$$\sum_{\varrho\in D} 1 = \frac{2}{\pi \log R_{(m)}} \sum_{\nu\in D_{(m)}} 1 + O\big(f(R_{(m)})\big) + O(R);$$

(2) *if $\partial D^{(n)}$ consists of a bounded number of connected pieces, we have*

$$\sum_{\varrho\in D} 1 = \frac{2}{\pi \log R^{(n)}} \sum_{\nu\in D^{(n)}} 1 + O\big(f(R)\big).$$

Proof. (1) We have

$$\sum_{\varrho\in D_{(m)}} 1 = \frac{2}{\pi \log R_{(m)}} \sum_{\nu\in D_{(m)}} 1 + O\big(f(R_{(m)})\big)$$

and

$$\Big|\sum_{\varrho\in D} 1 - \sum_{\varrho\in D_{(m)}} 1\Big| = \sum_{\varrho\in D-D_{(m)}} 1 \leqslant \sum_{\nu\in D-D_{(m)}} 1 \leqslant (2m-1)^2 Z,$$

so $\sum_{\varrho\in D} 1 = \sum_{\varrho\in D_{(m)}} 1 + O(R)$, since $Z = O(R)$.

(2) The length l of $\partial D^{(n)}$ satisfies

$$l \leqslant 4(2n-1)Z = O(R) = O(R^{(n)}),$$

since $R \leqslant R^{(n)}$. Hence

$$\sum_{\varrho\in D^{(n)}} 1 = \frac{2}{\pi \log R^{(n)}} \sum_{\nu\in D^{(n)}} 1 + O\big(f(R^{(n)})\big) = \frac{2}{\pi \log R^{(n)}} \sum_{\nu\in D^{(n)}} 1 + O\big(f(R)\big),$$

since $R^{(n)} \leqslant R + n\sqrt{2}$, and again $\sum_{\varrho\in D} 1 = \sum_{\varrho\in D^{(n)}} 1 + O(R)$.

References

[1] I. V. Chulanovskii, *An elementary proof of the law of distribution of primes of a Gaussian field* (in Russian), Vestnik LGU 13 (1956), pp. 43–62.

[2] (i) A. O. Gelfond and Yu. V. Linnik, *Elementary Methods in Analytic Number Theory*, Allen and Unwin 1965.
(ii) A. O. Gelfond and Yu. V. Linnik, *Elementary Methods in the Analytic Theory of Numbers*, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris 1966.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford 1962.

[4] Martin Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York–London 1971.

N. S. W. INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Broadway, N. S. W., Australia

Received on 21. 4. 1973 (399)

ACTA ARITHMETICA
XXVI (1975)

Metrische Ergebnisse über den Kotangensalgorithmus

von

FRITZ SCHWEIGER (Salzburg)

1. Einleitung. D. H. Lehmer hat in seiner Arbeit [2] die Theorie des Kotangensalgorithmus begründet. Das wichtigste Resultat lautet: Ist $x > 0$ irrational, so läßt sich x eindeutig als Reihe der Form

$$x = \cot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arccot} n_k$$

schreiben, wobei $n_0 \geqslant 0$ und $n_{k+1} \geqslant h(n_k) = n_k^2 + n_k + 1$ erfüllt sind. Umgekehrt ist jede Reihe dieser Art konvergent. Ist

$$\operatorname{arccot} x = \sum_{k=0}^{g-1} (-1)^k \operatorname{arccot} n_k + (-1)^g \operatorname{arccot} x_g$$

so ist $n_g = [x_g]$ und

$$\operatorname{arccot} x_{g+1} = \operatorname{arccot} n_g - \operatorname{arccot} x_g.$$

Wir setzen $h(n_k) = n_k^2 + n_k + 1$, und weiters sei

$$y_g = \frac{h(n_g)}{x_{g+1}}.$$

Das Hauptergebnis dieser Arbeit is enthalten in

SATZ 1. *Es ist*

$$P(y_{g+p} < t \mid n_0, \ldots, n_g) = t + O(t^2 2^{-g-p}).$$

Abschnitt 2 ist dem Beweis von Satz 1 gewidmet, Abschnitt 3 enthält einige weitere Sätze, die aus Satz 1 folgen. Herrn Prof. J. R. Kinney danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit. Es sei noch erwähnt, daß dieser Algorithmus Berührpunkte mit den von Galambos [1] betrachteten Algorithmen aufweist.

