ACTA ARITHMETICA
XXVI (1975)

# Sous-suites équiréparties d'une suite donnée

par

A. THOMAS (Marseille) et Y. DUPAIN (Bordeaux)

## I. Introduction

Dans [2], Michel Mendès France pose la question suivante: étant donnée une suite d'entiers strictement croissante $(a_n)_{n\in N}$, est-il vrai que pour toute suite équirépartie du tore $(u_n)_{n\in N}$, il existe une sous-suite $(u_{b_n})_{n\in N}$ équirépartie telle que $b_n$ soit équivalent à $a_n$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$). La réponse est oui si et seulement si il existe $N\in N$ tel que

$$a_{nN}\geqslant 2a_n \qquad \text{pour tout } n\in N.$$

Introduisons les notations suivantes.

Soit $J$ une partie de $N$. Soient $x$ et $y$ des réels tels que $0<x<y$. Posons:

$$C_x(J)=\operatorname{card}(J\cap[0,x[),$$

$$d_x(J)=\frac{1}{x}C_x(J),$$

$$d(J)=\lim_{x\to+\infty}d_x(J) \text{ si la limite existe,}$$

$$C_{x,y}(J)=\operatorname{card}(J\cap[x,y[)=C_y(J)-C_x(J),$$

$$d_{x,y}(J)=\frac{1}{y-x}C_{x,y}(J).$$

Etant donnée une suite du tore $u$, on appelle dégré d'équirépartition de $u$ la borne supérieure des $\alpha\in[0,1]$ tels qu'il existe une sous-suite équirépartie de densité $\alpha$ (cf. [2]).

Nous noterons $U_\alpha$ l'ensemble des suites du tore de degré d'équirépartition $\alpha$.

THÉORÈME. *Soit $\alpha\in]0,1]$. Soit $J_0$ une partie de $N$ indexée par une suite strictement croissante $(a_k)_{k\in N}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que de toute suite $u=(u_n)_{n\in N}$ appartenant à $U_\alpha$ on puisse extraire une sous-suite équirépartie $(u_{b_k})_{k\in N}$ telle que $b_k$ soit équivalent à $a_k$ est que les deux conditions suivantes soient remplies:*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{C_{x,2x}(J_0)}{C_x(J_0)} < +\infty, \tag{1}$$

$$pour\ tout\ \varepsilon > 0 \ \limsup_{x\to+\infty} d_{x,x(1+\varepsilon)}(J_0) \leqslant \alpha. \tag{2}$$

Soit $u$ une suite du tore et $\alpha$ son degré d'équirépartition. En appliquant le théorème à la suite,

$$a_k = \left[\frac{k}{\alpha'}\right] \quad \text{pour tout } \alpha' \text{ de } [0, \alpha]$$

on déduit le corollaire déjà démontré dans [1].

COROLLAIRE. *L'ensemble des densités des sous-suites équiréparties à densité d'une suite donnée du tore est, s'il n'est pas vide, un intervalle fermé* $[0, \alpha]$.

On déduit facilement de ce corollaire que $U_1$ est l'ensemble des suites équiréparties, donc en appliquant le théorème à $\alpha = 1$ on retrouve le premier énoncé qui répond à la question de Michel Mendès France.

Avant d'aborder les démonstrations, remarquons que si de toute suite de $U_\alpha$ on peut extraire une sous-suite répondant à la question, on peut aussi le faire de toute suite de $U_{\alpha'}$ où $\alpha'$ est supérieur à $\alpha$.

## II. Lemmes preliminaires

Nous donnons ci-dessous, sans démonstration, une liste de propriétés simples qui nous seront utiles par la suite.

a) Si $J$ est à densité, pour tout $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} d_{x,(1+\varepsilon)x}(J) = d(J)$,

b) Pour que $J$ soit à densité, il suffit qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in N}$ tendant vers l'infini et vérifiant: $x_{n+1} - x_n = o(x_n)$, telle que $d_{x_n}(J)$ converge.

