмы поля $\boldsymbol{G}$. Учитывая явный вид $\mu_1^{(\sigma)}$ и $\mu_2^{(\sigma)}$, из (66) получаем

$$\left|\ln\left|\frac{(\theta_i^{(\sigma)}-\theta_1^{(\sigma)})\,\pi_2^{(\sigma)}}{(\theta_i^{(\sigma)}-\theta_2^{(\sigma)})\,\pi_1^{(\sigma)}}\right| + \sum_{l=1}^{t}(u_{l2}-u_{l1})\ln|\varrho_l^{(\sigma)}| + \sum_{j=1}^{k}(v_{j2}-v_{j1})\ln|\varepsilon_j^{(\sigma)}|\right| < c_{35}\,\delta H,$$

откуда

$$\left|\sum_{j=1}^{k}(v_{j2}-v_{j1})\ln|\varepsilon_j^{(\sigma)}|\right| < \omega \qquad (1\leqslant\sigma\leqslant g), \tag{67}$$

где $\omega = c_{36}\delta_1 H + c_{37}s(M+h\ln P)\,\delta H$. Из системы неравенств (67) можно выделить подсистему с матрицей $(\ln|\varepsilon_j^{(\sigma)}|)$, указанной в лемме 1, что, возможно, потребует иной нумерации сопряженных величин поля $\boldsymbol{G}$. Во избежание усложнения обозначений, мы считаем, что для элементов матрицы

$$(\ln|\varepsilon_j^{(\sigma)}|)_{j,\sigma=1,\ldots,k} \tag{68}$$

справедливы оценки из леммы 1. Так как единицы $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$ независимы, то определитель d матрицы (68) отличен от нуля. Тогда

$$v_{j2}-v_{j1} = d_j d^{-1} \qquad (1\leqslant j\leqslant k), \tag{69}$$

$$d_j = \begin{vmatrix} \ln|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & \omega_1\omega & \ldots & \ln|\varepsilon_k^{(1)}| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ln|\varepsilon_1^{(k)}| & \ldots & \underbrace{\omega_k\omega}_{j} & \ldots & \ln|\varepsilon_k^{(k)}| \end{vmatrix},$$

где ω_σ — некоторые числа с условием $|\omega_\sigma|<1$ $(1\leqslant\sigma\leqslant k)$. Раскрывая определитель d_j по j-ому столбцу, получаем в силу (69)

$$|v_{j2}-v_{j1}| < \frac{\omega}{|d|}\sum_{\sigma=1}^{k}|d_{j\sigma}|,$$

где $d_{j\sigma}$ — алгебраическое дополнение элемента $\omega\omega_\sigma$ в определителе d_j (или элемента $\ln|\varepsilon_j^{(\sigma)}|$ в определителе d). По лемме 1

$$\left|\frac{d_j\sigma}{d}\right| \leqslant c_{20},$$

следовательно,

$$|v_{j2}-v_{j1}| < c_{38}\,\omega \qquad (1\leqslant j\leqslant k). \tag{70}$$

Неравенства (55) и (70) позволяют заключить, что

$$|(n-1)v_{12}+(v_{11}+v_{13}+\ldots+v_{1n})| < c_{39}\,\omega. \tag{71}$$

Поскольку имеет место (32), то из (71) следует $|v_{12}|<c_{40}\,\omega$ и

$$|v_{ji}| < c_{40}\,\omega \qquad (1\leqslant j\leqslant k,\ 1\leqslant i\leqslant n). \tag{72}$$

Положим $\delta_2 = \max(\delta_1,\delta')$, где $\delta' = s(M+h\ln P)\,\delta$. Тогда (72) можно переписать в виде

$$|v_{ji}| < c_{41}\,\delta_2 H \tag{73}$$

для любых значений индексов $j=1,\ldots,k$ и $i=1,\ldots,n$.

Из неравенств (54) и (73) получаем

$$H < (c_{41}+3)\,\delta_2 H$$

или

$$1 < (c_{41}+3)\,\delta_2. \tag{74}$$

При $\delta_2 = \frac{1}{2}(c_{41}+3)^{-1}$ неравенство (74) противоречиво, следовательно, какое-либо из исходных предположений о величине H — неравенство (43), (52), (62) или (64) — неверно. Тогда, учитывая, что $T<P^{2g}$ и $\delta_2 = \max\big(\delta_1, s(M+h\ln P)\,\delta\big) = \frac{1}{2}(c_{41}+3)^{-1}$, можем записать

$$\begin{aligned} H \leqslant \frac{1}{2}\Big\{&\Big(c_{42}P^{2g}\big(\ln|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)| + \\ &+ (\ln H_F+\ln|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|)(R+h\ln P)+sh\ln P\big)\Big)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \\ &+ \big(c_{43}\,\xi^{-1}s^3P^{2(g+1)}(R+h\ln P)^2\big)^{\frac{c_{44}s}{\xi}}\Big\}, \end{aligned}$$