2. Beweis von Satz 1. Wir beginnen mit

HILFSSATZ 1. *Sei $P(s_0, \ldots, s_g) = P(n_j(x) = s_j,\ 1 \leqslant j \leqslant g,\ s_{j+1} \geqslant h(s_j))$ dann ist mit absoluten Konstanten c_1, c_2:*

$$c_1 \frac{h(s_0)}{h(s_g)} \leqslant P(s_0, \ldots, s_g) \leqslant c_2 \frac{h(s_0)}{h(s_g)}.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$S(s_0, \ldots, s_g) \colon]0, 1] \to \boldsymbol{R}$$

definiert durch

$$\operatorname{arc\,cot} S(s_0, \ldots, s_g)t = \sum_{k=0}^{g} (-1)^k \operatorname{arc\,cot} s_k + (-1)^{g+1} \operatorname{arc\,cot} \frac{h(s_g)}{t}.$$

Es ist $n_j(x) = s_j$, $1 \leqslant j \leqslant g$, gleichbedeutend mit $x = S(s_0, \ldots, s_g)t$ für ein $t \in]0, 1]$. Daher ist

$$P(s_0, \ldots, s_g) = \int_0^1 (-1)^{g+1} \big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)' \, dt.$$

Da

$$\big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)' = (-1)^{g+1} h(s_g) \frac{1 + \big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)^2}{h(s_g)^2 + t^2}$$

und $s_0 \leqslant S(s_0, \ldots, s_g)t < s_0 + 1$, ist Hilfssatz 1 ersichtlich.

HILFSSATZ 2. *Es gibt absolute Konstante c_3, c_4, sodaß*

$$c_3 \frac{h(s_0)}{h(s_g)} \leqslant \big|\big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)'\big| \leqslant c_4 \frac{h(s_0)}{h(s_g)}$$

und eine absolute Konstante c_5, sodaß

$$\sum_{s_1, \ldots, s_g} \frac{h(s_0)}{h(s_g)} \leqslant c_5.$$

Beweis. Die erste Behauptung ist aus dem Beweis von Hilfssatz 1 ersichtlich.

Die zweite Behauptung folgt aus

$$1 = \sum_{s_1, \ldots, s_g} P(s_0, \ldots, s_g) = \sum_{s_1, \ldots, s_g} \int_0^1 \big|\big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)'\big| \, dt.$$

HILFSSATZ 3. *Es gibt eine Konstante c_6 mit*

$$\big|\big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)''\big| \leqslant c_6 \frac{h(n_0)}{h(n_g)} \big|\big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)'\big|.$$

Beweis. Differentiation ergibt

$$\big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)'' = (-1)^{g+1} \big(S(s_0, \ldots, s_g)t\big)' 2h(n_k) \frac{S(s_0, \ldots, s_g)t - t}{h(n_k)^2 + t^2}.$$

Wir beweisen nun gleich für später den

HILFSSATZ 4.

$$\sum_j \frac{P(n_g = j \mid n_0)}{h(j)} = O(2^{-g}).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist

$$P(n_g \mid n_{g-1}, n_0) \leqslant c_7 \frac{h(n_{g-1})}{h(n_g)}$$

dann ist

$$\sum_j \frac{P(n_g = j \mid n_0)}{h(j)} = \sum_{j,i} \frac{P(n_g = j \mid n_{g-1} = i, n_0) P(n_{g-1} = i \mid n_0)}{h(j)}$$

$$\leqslant c_7 \sum_{j,i} \frac{h(i)}{h(j)^2} P(n_{g-1} = i \mid n_0) \leqslant \frac{1}{2} \sum_i \frac{P(n_{g-1} = i \mid n_0)}{h(i)}.$$

Dabei wurde benutzt, daß

$$\sum_{j \geqslant h(i)} h(j)^{-1} \leqslant h(i)$$

und $c_7 h(j)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}$ für genügend großes j, was für $g \geqslant g_0$ bestimmt eintritt.

Nun können wir Satz 1 leicht beweisen!

Es sei

$$P(y_{g+p} < t;\ n_0, \ldots, n_g) = \int_0^t \psi_p(z) \, dz.$$

Es ist

$$\int_0^1 \psi_p(z) \, dz = P(n_0, \ldots, n_g)$$

und

$$\psi_p(z) = \sum_{n_{g+1}, \ldots, n_{g+p}} (-1)^{g+p+1} \big(S(n_0, \ldots, n_{g+p})z\big)'$$

(man beachte $S(n_0, \ldots, n_{g+p}) y_{g+p} = x$).

