References

[1] A. Baker, *On the quasi-periods of the Weierstrass ζ-function*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 16 (1969).
[2] — *On the periods of Weierstrass p-functions*, Proceedings of the Rome conference in number theory (December 1968).
[3] J. Coates, *The transcendence of linear forms in $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2\pi i$*, Amer. Math. Journal 113 (1971).
[4] R. Tijdeman, *On the distribution of the values of certain functions*, Thesis.

BROWN UNIVERSITY
Providence, Rhode Island, U.S.A.

Received on 10. 10. 1973 (471)

ACTA ARITHMETICA
XXVI (1974)

Scharfe untere Abschätzung für die Anzahlfunktion der *B*-Zwillinge

von

KARL-HEINZ INDLEKOFER (Frankfurt am Main)

1. Einleitung. Es sei $\mathscr{B}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die sich als Summe zweier Quadrate von ganzen Zahlen darstellen lassen. Die Elemente von $\mathscr{B}$ heißen B-Zahlen. Das Paar $(n, n+1)$ nennen wir B-Zwilling, wenn sowohl $n\in\mathscr{B}$ als auch $n+1\in\mathscr{B}$ ist. Nach G. Rieger [6] gilt für die Anzahl (1) $B_2(x) = \#\{n \leqslant x\colon n\in\mathscr{B},\ n+1\in\mathscr{B}\}$ der B-Zwillinge unterhalb x die obere Abschätzung

$$B_2(x) \ll x(\log x)^{-1}. \tag{1.1}$$

Bezüglich der Abschätzung von $B_2(x)$ nach unten ist bisher nur (vgl. [2], [7])

$$B_2(x) \geqslant c(\varepsilon)x(\log x)^{-(2\log 2+\varepsilon)} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{1.2}$$

bekannt, wobei die Konstante $c(\varepsilon)$ nur von ε abhängt. In dieser Note soll mit Hilfe des Selberg'schen Siebes eine Abschätzung von $B_2(x)$ nach unten gegeben werden, welche (1.2) verbessert und die richtige Größenordnung von $B_2(x)$ angibt. Wir zeigen

SATZ. *Für die Anzahl der B-Zwillinge unterhalb x gilt*

$$B_2(x) \gg x(\log x)^{-1}. \tag{1.3}$$

Der Beweis beruht auf zwei Lemmata, welche Abschätzungen von Spezialfällen des linearen Siebes nach unten und des großen Siebes nach oben enthalten.

$c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen positive Konstanten.

2. Hilfssätze. Sei $b(\cdot)$ die charakteristische Funktion von $\mathscr{B}$, $\mathscr{D}_1 := \{m\in N\colon p\,|\,m,\ p \text{ prim} \Rightarrow p\equiv 1\ (4)\}$ und $\mathscr{D}_3 := \{m\in N\colon p\,|\,m,\ p \text{ prim} \Rightarrow p\equiv 3\ (4)\}$.

(1) $\#\{n\colon \ldots\}$ bezeichnet die Anzahl der n mit den Eigenschaften...

Bekanntlich ist $b(n) = 1$ $(n\in N)$ genau dann, wenn n die Gestalt

$$n = 2^a m_1 m_3^2 \quad (a \geqslant 0 \text{ ganz}, \ m_1\in\mathcal{D}_1, \ m_3\in\mathcal{D}_3) \tag{2.1}$$

hat. Da wir bei der Abschätzung von $B_2(x)$ nach unten der Einfachheit halber keinen Wert auf bestmögliche Konstanten legen wollen, reicht es aus, wegen

$$B_2(x) = \sum_{n\leqslant x} b(n)b(n+1) > \sum_{j\leqslant \frac{x-4}{16}} b(16j+4)b(16j+5) \tag{2.2}$$

nur $\left(y := \frac{x-4}{16}\right)$

$$B_2^*(y) := \sum_{\substack{j\leqslant y\\ (4j+1)(16j+5)\in\mathcal{D}_1}} 1 \geqslant y(\log y)^{-1} \tag{2.3}$$

zu beweisen.

