and the result follows if we put

$$G_s^{(k)} = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k c_s^{(k)} \prod_{p\in P_f} p^{-(k-1)(w_p(f)+5)}(1-p^{-2})^{-k}.$$

COROLLARY. *For all sufficiently large integers n are representabl by the quadratic form f provided f, n satisfy conditions of Theorem 2.*

References

[1] T. Estermann, *Sums of squares of square-free numbers*, Proc. London Matl Soc. (2) 53 (1951), pp. 125–137.

[2] — *A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method*, Proc. Lor don Math. Soc. (3) 12 (1962), pp. 425–444.

[3] A. P. Lursmansashvily, *Summation of a singular series* (Russian), Aka Nauk Gruzin. SSR, Trudy Inst. Kibernetiki 1 (1963), pp. 45–59.

[4] — *On the representation of natural numbers as sums of squares of square-fr numbers and on the number of integral points with square-free coordinates i a sphere* (Russian), Akad. Nauk Gruzin. SSR Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Ra madze 29 (1963), pp. 37–46.

[5] — *The representation of the natural numbers by quadratic forms with integr square-free variables* (Russian), Soobšč. Akad. Nauk Gruzin. SSR 48 (1967 pp. 7–12.

[6] — *Integral square-free points in multidimensional ellipsoids* (Russian), Soobš Akad. Nauk Gruzin. SSR 49 (1967), pp. 7–12.

[7] — *On the representation of natural numbers by sums of squares of integers an of square-free integers* (Russian), Tbiliss. Gos. Univ., Trudy Ser. Meh.-Ma Nauk 129 (1968), pp. 299–318.

[8] — *Representation of natural numbers by quadratic forms with integral square-fr variables* (Russian), Soobšč. Akad. Nauk Gruzin. SSR 53 (1969), pp. 281–28

[9] — *Representation of natural numbers by quadratic forms with square-free variabl (summation of the singular series)* (Russian), Tbiliss. Gos. Univ., Trudy Se Meh.-Mat. Nauk 137A (1971), pp. 45–62.

[10] A.V. Malyshev, *Representation of integers by positive quadratic forms* (Russian Trudy Mat. Inst. Steklov. 65 (1962), pp. 1–212.

[11] E. V. Podsypanin, *On the sums of squares of square-free numbers* (Russian Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 33 (1973 pp. 116–131.

Received on 18. 12. 1973 (51

ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

О некоторых арифметических задачах с числами, имеющими малые простые делители

А. А. Карацуба (Москва)

В статье рассматривается ряд проблем аналитической теории чисел (см. [1]) в числах, имеющих малые простые делители. Это позволяет использовать для их решения p-адический метод, первые применения которого в тригонометрических суммах были даны Ю. В. Линником [6]. Об одной из этих проблем, именно, о возможности получения асимптотической формулы для числа представлений достаточно большого натурального числа суммой n-х степеней чисел с малыми простыми делителями и числом слагаемых порядка $n\ln n$ (аналог асимптотической формулы в проблеме Варинга), говорил Ю.В. Линник в 1971 году на Международной конференции по теории чисел в Москве. Введем определение и ряд обозначений, необходимых для дальнейшего.

Определение. Пусть $g(x)$ — монотонно возрастающая функция, причем $g(x) \geqslant \ln\ln x$ при $x \geqslant x_0 > 0$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\ln x} = 0.$$

Натуральное число m называется *числом с малыми простыми делителями класса E_g*, если для каждого простого делителя p числа m выполняется неравенство $\ln p \leqslant g(m)$.

Число чисел m с малыми простыми делителями класса E_g, не превосходящих P, будем обозначать $\boldsymbol{P}$; таким образом,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(P, g) = \sum_{\substack{m\in E_g \\ m\leqslant P}} 1.$$

Подобно тому, как это делается в [2], можно показать, что при $P\to+\infty$

$$\boldsymbol{P} \sim Pe^{-\omega\ln\omega}, \quad \omega = \frac{\ln P}{g(P)}.$$

Например, если $g(x)=\sqrt{\ln x}$, то

$$\mathbf{P} \sim Pe^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln P}\cdot \ln\ln P}.$$

Буквами $c, c_1, \ldots, \gamma, \gamma_1, \ldots$, обозначаем положительные абсолютные постоянные; $n \geqslant 2$ — натуральное постоянное число.

Применение p-адического метода по схеме работ [3]–[5] позволяет доказать следующее основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant r < \ldots < t < \ldots \leqslant n$, T — *число решений системы уравнений*

$$\begin{gathered} x_1^r+x_2^r+\ldots+x_k^r = y_1^r+y_2^r+\ldots+y_k^r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^t+x_2^t+\ldots+x_k^t = y_1^t+y_2^t+\ldots+y_k^t \end{gathered}$$

в числах $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$, *не превосходящих* P, *с малыми простыми делителями класса* E_g. *Тогда при любом целом* $\tau \geqslant 0$ *и* $k \geqslant 2(r+\ldots+t)+n\tau$ *справедлива оценка*

$$T \ll \mathbf{P}^{2k-(r+\ldots+t)\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}\right)},$$

где постоянная в знаке $\ll$ *зависит только от* k *и* τ.