Aus Hilfssatz 3 folgt

$$\psi_p'(z) = P(n_0, \ldots, n_g) O(2^{-g-p})$$

wobei

$$h(n_0)/h(n_{g+p}) = O(2^{-g-p})$$

abgeschätzt wurde. Es ist daher

$$\psi_p(z) = P(n_0, \ldots, n_g)\big(1 + zO(2^{-g-p})\big)$$

und

$$P(y_{g+p} < t \mid n_0, \ldots, n_g) = t + t^2 O(2^{-g-p}).$$

3. Einige weitere Ergebnisse. Ist $g = 0$, so erhalten wir sofort

SATZ 2. $P(y_p < t \mid n_0) = t + t^2 O(2^{-p})$.

Nachdem ferner

$$\left|\frac{h(n_g)}{n_{g+1}} - y_g\right| \leqslant \frac{1}{n_{g+1}} = O(2^{-g})$$

folgt

$$P\left(\frac{h(n_g)}{n_{g+1}} < t \mid n_0\right) = t + O(2^{-g}).$$

Daraus erhält man

SATZ 3. *Für fast alle x gibt es ein $G(x)$, sodaß für $g \geqslant G(x)$ gilt*

$$n_{g+1} > h(n_g).$$

Man kann Satz 3 auch leicht direkt aus Hilfssatz 4 herleiten:

$$P\big(n_{g+1} = h(n_g) \mid n_0\big) = \sum_j P\big(n_{g+1} = h(n_g) \mid n_g = j, n_0\big) P(n_g = j \mid n_0)$$
$$\leqslant c_7 \sum_j \frac{h(j)}{h(h(j))} P(n_g = j \mid n_0) \leqslant c_7 \sum_j \frac{P(n_g = j \mid n_0)}{h(j)} = O(2^{-g}).$$

Es sei nun

$$A(N, x) = \sum_{\substack{y_g < t \\ 0 \leqslant g < N}} 1.$$

Dann gilt

SATZ 4. *Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt fast überall*

$$A(N, x) = Nt + O(N^{1/2}\log^{3/2+\varepsilon} N) \quad \textit{mit} \quad O = O(t).$$

B e w e i s. Wir vermerken zuerst

$$\sum_{0 \leqslant p < N} P(y_p < t \mid n_0) = Nt + O(1).$$

Aus Satz 1 erhält man durch Approximation (unter Zuhilfenahme von Hilfssatz 4) der Menge $P(y_{g-1} < s \mid n_0)$ durch $\sum_{n_1, \ldots, n_{g-1}, n_g} P(n_0, \ldots, n_g)$, wo $n_g \geqslant h(n_{g-1})/s$

$$P(y_{g+p} < t, y_{g-1} < s \mid n_0) = \big(P(y_{g-1} < s \mid n_0) + O(2^{-g+1})\big)\big(t + t^2 O(2^{-g-p})\big).$$

Da weiters nach Satz 2

$$t = P(y_{g+p} < t \mid n_0) + O(2^{-g-p})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &P(y_{g+p} < t, y_{g-1} < s \mid n_0) \\ &\quad = P(y_{g+p} < t \mid n_0) P(y_{g-1} < s \mid n_0) + \\ &\qquad + P(y_{g+p} < t \mid n_0) O(2^{-g+1}) + P(y_{g-1} < s \mid n_0) O(2^{-g-p}). \end{aligned}$$

Wenn wir $t = s$ setzen und mit E_g das Ereignis $\{y_g < t \mid n_0\}$ bezeichnen, können wir einen Satz anwenden, der eine leichte Erweiterung eines Satzes von W. Philipp [3] darstellt, der zur Bequemlichkeit des Lesers formuliert wird als

HILFSSATZ 5. *Ist $(E_g)_{g \in N}$ eine Folge meßbarer Mengen und*

$$A(N, x) = \sum_{x \in E_g, g < N} 1,$$

und gibt es eine konvergente Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j \quad \textit{mit} \quad C_j \geqslant 0,$$

sodaß

$$P(E_n \cap E_{n+m}) \leqslant P(E_n) P(E_{n+m}) + P(E_n) C_{n+m} + P(E_{n+m}) C_n$$

so ist für jedes $\varepsilon > 0$ fast überall

$$A(N, x) = \varphi(N) + O\big(\varphi(N)^{1/2} \log^{3/2+\varepsilon} \varphi(N)\big) \quad \textit{wo} \quad \varphi(N) = \sum_{g<N} P(E_g).$$

Wir beweisen zuletzt noch

SATZ 6. *Für fast alle x ist die Folge $(2^{-g}\log n_g)_{g \in N}$ konvergent.*

B e w e i s. Aus Satz 2 folgt

$$P\left(\frac{h(n_g)}{n_{g+1}} < t_g \mid n_0\right) \leqslant c_8 t_g.$$

Daher hat für eine Folge $(t_g)_{g \in N}$ mit $\sum_{g=1}^{\infty} t_g < \infty$ das Ereignis $h(n_g) \geqslant t_g n_{g+1}$ für $g \geqslant G(x)$ das Maß 1. Wegen $n_{g+1} \geqslant h(n_g)$ ist die Folge $2^{-g}\log n_g$ monoton wachsend.