Soient $J$ et $J'$ deux parties de $N$. Posons:

$$d_x(J'/J) = \frac{d_x(J'\cap J)}{d_x(J)},$$

$$d(J'/J) = \lim_{x\to\infty} d_x(J'/J) \quad \text{si la limite existe.}$$

L'équirépartition d'une sous-suite $(u_n)_{n\in J}$ d'une suite du tore équivaut à:

$$d(\{n/u_n \in I\}/J) = \mu(I) \quad \text{pour tout intervalle } I \text{ du tore, } \mu \text{ étant la mesure de Lebesgue.}$$



c) Pour que $d(J'/J)$ existe, il suffit qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in N}$ tendant vers l'infini et vérifiant: $C_{x_n,x_{n+1}}(J) = o(C_{x_n}(J))$, telle que $d_{x_n}(J'/J)$ converge.

d) Soient $(n_k)_{k\in N}$ et $(n'_k)_{k\in N}$ deux suites équivalentes strictement croissantes d'entiers.

Alors:

$$\lim_{n\to\infty} [d_x(\{n_k\}_{k\in N}) - d_x(\{n'_k\}_{k\in N})] = 0$$

et $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} [d_{x,x(1+\varepsilon)}(\{n_k\}_{k\in N}) - d_{x,x(1+\varepsilon)}(\{n'_k\}_{k\in N})] = 0.$$

## III. Necessite de la condition

Soit $(a_k)_{k\in N}$ une suite strictement croissante d'entiers. Supposons que de toute suite $u$ de $U_\alpha$ on puisse extraire une sous-suite $(u_{b_k})_{k\in N}$ équirépartie telle que $b_k$ soit équivalent à $a_k$.

**A. La condition (2) est nécessaire.** Soit $K$ une partie de $N$ de densité $\alpha$. Définissons la suite $(u_n)_{n\in N}$ de telle sorte que la sous-suite $(u_n)_{n\in K}$ soit équirépartie et $u_n = 0$ pour $n$ n'appartenant pas à $K$.

Il est clair que cette suite appartient à $U_\alpha$.

Il existe donc un ensemble d'indices $J = (b_k)_{k\in N}$ tel que la suite $(u_{b_k})_{k\in N}$ soit équirépartie, $(b_k)_{k\in N}$ et $(a_k)_{k\in N}$ étant deux suite équivalentes d'entiers.

Soit $\complement K$ le complémentaire dans $N$ de $K$, alors $d(J\cap \complement K) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$

$$d_{x,x(1+\varepsilon)}(J) \leqslant d_{x,x(1+\varepsilon)}(K) + d_{x,x(1+\varepsilon)}(J\cap \complement K)$$

d'après le lemme a):

$$\lim_{x\to\infty} d_{x,x(1+\varepsilon)}(K) = \alpha,$$

$$\lim_{x\to\infty} d_{x,x(1+\varepsilon)}(J\cap \complement K) = 0$$

d'où:

$$\limsup_{x\to\infty} d_{x,x(1+\varepsilon)}(J) \leqslant \alpha$$

$(b_k)_{k\in N}$ et $(a_k)_{k\in N}$ étant des suites équivalentes, d'après le lemme d):

$$\limsup_{x\to\infty} d_{x,x(1+\varepsilon)}(J_0) \leqslant \alpha.$$

**B. La condition (1) est nécessaire**

**1.** LEMME. *Toute suite* $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in N} \in \{0, 1\}^N$ *équirépartie pour la mesure de Haar de* $\{0, 1\}$ *admet une sous-suite* $(\varepsilon_{b_k})_{k\in N}$ *équirépartie, telle que* $b_k$ *soit équivalent à* $a_k$.

Il existe en effet une partie $P$ de $N$ (resp. $Q$) de densité $a/2$, contenue dans l'ensemble des $n$ tels que $\varepsilon_n = 0$ (resp. $\varepsilon_n = 1$).

Définissons la suite $u = (u_n)_{n\in N}$ de telle sorte que les sous-suites $(u_n)_{n\in P}$ et $(u_n)_{n\in Q}$ soient équiréparties dans $[0, \frac{1}{2}[$ et dans $[\frac{1}{2}, 1[$ respectivement. Prenons $u_n = 0$ pour $n$ n'appartenant pas à $P \cup Q$.