где $0<\xi<\frac{1}{2}$. Зная явный вид μ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{|\mu_i|} &\leqslant \overline{|\pi_i|}\,\overline{|\varrho_1|}^{u_{1i}}\ldots\overline{|\varrho_t|}^{u_{ti}}\,\overline{|\varepsilon_1|}^{|v_{1i}|(g-1)}\ldots\overline{|\varepsilon_k|}^{|v_{ki}|(g-1)} < \\ &< \big(|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|P^{sh}e^{M}H_F\big)^{c_{45}}(P^{sh}e^{M})^{c_{46}H} = \mathscr{L}. \end{aligned} \tag{75}$$

Так как $|Nm_{\boldsymbol{G}}(\mu_i)| = |Nm_{\boldsymbol{G}}(\mu_i')| = \mathscr{L}^g$, где $\mu_i' = x'-\theta_i y'$, то в силу леммы 2 заключаем, что найдется такая единица $\eta\in\boldsymbol{K}$, для которой

$$\overline{|\eta\mu_i'|} \leqslant \mathscr{L}e^{c_{47}R'}. \tag{76}$$

Из (75) и (76) следует

$$\begin{aligned} \max(\overline{|\eta x|},\overline{|\eta y|}) < \exp\Big\{&c_{48}R'(R+sh\ln P)\Big(\Big(c_{42}P^{2g}\big(\ln|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)| + \\ &+ (\ln H_F+\ln|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|)(R+h\ln P)+sh\ln P\big)\Big)^{\frac{1+\xi}{1-2\xi}} + \\ &+ \big(c_{43}\,\xi^{-1}s^3P^{2(g+1)}(R+h\ln P)^2\big)^{\frac{c_{44}s}{\xi}}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{77}$$

Далее замечаем, что

$$(78)\qquad \Big|Nm_{\boldsymbol{K}}\Big(\prod_{i=1}^{n}\mu_i'\Big)\Big| = \big|Nm_{\boldsymbol{K}}(a_0^{n-1})\cdot Nm_{\boldsymbol{K}}\big(F(x,y)\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant H_F^{(n-1)m}|Nm_{\boldsymbol{K}}(a)|\,p_1^{f_1u_1z_1}\ldots p_s^{f_su_sz_s}.$$

Из (75), (76), (77) и (78) получаем оценку (7).

5. Доказательства теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2. Так как $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}(\theta)$, то

$$(79)\qquad Nm_{\boldsymbol{L}/\boldsymbol{Q}}(x+\theta y) = N_{\boldsymbol{K}/\boldsymbol{Q}}\big(N_{\boldsymbol{L}/\boldsymbol{K}}(x+\theta y)\big).$$

На основании (8) и (79) можем записать, что

$$(80)\qquad \big(Nm_{\boldsymbol{L}/\boldsymbol{K}}(x+\theta y)\big) = \mathfrak{a}\mathfrak{P}_1^{z_1'}\ldots\mathfrak{P}_t^{z_t'},$$

где идеал $\mathfrak{a}|A$, простые идеалы $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_t$ входят в простые числа $p_1,\ldots,p_s$ и $t\leqslant sn$.

Полагая $z_l' = h'z_l''+r_l$, $0\leqslant r_l<h'$ $(1\leqslant l\leqslant t)$, из (80) получаем

$$(81)\qquad \big(Nm_{\boldsymbol{L}/\boldsymbol{K}}(x+\theta y)\big) = \mathfrak{a}'(\beta_1)^{z_1''}\ldots(\beta_t)^{z_t''},$$

где $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\mathfrak{P}_1^{r_1}\ldots\mathfrak{P}_t^{r_t}$ и $(\beta_l) = \mathfrak{P}_l^{h'}$ $(1\leqslant l\leqslant t)$. Очевидно, что идеал $\mathfrak{a}'$ является главным, как отношение главных идеалов, т.е. $\mathfrak{a}' = (a)$. Переходя в (81) от идеалов к числам и замечая, что $Nm_{\boldsymbol{L}/\boldsymbol{K}}(x+\theta y) = F(x,y)$ — бинарная форма степени $n\geqslant 5$ с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ и неприводимая над полем $\boldsymbol{K}$, можем записать

$$(82)\qquad F(x,y) = \tau a\beta_1^{z_1''}\ldots\beta_t^{z_t''},\qquad (x,y)|(a),$$

где τ — некоторая единица из поля $\boldsymbol{K}$.

Уравнение (82) имеет тот же вид, что и (6). Следовательно, его целочисленные решения можно охарактеризовать оценкой (7). Учитывая, что $|Nm(a)|<|A|P^{c_{49}sh'}$, $H_F<n!\,\overline{|\theta|}^n$ и $\max\limits_{(l)}(z_l)<c_{50}h'\max\limits_{(l_1)}(z_{l_1}'')$ $(1\leqslant l\leqslant s,\ 1\leqslant l_1\leqslant t)$, выводим оценку (9).