Sei

$$\begin{gathered} M := \{m = (4j+1)(16j+5):\ j\leqslant y,\ j\in N\},\\ P_3(z) := \prod_{\substack{p<z\\ p\equiv 3(4),\, p \text{ prim}}} p \end{gathered} \tag{2.4}$$

und für jede endliche Folge $N = \{a_1, \ldots, a_r\}$ $(a_i\in Z,\ i = 1, 2, \ldots, r)$ ganzer Zahlen

$$A(N; z) := \#\{m\in N:\ (m, P_3(z)) = 1\}. \tag{2.5}$$

Bezeichnet $\omega(d)$ die verschiedenen Primteiler von d, so hat die Kongruenz

$$(4j+1)(16j+5) \equiv 0 \bmod d$$

genau dann $2^{\omega(d)}$ inkongruente Lösungen mod d, wenn d ungerade ist. Damit ist für quadratfreie Zahlen $d\in\mathcal{D}_3$

$$\sum_{\substack{m\in M\\ m\equiv 0(d)}} 1 = \frac{y}{d}2^{\omega(d)} + \theta 2^{\omega(d)}, \qquad |\theta|\leqslant 1. \tag{2.6}$$

Bestimmen wir eine multiplikative Funktion ϱ durch (p prim)

$$\begin{gathered} \varrho(p) = \begin{cases} 2 & p\equiv 3\ (4),\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}\\ \varrho(p^a) = 0 \quad \text{für} \quad a\geqslant 2,\ a\in N, \end{gathered} \tag{2.7}$$

so gilt folgendes

Lemma 1. *Für* $2\leqslant z\leqslant y$ *ist*

$$A(M; z) \geqslant y\prod_{p<z}\left(1-\frac{\varrho(p)}{p}\right)\left\{f\left(\frac{\log y}{\log z}\right) - c_1(\log y)^{-1/14}\right\}, \tag{2.8}$$

wobei

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < s\leqslant 2,\\ \dfrac{2e^\gamma}{s}\cdot\log(s-1) & \text{für} \quad 2\leqslant s\leqslant 4\end{cases} \tag{2.9}$$

und $f(s)$ für $s\geqslant 4$ monoton wachsend gegen 1 strebt (²). (γ *ist die Euler'sche Konstante.*)

Man erhält den Beweis von Lemma 1, indem man den Beweisgang bei W. B. Jurkat – H.-E. Richert [3] mit den notwendigen Modifikationen nachvollzieht. Da aber auch der obige Fall des linearen Siebes in dem Buch von H. Halberstam – H.-E. Richert [1] behandelt sein wird (vgl. [5]), wollen wir hier auf einen Beweis verzichten.

Lemma 2 ([4], Korollar 3.2). *Sei $\mathcal{N}$ eine Menge ganzer Zahlen aus dem Intervall $[M+1, M+N]$. Für primes p bezeichne $\omega(p)$ die Anzahl der Restklassen* mod p, *die keine Elemente von $\mathcal{N}$ enthalten. Dann gilt mit $Q\geqslant 1$ die Abschätzung* (³)

$$|\mathcal{N}| \leqslant \frac{N+2Q^2}{L}, \tag{2.10}$$

wobei

$$L = \sum_{n\leqslant Q}\mu^2(n)\prod_{p|n}\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)} \tag{2.11}$$

ist.

Lemma 3. *Sei eine Zahl $a = mp_3$ mit $m\in\mathcal{D}_1$ und primem $p_3\in\mathcal{D}_3$ gegeben. Setzt man*

$$M^* := \{n = ap+1:\ p\leqslant x/a,\ p \text{ prim}\}, \tag{2.12}$$

so ist für (⁴) $2\leqslant\sqrt{x/a}\leqslant z\leqslant x/a$

$$A(M^*; z) \leqslant c_2\frac{x}{a}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-3/2}. \tag{2.13}$$

Hierbei ist c_2 unabhängig von a, x und z.

(²) Genauere Aussagen über f findet man in [3], S. 226–227. Da wir die Eigenschaften von $f(s)$ nur für $2\leqslant s\leqslant 4$ benötigen werden, reicht uns die Darstellung (2.9) aus.

(³) Es ist $|\mathcal{N}| = \#\{n\in\mathcal{N}\}$.

(⁴) Der Bereich $\sqrt{x/a}\leqslant z\leqslant x/a$ wurde gewählt, da er für unsere Anwendungen ausreicht und den Beweis vereinfacht.