Следствием этой теоремы является

Теорема 2. *При обозначениях и условиях теоремы* 1 *и*

$$k \geqslant c(r+\ldots+t)\ln(r+\ldots+t)$$

справедлива оценка

$$T \ll \mathbf{P}^{2k-(r+\ldots+t)}.$$

Заметим, что при выполнении условий теоремы 2, для величины T можно получить даже асимптотическую формулу. Следствием теоремы 2 является также теорема Ю. В. Линника — аналог асимптотической формулы в проблеме Варинга, о которой говорилось выше.

Из теоремы 1 следует оценка тригонометрической суммы с многочленом, в которой суммирование ведется по числам с малыми простыми делителями.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant r < \ldots < m < \ldots < t \leqslant n$,

$$f(x) = a_r x^r+\ldots+a_m x^m+\ldots+a_t x^t,$$

причём

$$a_m = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

и при некотором положительном ε, $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$P^{\varepsilon m} \leqslant q \leqslant P^{(1-\varepsilon)m}.$$

Пусть, далее,

$$S = \sum_{x\leqslant P}{}' e^{2\pi i f(x)},$$

где штрих в сумме означает суммирование по числам с малыми простыми делителями класса E_g.

Тогда

$$|S| \leqslant c_1 \mathbf{P}^{1-\frac{\gamma}{k}},$$

где $k = r+\ldots+m+\ldots+t$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$.

Например, если

$$f(x) = ax^r+\sqrt{2}x^n, \quad 1 \leqslant r < n,$$

то

$$\Big|\sum_{x\leqslant P}{}' e^{2\pi i f(x)}\Big| \leqslant c_2 \mathbf{P}^{1-\frac{\gamma_1}{n}}.$$

Оценка тригонометрической суммы теоремы 3 дает возможность решать с хорошей точностью задачи о равномерном распределении дробных долей многочленов при условии, что переменная пробегает значения натуральных чисел с малыми простыми делителями класса E_g.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 3, *для числа* $D_P(\varphi_1, \varphi_2)$ *попаданий дробных долей* $f(x)$ *на интервал* $(\varphi_1, \varphi_2]$, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < 1$, *при* $x \leqslant P$, $x \in E_g$, *справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$D_P(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2-\varphi_1)\mathbf{P}+O(\mathbf{P}^{1-\frac{\gamma}{k}}),$$

где $k = r+\ldots+m+\ldots+t$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$.

Например, если

$$f(x) = ax^r+\sqrt{2}x^n, \quad 1 \leqslant r < n,$$

то

$$D_P(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2-\varphi_1)\mathbf{P}+O(\mathbf{P}^{1-\frac{\gamma_1}{n}}).$$

Цитированная литература

[1] И. М. Виноградов, *Некоторые проблемы аналитической теории чисел*, Труды 3-го Всесоюзного математического съезда, т. 3, 1958, стр. 3–13.

[2] А. И. Виноградов, *О числах с малыми простыми делителями*, Докл. АН СССР 109 (1956), стр. 683–686.

[3] А. А. Карацуба, *Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа*, Вестник МГУ, сер. матем. 4 (1962), стр. 28–38.
[4] — *О системах сравнений*, Изв. АН СССР, сер. матем. 29 (1965), стр. 959–968.
[5] — *Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы*, Изв. АН СССР, сер. матем. 30 (1966), стр. 183–206.
[6] Ю. В. Линник, *Новые оценки сумм Вейля*, Докл. АН СССР 37, 7 (1942), стр. 201–203.

Поступило 22. 12. 1973 (504)

ACTA ARITHMETICA
XXVII (1975)

О функциональной независимости L-функций Дирихле

С. М. Воронин (Москва)

1. Введение и формулировка результатов. Пусть Q — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, $\boldsymbol{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство, $\overline{\boldsymbol{C}}^n$ — прямое произведение n римановых сфер; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — простые числа в порядке следования; $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots$ — вещественные переменные, индексированные простыми числами.

Если M некоторое конечное множество простых чисел, то определим функцию $L_M(s, \chi, \bar{\theta})$ равенством

$$L_M(s, \chi, \bar{\theta}) = \prod_{p\in M}\left(1-\frac{\chi(p)e^{-2\pi i\theta_p}}{p^s}\right)^{-1},$$

где $s\in \boldsymbol{C}$, $\bar{\theta} = (\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots)$, χ — характер Дирихле. Функцию $L_M(s, \chi)$ определим равенством:

$$L_M(s, \chi) = \prod_{p\in M}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ — попарно неэквивалентные характеры Дирихле; $L(s, \chi_1), L(s, \chi_2), \ldots, L(s, \chi_n)$ — соответствующие L-функции Дирихле. Обозначим через $\gamma(\sigma, T)$ отображение $\boldsymbol{R}^2\to \boldsymbol{C}^n$, задаваемое формулой

$$\gamma(\sigma, T) = \big(L(\sigma+iT, \chi_1), L(\sigma+iT, \chi_2), \ldots, L(\sigma+iT, \chi_n)\big).$$

Пусть $\{a\}$ обозначает как обычно дробную часть a. Квазипрогрессией будем называть множество всех тех $t\in(0, +\infty)$, которые удовлетворяют какой-либо системе неравенств вида:

$$0<a_j<\left\{t\frac{\ln p}{2\pi}j\right\}<\beta_j<1$$

для $j = 1, 2, \ldots, N$.

Теорема. *При фиксированном $\sigma\in(\frac{1}{2}, 1]$ образ любой квазипрогрессии при отображении $\gamma(\sigma, T)$ всюду плотен в $\boldsymbol{C}^n$.*