La suite $u$ ainsi définie appartient à $U_a$. Il existe donc une sous-suite $(u_{b_k})$ équirépartie, telle que $b_k$ soit équivalent à $a_k$.

La suite $(\varepsilon_{b_k})_{k\in N}$ est équirépartie, donc répond à la question.

**2. Construction d'une suite $\varepsilon$ équirépartie.** Supposons que la condition (1) n'est pas vérifiée. Il existe alors une suite d'entiers $(N_h)_{h\in N}$ vérifiant les conditions suivantes:

a) $N_0 = 0$, $N_1 = 2$,

b) $N_h$ multiple de $2hN_{h-1}$,

c) $C_{2N_h, 4N_h}(J_0) \geqslant 3^{10h} C_{2N_h}(J_0)$.

Divisons le segment $I_h = [N_h, N_{h+1}[$ en $2h\left(\frac{N_{h+1}}{N_h} - 1\right)$ segments de longueur $\frac{N_h}{2h}$.

Posons:

$$I_h^i = \left[N_h + i\frac{N_h}{2h}, N_h + (i+1)\frac{N_h}{2h}\right[, \quad i = 0, 1, \ldots, 2h\left(\frac{N_{h+1}}{N_h} - 1\right) - 1.$$

Nous allons définir une suite $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ en la définissant sur chaque intervalle $I_h$; ($N = \bigcup_{h\in N} I_h$).

Posons

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \in I_h^i \text{ lorsque } i \text{ est pair}, \\ 1 & \text{pour } n \in I_h^i \text{ lorsque } i \text{ est impair}; \end{cases}$$

$\varepsilon_n$ prend autant de fois les valeurs 0 et 1 sur tout intervalle de la forme $\left[0, N_h + i\frac{N_h}{h}\right[$.

La suite des points $\left(N_h + i\frac{N_h}{h}\right)$ vérifiant les condition du lemme b) il est clair que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ est équirépartie.

**3. Fin de la démonstration.** Supposons que la condition (1) n'est pas vérifiée pour $J_0 = \{a_k\}_{k\in N}$. Considérons alors la suite $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ équirépartie définie précédemment.

D'après le lemme 1, il existe un ensemble d'indices $J = \{b_k\}_{k\in N}$, équivalent à $J_0$, tel que la suite $(\varepsilon_{b_k})_{k\in N}$ soit équirépartie.

$b_k$ est équivalent à $a_k$, donc appartient à l'intervalle $[a_k(1-\frac{1}{2}), a_k(1+\frac{1}{2})[$ pour $k$ assez grand.



Nous déduisons du c) de B.2 la formule:

c') $C_{N_h, 6N_h}(J) \geqslant 3^{10h} C_{N_h}(J)$.

La suite $(\varepsilon_{b_k})_{k\in N}$ étant équirépartie, nous avons pour $x$ assez grand:

$$\tfrac{1}{3}C_x(J) < C_x(J \cap \{n, \varepsilon_n = 0\}) < \tfrac{2}{3}C_x(J),$$
$$\tfrac{1}{3}C_x(J) < C_x(J \cap \{n, \varepsilon_n = 1\}) < \tfrac{2}{3}C_x(J).$$

Posons $c = C_{N_h}(J)$ pour $h$ assez grand.

$$\varepsilon_{b_k} = \begin{cases} 0 & \text{pour } b_k \in J \cap I_h^0; \text{ le nombre des } b_k \text{ pris dans } I_h^0 \text{ est inférieur à } 2c, \\ 1 & \text{pour } b_k \in J \cap I_h^1; \text{ le nombre des } b_k \text{ pris dans } I_h^1 \text{ est inférieur à } 2\cdot 3c. \end{cases}$$

De même, pour $b_k \in J \cap I_h^i$; le nombre des $b_k$ pris dans $I_h^i$ est inférieur à $2\cdot 3^i c$.

On en déduit que $C_{N_h, 6N_h}(J) < 2c(1+3+\ldots+3^{10h-1}) = c(3^{10h}-1)$ ce qui est en contradiction avec la condition

c') $C_{N_h, 6N_h}(J) \geqslant 3^{10h} C_{N_h}(J)$.