Доказательство теоремы 3. Допустим, что

$$(83)\qquad \big(F(x,y)\big) = \mathfrak{P}_1^{z_1}\ldots\mathfrak{P}_s^{z_s}$$

— разложение формы $F(x,y)$ на простые идеалы в поле $\boldsymbol{K}$. Из равенства (83) находим, что

$$(84)\qquad F(x,y) = \tau a\beta_1^{z_1'}\ldots\beta_s^{z_s'},\qquad (x,y)=1,$$

где $(a) = \mathfrak{P}_1^{r_1}\ldots\mathfrak{P}_s^{r_s}$, $0\leqslant r_l<h'$, и $(\beta_l) = \mathfrak{P}_l^{h'}$ $(1\leqslant l\leqslant s)$, а τ — некоторая единица из поля $\boldsymbol{K}$.

Уравнение (84) имеет вид (6). Учитывая, что $s\leqslant\pi(P)<cP/\ln P$, где c — постоянная Чебышева (см. [16], стр. 850), по теореме 1 находим

для какого-либо конкретного ξ (например, $\xi=\frac{1}{4}$), что

$$N<\exp\{c_{51}P^{c_{52}P/\ln P}\},$$

откуда следует неравенство

$$\ln\ln N<c_{53}P\quad\text{при}\quad N\geqslant N_0$$

и оценка (10).

6. Заключение. Из оценки (7) следует, что для показателей $z_1,\ldots,z_s$ в (4) существует лишь конечное число возможностей и они могут быть явно указаны. Следовательно, анализ уравнения (4) сводится к анализу конечного числа обобщенных уравнений Туэ [6], откуда выводится граница для $\max(\overline{|x|},\overline{|y|})$. Для анализа целочисленных решений обобщенного уравнения Туэ можно использовать, например, метод В. Спринджука, изложенный в работе [14] и который применен в этой статье.

Из предыдущих рассуждений ясно, почему в теореме 1 мы оцениваем сверху $\max(\overline{|\eta x|},\overline{|\eta y|})$, а не $\max(\overline{|x|},\overline{|y|})$. Как уже отмечалось, это — проявление специфики уравнения (6). В связи с этим интересно отметить следующий факт: если $F(x,y)$ — бинарная форма степени не менее 5 с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ без кратных корней, x и y принимают целые значения в $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, причем $\overline{|y|}\leqslant\overline{|x|}^{1-\varepsilon}$ (ε — фиксировано в интервале $(0,1)$) при $\overline{|x|}\geqslant x_0(\varepsilon)$, то для целочисленных решений уравнения (6) с этим условием будет справедлива оценка

$$(85)\qquad \ln\{\max(\overline{|x|},p_1^{u_1f_1z_1},\ldots,p_s^{u_sf_sz_s})\}<$$
$$<c_{54}(R+sh\ln P)\Big\{\big(c_{55}(\ln|Nm(a)|+\ln H_F+R+sh\ln P)\big)^{\frac{1+\xi}{1-\xi}}+$$
$$+\big(c_{56}\xi^{-1}\varepsilon^{-1}(s+1)^2(R+h\ln P)\big)^{\frac{4(sd+g+1)(1+\xi)}{\xi}}\Big\},$$

где $0<\xi<\frac{1}{2}$, выписанные параметры и величины c_{54}, c_{55}, c_{56}, имеют тот же смысл, что и в оценке (7). Оценка (85) выводится без труда из работы автора [3]. Для этого следует при получении необходимых промежуточных оценок учитывать влияние основных параметров уравнения (6) в том стиле, как это сделано в настоящей работе.

Из неравенства (22) следует, что в оценках (7) и (9) можно выразить величины R, R', h и h' через m, d, D' и H_F, а если поле $\boldsymbol{K}$ — минимальное поле, содержащее коэффициенты $F(x,y)$, то можно и D' заменить через m, d, H_F. Таким образом получаются оценки через легко доступные параметры уравнения.

---

(6) *Обобщенным уравнением Туэ* мы называем уравнение вида $F(x,y)=a$, где $F(x,y)$ — неприводимая над полем $\boldsymbol{K}$ бинарная форма с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, $a\in\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$.

Очевидно, что результаты теоремы 1, 2, 3 справедливы для бинарных форм $F(x, y)$ и алгебраических чисел θ степени $n = 4$, если они не являются „исключительными".

Предположение о том, что (β_l) — степени различных простых идеалов, не является существенным ограничением: можно считать, что это различные идеалы, отличные от единичного, поскольку возможен переход от произвольных $(\beta_l) \neq 1$ к (β_l), являющихся степенями различных простых идеалов.