Beweis. Offensichtlich ist

$$A(M^*;z) = |\{p \leqslant x/a\colon\ p \text{ prim},\ (ap+1, P_3(z)) = 1\}|. \tag{2.14}$$

Setzt man

$$S(x/a, z) = \Big\{m \leqslant x/a\colon\ m \in \boldsymbol{N}, \Big(m, \prod_{\substack{p<\sqrt{x/a}\\ p \text{ prim}}} p\Big) = 1,\ (am+1, P_3(z)) = 1\Big\}, \tag{2.15}$$

so wird

$$A(M^*;z) \leqslant |S(x/a, z)| + \pi(\sqrt{x/a}). \tag{2.16}$$

Um Lemma 2 anwenden zu können, bestimmen wir die dort erklärte Funktion ω für die Menge $S(x/a, z)$. Für prime $p \neq p_3$ ist

$$\omega(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = 2 \text{ oder } p \equiv 1(4) \text{ und } p \leqslant \sqrt{x/a},\\ 2 & \text{falls } p \equiv 3(4) \text{ und } p < \sqrt{x/a},\\ 1 & \text{falls } p \equiv 3(4) \text{ und } \sqrt{x/a} \leqslant p < z,\\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\omega(p_3) = \begin{cases} 1 & p_3 < \sqrt{x/a},\\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit wird nach E. Wirsing [8], Hilfssatz 6, und (2.11) ($Q = \sqrt{x/a}$)

$$L \geqslant c_3 \cdot (\log x/a)^{3/2} \qquad (c_3 > 0),$$

und wegen (2.14), (2.15), (2.16) ist Lemma 3 bewiesen.

3. Beweis des Satzes. Für $z > 0$ setzen wir

$$\mathscr{D}_1(z) := \{m \in \boldsymbol{N}\colon\ p|m,\ p \text{ prim} < z \Rightarrow p \equiv 1(4)\} \tag{3.1}$$

und (5) für $l = 1, 2, \ldots$

$$\mathscr{D}_{1l}(z) := \Big\{n = m\prod_{i=1}^{l} p_i\colon\ m \in \mathscr{D}_1,\ p_i > z \text{ prim},\ p_i \equiv 3(4)\ (i = 1, 2, \ldots, l)\Big\}. \tag{3.2}$$

Dann ist offensichtlich für jedes l

$$\mathscr{D}_{1l}(z) \subset \mathscr{D}_1(z) \tag{3.3}$$

(5) Man beachte, daß die p_i $(i = 1, \ldots, l)$ in $\mathscr{D}_{1l}$ nicht notwendig verschieden sind.

und, falls $0 < z_1 < z_2$,

$$\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_1(z_1) \subset \mathscr{D}_1(z_2). \tag{3.4}$$

Da für $j = 1, 2, \ldots$ die Zahlen $4j+1$ und $16j+5$ jeweils $\equiv 1$ (4) sind, kommen die primen Teiler $p \equiv 3$ (4) von $4j+1$ bzw. $16j+5$ — gezählt mit ihrer Vielfachheit — in gerader Anzahl vor. Wegen $(4j+1, 16j+5) = 1$ folgt sofort ($z = y^{1/s}$, $2 < s < 5/2$)

$$\begin{aligned} A(M;z) &= B_2^*(y) + \sum_{\substack{m\in M\\ m\in\mathscr{D}_{12}(y^{1/s})}} 1 + \sum_{\substack{m\in M\\ m\in\mathscr{D}_{14}(y^{1/s})}} 1\\ &= B_2^*(y) + \sum_{\substack{j\leqslant y\\ 4j+1\in\mathscr{D}_{12}(y^{1/s})\\ 16j+5\in\mathscr{D}_1}} 1 + \sum_{\substack{j\leqslant y\\ 16j+5\in\mathscr{D}_{12}(y^{1/s})\\ 4j+1\in\mathscr{D}_1}} 1 + \sum_{\substack{j\leqslant y\\ 4j+1\in\mathscr{D}_{12}(y^{1/s})\\ 16j+5\in\mathscr{D}_{12}(y^{1/s})}} 1\\ &= B_2^*(y) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3\ (^6). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wegen (3.3), (3.4) lassen sich Σ_1 und Σ_3 durch

$$\Sigma^* := \sum_{\substack{j\leqslant y\\ 4j+1\in\mathscr{D}_{12}(y^{1/s})\\ 16j+5\in\mathscr{D}_1(y^{1/s})}} 1 \tag{3.6}$$

nach oben abschätzen. Es ist

$$\Sigma_1 + \Sigma_3 \leqslant \Sigma^* \leqslant \sum_{\substack{m<4y^{1-2/s}+1\\ m\in\mathscr{D}_1}}\ \sum_{\substack{y^{1/s}<q<\frac{4y^{1-1/s}+1}{m}\\ q\equiv 3(4) \text{ prim}}}\ \sum_{\substack{y^{1/s}<p<\frac{4y+1}{mq}\\ mqp+1\in\mathscr{D}_1(y^{1/s})\\ p \text{ prim}}} 1. \tag{3.7}$$