## IV. Suffisance de la condition

Soit $J_0 = \{a_k\}_{k\in N}$ une suite strictement croissante d'entiers vérifiant les conditions (1) et (2).

Soit $u = (u_n)_{n\in N}$ une suite de $U_a$. Introduisons une suite $(v_k)_{k\in N}$ équirépartie, à partir de laquelle nous construirons une suite $J = \{b_k\}_{k\in N}$ répondant à la question.

**A. Définitions et notations.** Posons pour $x \in \boldsymbol{R}^+$ et $\mathscr{L}$ entier, $\mathscr{L} \geqslant 2$

$$A_{x,\mathscr{L}} = \left\{k, a_k \in \left[x, x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}} - 1}\right)\right[\right\}.$$

Si $h = \mathrm{Card}(A_{x,\mathscr{L}})$,

$$A_{x,\mathscr{L}} = \{k_{x,\mathscr{L}}, k_{x,\mathscr{L}}+1, \ldots, k_{x,\mathscr{L}}+h-1\},$$
$$A_{x,\mathscr{L},i} = \{k_{x,\mathscr{L}}+h_{i-1}, k_{x,\mathscr{L}}+h_{i-1}+1, \ldots, k_{x,\mathscr{L}}+h_i-1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$$

où $h_i = \left[\frac{ih}{\mathscr{L}}\right]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$.

$A_{x,\mathscr{L}}$ est union disjointe des $A_{x,\mathscr{L},i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$.

Considérons l'intervalle

$$I_{x,\mathscr{L}} = \left[x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}} - 1}\right), x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}} - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}}\right)\right[.$$

De même, $I_{x,\mathscr{L}}$ est union disjointe des intervalles:

$$I_{x,\mathscr{L},i} = \left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right)\left(1+\frac{i-1}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}}\right), x\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right)\left(1+\frac{i}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}}\right)\right[,$$

$$i = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}.$$

**B.** Lemme. *Soit $I$ un intervalle de mesure positive du tore. Pour tout entier $\mathscr{L} \geqslant 2$ et tout entier $i \leqslant \mathscr{L}$*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{k,\ k\in A_{x,\mathscr{L},i},\ v_k\in I\}}{\operatorname{card}\{n,\ n\in I_{x,\mathscr{L},i},\ u_n\in I\}} < 1.$$

Soit $\mathscr{E} > 0$. La suite $(v_k)_{k\in N}$ étant équirépartie, pour $x$ assez grand

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\{k,\ k\in A_{x,\mathscr{L},i},\ v_k\in I\} &\leqslant (h_i-h_{i-1})\mu(I)+\mathscr{E}(k_{x,\mathscr{L}}+h_i)\\ &\leqslant (h_i-h_{i-1})\mu(I)+2x\mathscr{E}.\end{aligned}$$

Or, d'après la condition (2):

$$(h_i-h_{i-1}) \leqslant (a+\mathscr{E})x\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right).$$

Soit finalement:

$$\operatorname{card}\{k,\ k\in A_{x,\mathscr{L},i},\ v_k\in I\}$$

$$\leqslant x\left[(a+\mathscr{E})\frac{1}{\mathscr{L}}\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\mu(I)+2\mathscr{E}\right] = ax\frac{\mu(I)}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}-1}+x\mathscr{E}'.$$

Si $(u_n)_{n\in N}$ contient une sous-suite de densité $a'$ équirépartie, pour $x$ assez grand:

$$\operatorname{card}\{n,\ n\in I_{x,\mathscr{L},i}, u_n\in I\} \geqslant a'x\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right)\frac{\mu(I)}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}}-x\mathscr{E}.$$