Wir wählen eine Folge $(t_g)_{g\in N}$ mit

$$\sum_{g=1}^{\infty} t_g < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{g=1}^{\infty} 2^{-g} \log t_g < \infty.$$

Dann ist fast überall

$$\log n_{g+1} \leqslant 2\log n_g + \log 3 - \log t_g$$

für $g \geqslant G(x)$ und weiters

$$\frac{\log n_{g+1}}{2^{g+1}} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=G}^{g} \frac{\log 3 - \log t_k}{2^k} + \frac{\log n_G}{2^G}.$$

Also ist die Folge $2^{-g} n_g$ fast überall nach oben beschränkt.

Da $P\left(\frac{\log n_1}{2} > y \,|\, n_0\right) > 0$, folgt aus der Monotonie der Folge $2^{-g}\log n_g$ sofort

$$P\left(\lim_{g\to\infty} \frac{\log n_g}{2^g} > y \,|\, n_0\right) > 0$$

für jedes $y \geqslant 0$. Ähnlich wie W. Vervaat für Sylvestersche Reihen [4], kann man die Frage stellen, ob die Werte der Funktion $F: \boldsymbol{R} \to [1, \infty[$, fast überall definiert durch $F(x) = \lim_{g\to\infty} 2^{-g} \log n_g$ stetig verteilt sind.

Literatur

[1] J. Galambos, *The ergodic properties of the denominators in the Oppenheim expansion*, Quart. J. Math. Oxford (2), 21 (1970), S. 177–191.

[2] D. H. Lehmer, *A cotangent analogue of continued fractions*, Duke Math. J. 4 (1938), S. 323–340.

[3] W. Philipp, *Some metrical theorems in number theory*, Pacific Math. J. 20 (1967), S. 109–127.

[4] W. Vervaat, *Success epochs in Bernoulli trials. With applications in number theory*, Mathematical Centre Tracts Vol. 42, Mathematisches Centrum, Amsterdam 1972.

MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT SALZBURG

Eingegangen 10. 5. 1973 (401)

ACTA ARITHMETICA
XXVI (1975)

Covering systems and generating functions

by

Štefan Porubský (Bratislava)

This paper aims at giving some generalizations of basic properties known for exactly covering systems of arithmetical sequences to general systems of arithmetical sequences. After proving some general results concerning covering systems of sets of non-negative integers we introduce the concept of $(\mu, \mathfrak{m})$-covering systems of arithmetical sequences. The concept of $(\mu, \mathfrak{m})$-covering systems involves some notions concerning systems of arithmetical sequences investigated in the recent past, e.g. covering systems [1], exactly covering systems [1] and ε-covering systems [8].

1. Preliminary results. Let $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of complex functions defined on a region D of the open complex plane E. Let the series $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ be absolutely convergent for $z \in M$, where M is a subset of D having a point of accumulation in the region D. Since this series is absolutely convergent, all its subseries are also absolutely convergent for $z \in M$. Let Z be the set of all non-negative integers. Let us suppose that to every non-empty subset S of Z appearing in our further considerations there exists a non-identically vanishing meromorphic function $f(S; z)$ defined on D with

$$\sum_{n\in S} f_n(z) = f(S; z) \quad \text{for} \quad z \in M. \tag{1}$$

In case $S = \emptyset$ let us put $f(\emptyset; z) = 0$ for all $z \in D$. Since the set M has a point of accumulation in D and $f(S; z)$ with $S \neq \emptyset$ is not vanishing on the entire D, then $f(S; z)$ with $S \neq \emptyset$ is also not vanishing on the entire M.

Let us modify Definition 2 in § 1.1 of [6] in the following way. Let $S_1, S_2, \ldots, S_k$ $(k \geqslant 1)$ be subsets of the set Z and μ a function defined on the system $\{S_1, \ldots, S_k\}$ with values in the set $\{-1, 1\}$. Let us put

$$D_m = D_m(S_1, \ldots, S_k) = \Big\{n \in Z\colon \sum_{t=1}^{k} \mu_t \chi_t(n) = m\Big\}$$