Auf die innerste Summe wenden wir Lemma 3 an. Mit $x := 4y+1$, $a := mq$ und $z := y^{1/s}$ $(2 < s < 5/2)$ ist für genügend großes y die Bedingung $\sqrt{x/a} \leqslant z \leqslant x/a$ erfüllt und wegen (2.13) folgt

$$\begin{aligned} \Sigma_1 + \Sigma_3 &\leqslant c_4 \frac{y}{(\log y)^{3/2}} \sum_{\substack{m<4y^{1-2/s}+1\\ m\in\mathscr{D}_1}}\ \sum_{\substack{y^{1/s}<q<\frac{4y^{1-1/s}+1}{m}\\ q \text{ prim}}} \frac{1}{mq}\\ &\leqslant c_4 \frac{y}{(\log y)^{3/2}} \sum_{\substack{m<4y^{1-2/s}+1\\ m\in\mathscr{D}_1}} \frac{1}{m}\{\log(s-1) + o(1)\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

für $y \to \infty$. Nun ist bekanntlich

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\in\mathscr{D}_1}} \frac{1}{m} \leqslant \prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv 1(4) \text{ prim}}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \ll (\log x)^{1/2}. \tag{3.9}$$

(6) Der Fall $4j+1$ bzw. $16j+5 \in \mathscr{D}_{14}(y^{1/s})$ kommt nicht vor, da sowohl (i) $4j+1$, $16j+5 < 16y+5$ als auch (ii) $n \in \mathscr{D}_{14}(y^{1/s}) \Rightarrow n > y^{4/s} > y^{8/5}$ gilt.

Das liefert für $\Sigma_1+\Sigma_3$ das Ergebnis

$$(3.10)\qquad \Sigma_1+\Sigma_3 \leqslant c_5\frac{y}{\log y}\sqrt{s-2}\,\{\log(s-1)+o(1)\}+O\left(\frac{y}{(\log y)^{3/2}}\right)$$

$$\text{für } y\to\infty.$$

Entsprechend läßt sich Σ_2 abschätzen. Berücksichtigen wir, daß in Lemma 1 für $2<s<5/2$

$$(3.11)\qquad A(M;\,y^{1/s}) \geqslant c_6\cdot y(\log y)^{-1}\log(s-1)-c_7 y(\log y)^{-15/14}$$

ist, so ergeben (3.5), (3.10) und (3.11) für $2<s<5/2$

$$(3.12)\qquad B_2^*(y) \geqslant c_6\frac{y}{\log y}\log(s-1)-c_7\frac{y}{(\log y)^{15/14}}-$$

$$-c_8\frac{y}{\log y}\sqrt{s-2}\,\{\log(s-1)+o(1)\}-c_9\frac{y}{(\log y)^{3/2}}.$$

Wir wählen s genügend nahe bei 2. Dann ist

$$(3.13)\qquad B_2^*(y) \geqslant c(s)\frac{y}{\log y}\qquad (c(s)>0)$$

für alle $y\geqslant y_0(s)$. (2.2), (2.3) und (3.13) ergeben die Behauptung des Satzes.

Literatur

[1] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, London 1974.

[2] K.-H. Indlekofer und W. Schwarz, *Über B-Zwillinge*, Arch. Math. 23 (1972), S. 251–256.

[3] W. B. Jurkat and H.-E. Richert, *An improvement of Selberg's sieve method. I*, Acta Arith. 11 (1965), S. 217–240.

[4] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Berlin–Heidelberg–New York 1971.

[5] H.-E. Richert, *Selberg sieve with weights*, Proc. Symposia Pure Math. 20 (1971), S. 287–310.

[6] G. J. Rieger, *Aufeinanderfolgende Zahlen als Summen von zwei Quadraten*, Indag. Math. 27 (1965), S. 208–220.

[7] W. Schwarz, *Über B-Zwillinge. II*, Arch. Math. 23 (1972), S. 408–409.

[8] E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen*, Math. Ann. 143 (1961), S. 75–102.

Eingegangen 1. 11. 1973 (479)