Or $a'$ peut être choisi arbitrairement voisin de $a$ car $(u_n)_{n\in N}$ appartient à $U_a$, donc:

$$\operatorname{card}\{n,\ n\in I_{x,\mathscr{L},i},\ u_n\in I\}$$

$$\geqslant (a-\mathscr{E})x\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right)\frac{\mu(I)}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}}-x\mathscr{E} = ax\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right)\frac{\mu(I)}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}}-x\mathscr{E}'',$$

d'où:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\operatorname{card}\{k,\ k\in A_{x,\mathscr{L},i},\ v_k\in I\}}{\operatorname{card}\{n,\ n\in I_{x,\mathscr{L},i},\ u_n\in I\}} \leqslant \frac{\dfrac{1}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}-1}}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\mathscr{L}}-1}\right)\left(\dfrac{1}{\mathscr{L}\sqrt{\mathscr{L}}}\right)} = \frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{1+\sqrt{\mathscr{L}}-1} < 1.$$



Pour tout $\mathscr{L}$; il existe donc $x_{\mathscr{L}}$ tel que:

$$x \geqslant x_{\mathscr{L}} \Rightarrow \operatorname{card}\{k,\ k\in A_{x,\mathscr{L},i},\ v_k\in I\} \leqslant \operatorname{card}\{n,\ n\in I_{x,\mathscr{L},i},\ u_n\in I\}$$

pour tout $i$ entier, $1\leqslant i\leqslant \mathscr{L}$ et pour tout intervalle $I$ de la forme $\left[\dfrac{\lambda}{\mathscr{L}}, \dfrac{\lambda+1}{\mathscr{L}}\right[$, $\lambda = 0, 1, \ldots, \mathscr{L}-1$.

Il existe donc une injection $\varphi$ de $A_{x,\mathscr{L},i}$ dans $I_{x,\mathscr{L},i}$, telle que:

$$|u_{\varphi(k)}-v_k| < \frac{1}{\mathscr{L}}.$$

On définit une injection $\psi$ croissante de $A_{x,\mathscr{L},i}$ dans $I_{x,\mathscr{L},i}$ telle que les $\Psi(k)$ soient les $\varphi(k)$ rangés dans l'ordre croissant.

**C. Construction de la suite $(b_k)_{k\in N}$.** Considérons la partition de $R^+$ en intervalles $[X_\nu, X_{\nu+1}[$ avec $X_0 = 0$, $X_1 = x_2, \ldots, X_{\nu+1} = X_\nu\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\mathscr{L}_\nu}-1}\right)$ pour $\nu > 1$, $\mathscr{L}_\nu$ étant une suite surjective croissante d'entiers tendant vers l'infini telle que $X_\nu \geqslant x_{\mathscr{L}_\nu}$.

On peut définir les injections $\varphi_{\nu,i}$ et $\psi_{\nu,i}$ de $A_{X_\nu,\mathscr{L}_\nu,i}$ dans $I_{X_\nu,\mathscr{L}_\nu,i}$; leurs réunions pour $i = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}_\nu$ forment des injections de l'ensemble des $k$ tels que $a_k\in[X_\nu, X_{\nu+1}[$ dans $\left[X_{\nu+1}, X_{\nu+1}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\mathscr{L}_\nu}}\right)\right[$ qui est inclus dans $[X_{\nu+1}, X_{\nu+2}[$ car $\mathscr{L}_{\nu+1} = \mathscr{L}_\nu$ ou $\mathscr{L}_{\nu+1} = \mathscr{L}_\nu+1$.

On définit donc des injections $\Phi$ et $\Psi$ de $\{k|\ a_k\in[X_1, +\infty[\}$ dans $[X_2, +\infty[$. $\Psi$ étant strictement croissante. On prolongera $\Phi$ et $\Psi$ pour les $k$ tels que $a_k\in[0, X_1[$ par $\Phi(k) = \Psi(k) = a_k$. Soient $b_k = \Psi(k)$ et $n_k = \Phi(k)$.

Il est clair que $b_k$ est équivalent à $a_k$ et que la suite $(u_{n_k})_{k\in N}$ est adjacente à la suite $(v_k)_{k\in N}$ donc équirépartie.

**D. La suite $(u_{b_k})_{k\in N}$ est équirépartie.** En effet, pour tout intervalle $I$ du tore:

$$d_x(\{n,\ u_n\in I\}/\{b_k\}_{k\in N}) = d_x(\{n,\ u_n\in I\}/\{n_k\}_{k\in N})$$

lorsque $x$ est borne d'un intervalle $I_{X_\nu,\mathscr{L}_\nu,i}$, il suffit donc de montrer que la suite des bornes des $I_{X_\nu,\mathscr{L}_\nu,i}$ vérifie la condition du lemme c).