Наконец, определение скорости возрастания $N(\mathfrak{P})$ при $N \to \infty$ для неприводимых бинарных форм $F(x, y)$ степеней $n = 3, 4$ и произвольных бинарных форм степени $n \geqslant 3$ с целыми алгебраическими коэффициентами, имеющих по крайней мере три различных корня, требует дополнительного исследования. В частности, срабатывает в данной ситуации схема рассуждений работы [15] и возможно получение аналогичных оценок.

Автор выражает признательность профессору В. Г. Спринджуку за полезное обсуждение содержания статьи.

Литература

[1] А. И. Виноградов и В. Г. Спринджук, *О представлении чисел бинарными формами*, Матем. заметки 3 (4) (1968), стр. 369–376.

[2] Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел*, Москва–Ленинград 1940.

[3] С. В. Котов, *О норме идеальных делителей бинарной формы с алгебраическими коэффициентами*, Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук 3 (1972), стр. 14–22.

[4] С. В. Котов и В. Г. Спринджук, *Эффективный анализ уравнения Туэ-Малера в относительных полях*, Докл. АН БССР 17 (5) (1973), стр. 393–395.

[5] С. Ленг, *Алгебраические числа*, Москва 1966.

[6] В. Г. Спринджук, *К теореме Бэйкера о линейных формах с логарифмами*, Докл. АН БССР 11 (9) (1967), стр. 767–769.

[7] — *Оценки линейных форм с p-адическими логарифмами алгебраических чисел*, Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук 4 (1968), стр. 5–14.

[8] — *Эффективизация в некоторых задачах теории диофантовых приближений*, Докл. АН БССР 12 (4) (1968), стр. 293–297.

[9] — *Новое применение p-адического анализа к представлениям чисел бинарными формами*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34 (1970), стр. 1038–1063.

[10] — *Эффективная оценка рациональных приближений к алгебраическим числам*, Докл. АН БССР 14 (8) (1970), стр. 681–684.

[11] — *Улучшение оценки рациональных приближений к алгебраическим числам*, Докл. АН БССР 15 (2) (1971), стр. 101–104.

[12] — *О рациональных приближениях к алгебраическим числам*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 35 (1971), стр. 991–1007.

[13] — *Об оценке единиц алгебраических числовых полей*, Докл. АН БССР 15 (12) (1971), стр. 1065–1068.

[14] — *Об оценке решений уравнения Туэ*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 36 (1972), стр. 712–741.

[15] В. Г. Спринджук, *О структуре чисел, представимых бинарными формами*, Докл. АН БССР 17 (8) (1973), стр. 685–688.

[16] П. Л. Чебышев, *Избранные труды*, Москва 1955.

[17] A. Baker, *Linear forms in the logarithmus of algebraic numbers*, Mathematika, 13 (1966), стр. 204–216.

[18] — *Linear forms in the logarithmus of algebraic numbers, II*, Mathematika 14 (1967), стр. 102–107.

[19] — *Linear forms in the logarithmus of algebraic numbers, III*, Mathematika 14 (1967), стр. 220–228.

[20] — *Linear forms in the logarithmus of algebraic numbers, IV*, Mathematika 15 (1968), стр. 204–216.

[21] — *Contributions to the theory of Diophantine equations. I, On the representation of integers by binary forms*, Philos. Trans. Royal Soc., London, A 263 (1968), стр. 173–191.

[22] — *Contributions to the theory of Diophantine equations. II, The Diophantine equation $y^2 = x^3 + k$*, Philos. Trans. Royal Soc., London, A 263 (1968), стр. 193–208.

[23] J. Coates, *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue*, Acta Arith. 15 (1969), стр. 279–305.

[24] — *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue. II, The greatest prime factor of a binary form*, Acta Arith. 16 (1970), стр. 399–412.

[25] K. Mahler, *Zur Approximation algebraischer Zahlen. I, Über den grössten Primteiler binärer Formen*, Math. Ann. 107 (1933), стр. 691–730.

[26] — *Zur Approximation algebraischer Zahlen. II, Über die Anzahl der Darstellungen ganzen Zahlen durch Binarformen*, Math. Ann. 108 (1933), стр. 37–55.

[27] — *Zur Approximation algebraischer Zahlen. III, Über die mittlere Anzahl der Darstellungen grosser Zahlen durch binare Formen*, Acta Math. 62 (1934), стр. 91–166.

[28] C. J. Parry, *The p-adic generalization of the Thue-Siegel theorem*, J. London Math. Soc. 15 (1940), стр. 293–305.

[29] — *The p-adic generalization of the Thue-Siegel theorem*, Acta Math. 83 (1950), стр. 1–100.

[30] C. L. Siegel, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 9 (1969), стр. 71–86.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН БССР

Поступило 29. 9. 1973 (466)