Soient $p$ et $q$ les bornes d'un tel intervalle. Alors:

$$\frac{c_{p,q}(\{b_k\})}{c_p(\{b_k\})} \leqslant \frac{\left[\dfrac{ih}{\mathscr{L}_\nu}\right]-\left[\dfrac{(i-1)h}{\mathscr{L}_\nu}\right]}{k_{p,\mathscr{L}_\nu}+\left[\dfrac{(i-1)h}{\mathscr{L}_\nu}\right]} \leqslant \frac{\dfrac{h}{\mathscr{L}_\nu}+1}{k_{p,\mathscr{L}_\nu}}$$

et cette expression tend vers 0 quand $\nu$ tend vers l'infini, car $\dfrac{h}{k_{p,\mathscr{L}_\nu}} = \dfrac{C_{X_\nu,X_{\nu+1}}(J_0)}{C_{X_\nu}(J_0)}$ est borné d'après la condition (1) et $\mathscr{L}_\nu$ tend vers l'infini.

References

[1] Y. Dupain et J. Lesca, *Répartition des sous-suites d'une suite donnée*, Ac Arith. 23 (1973), p. 307–314.

[2] M. Mendès France, *Suites et sous-suites équiréparties modulo* 1, Journées Arit métiques Françaises, Université de Provence, 1971.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
Talence, France

*Reçu le 30. 10. 1973* (48

ACTA ARITHMETICA
XXVI (1975)

# On some estimates in the theory of $\zeta(s,\chi)$-functions

by

W. Staś and K. Wiertelak (Poznań)

**1.** Let $K$ be an algebraic number field, $\nu$ and $\Delta$ the degree and the discriminant of the field $K$ respectively (see [2]).

Denote by $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ the norm of an ideal $\mathfrak{a}$ of $K$, by $\mathfrak{f}$ a given ideal of $K$ and by $\mathfrak{p}$ a prime ideal of $K$ (see [2]).

Denote further by $\mathscr{H} \pmod{\mathfrak{f}}$ an ideal-class mod $\mathfrak{f}$ ([3], Def. VIII), by $\mathscr{H}_0 \pmod{\mathfrak{f}}$ the principal class mod $\mathfrak{f}$ and by $h(\mathfrak{f})$ the class-number.

Let $\chi(\mathscr{H})$ be a character of the abelian group of ideal-classes $\mathscr{H} \pmod{\mathfrak{f}}$, $\chi(\mathfrak{a})$ the extension of $\chi(\mathscr{H})$ ([3], Def. X) and $\chi_0$ — the principal character mod $\mathfrak{f}$.

Denote by $\zeta_K(s)$ the Dedekind Zeta-function and by $\zeta(s,\chi)$ the Hecke–Landau Zeta-functions ([3], Def. XVII).

$C_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, are positive constants independent of $K$.

Denote further

$$\Delta(x,\mathscr{H}) = \sum_{n\leqslant x}\gamma(n) - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}, \tag{1.1}$$

$$\Delta(x,\mathscr{H}_0) = \sum_{n\leqslant x} g(n) - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}, \tag{1.2}$$

where

$$\gamma(n) = \sum_{\substack{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m = n\\ \mathfrak{p}^m \in \mathscr{H} \pmod{\mathfrak{f}}}} \log \mathfrak{N}\mathfrak{p}, \tag{1.3}$$

$$g(n) = \sum_{\substack{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m = n\\ \mathfrak{p}^m \in \mathscr{H}_0 \pmod{\mathfrak{f}}}} \log \mathfrak{N}\mathfrak{p} \tag{1.4}$$

and

$$E_0 = E_0(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{if } \chi \neq \chi_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

The aim of this note is to determine the equivalence between the domain in which $\zeta(s,\chi) \neq 0$ and the upper estimate of $|\Delta(x,\mathscr{H}_0)|$. In the