[3] R. R. Hall, *Halving an estimate obtained from Selberg's upper bound method*, Acta Arith. 25 (1974), pp. 347–351.
[4] J. H. van Lint and H.-E. Richert, *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. 11 (1965), pp. 209–216.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
Budapest, Hungary

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF YORK
Heslington, York

Received on 25. 7. 1973 (441)

ACTA ARITHMETICA
XXVI (1974)

Об одном классе бинарных биквадратичных форм

Э. Т. Аванесов (Кисловодск)

Пусть F_n — множество бинарных форм степени $n \geqslant 3$ с целыми коэффициентами.

В теории представлений чисел бинарными формами важное значение имеет следующая теорема, позволяющая эффективным методом исследовать соответствующие уравнения.

Теорема 1 (см. [3], стр. 304). *Положим*

$$f = f(x, y) = aNm(x-\alpha y),$$

где a — целое, $f \in F_n$. Назовем форму f и алгебраическое число α „исключительным", если существует такая нумерация сопряженных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что

$$\frac{\alpha_1-\alpha_i}{\alpha_2-\alpha_i}\cdot\frac{\alpha_2-\alpha_j}{\alpha_1-\alpha_j} = \frac{1-\xi_i}{1-\xi_j}$$

для любых i, j ($i \neq j$, $3 \leqslant i, j \leqslant n$), где $\xi_i \neq 1$ ($i = 3, 4, \ldots, n$) — некоторые корни из 1.

Все решения диофантова уравнения

$$f(x, y) = Ap_1^{z_1}\ldots p_s^{z_s}, \quad (x, y) = 1,$$

в целых $x, y, z_1 \geqslant 0, \ldots, z_s \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству

$$\max(|x|, |y|) < C_1 \exp|A|^{\varkappa},$$

где $\varkappa = 2+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — любое число, C_1 — вычислимая величина, не зависящая от A, при условии, что f не есть „исключительная" форма.

Класс E_n ($E_n \subset F_n$) „исключительных" форм введен еще в работах [1] и [2]; в [2], в частности показано отсутствие таких форм при $n \geqslant 5$.

В случае $n = 4$ вопрос о существовании „исключительных" форм оставался открытым, известен был лишь единственный пример $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 - y^4$, указанный в [2].

Целью этой заметки является полное описание всех „исключительных" форм 4 степени.

Заметим (см. [3]), что данное в теореме 1 определение „исключительных" форм применительно к случаю $n=4$ может быть сформулировано и следующим эквивалентным образом.

Определение. Пусть $f(x,y)=\sum\limits_{i=0}^{4} a_i x^{4-i}y^i$ — бинарная биквадратичная форма и α_i $(i=1,2,3,4)$ — корни уравнения $f(\alpha,1)=0$.

Если одновременно: 1) Среди корней α_i ровно одна пара комплексно сопряженных, и 2) элемент

$$\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}\cdot\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_4}$$

есть некоторый корень из I, то форма $f(x,y)$ называется *исключительной.*

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{4} a_i x^{4-i}y^i = a_0\prod_{i=1}^{2}(x^2+p_ixy+q_iy^2).$$

Тогда для коэффициентов p_i, q_i $(i=1,2)$ выполняются следующие соотношения:

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1+p_2=\dfrac{a_1}{a_0}, & p_1p_2=\dfrac{2a_2-z}{3a_0},\\[2mm] q_1+q_2=\dfrac{a_2+z}{3a_0}, & q_1q_2=\dfrac{a_4}{a_0},\\[2mm] p_1q_2+p_2q_1=\dfrac{a_3}{a_0}, & \end{cases}$$

где

$$(2)\qquad z^3-3Iz+J=0,$$

I и J соответственно квадратичный и кубический инварианты формы $f(x,y)$:

$$I=a_2^2-3a_1a_3+12a_0a_4,$$
$$J=-2a_2^3-27a_0a_3^2-27a_4a_1^2+9a_1a_2a_3+72a_0a_2a_4.$$

Лемма 2. *Уравнение*

$$(3)\qquad f(\alpha,1)=\sum_{i=0}^{4}a_i\alpha^{4-i}=a_0\prod_{i=1}^{2}(\alpha^2+p_i\alpha+q_i)=0$$

имеет ровно одну пару комплексно сопряженных корней тогда и только тогда, когда

$$(4)\qquad 4I^3<J^2.$$

Справедливость лемм 1 и 2 очевидна и устанавливается непосредственно.

Лемма 3. *Пусть α_i $(i=1,2,3,4)$ — корни уравнения* (3) *и*

$$\lambda=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}\cdot\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_4},$$

тогда

$$(5)\qquad \lambda=\frac{z-a_0\delta_1\delta_2}{z+a_0\delta_1\delta_2},$$

где $\delta_i^2=4q_i-p_i^2$ $(i=1,2)$ — дискриминанты трехчленов $\alpha^2+p_i\alpha+q_i$, взятые с противоположным знаком.

Доказательство. Пусть для определенности из (3):

$$(6)\qquad \begin{gathered}\alpha_{1,2}=\frac12\left(-p_1\pm\sqrt{p_1^2-4q_1}\right)=\frac12(-p_1\pm i\delta_1),\\ \alpha_{3,4}=\frac12(-p_2\pm i\delta_2).\end{gathered}$$

Тогда

$$\alpha_1-\alpha_2=i\delta_1,\qquad \alpha_3-\alpha_4=i\delta_2$$

и далее

$$\lambda=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}\cdot\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_4}=\frac{q_1+q_2-(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3)}{q_1+q_2-(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)}.$$

Прямое вычисление знаменателя, с учетом формул (1) и (6) дает:

$$q_1+q_2-(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)=\frac{a_2+z}{3a_0}-\frac{2a_2-z}{6a_0}+\frac12\delta_1\delta_2=\frac{1}{2a_0}(z+a_0\delta_1\delta_2).$$

Аналогично определяется числитель и окончательно

$$\lambda=\frac{z-a_0\delta_1\delta_2}{z+a_0\delta_1\delta_2}.$$

Лемма 4. *Если уравнение* (3) *имеет ровно одну пару комплексно сопряженных корней, то*

$$(7)\qquad z^2>4J.$$

В самом деле, из условия леммы вытекает, что знаки δ_1^2 и δ_2^2 различны, то есть $a_0^2\delta_1^2\delta_2^2<0$. С другой стороны,

$$a_0^2\delta_1^2\delta_2^2 = a_0^2\prod_{i=1}^{2}(4q_i-p_i^2) = a_0^2\left[16\frac{a_4}{a_0}+\left(\frac{2a_2-z}{3a_0}\right)^2-4(p_1^2q_2+p_2^2q_1)\right].$$

Но

$$p_1^2q_2+p_2^2q_1 = (p_1+p_2)(p_1q_2+p_2q_1)-p_1p_2(q_1+q_2) =$$

$$=\frac{a_1a_3}{a_0^2}-\frac{1}{9a_0^2}(2a_2-z)(a_2+z).$$

Далее элементарные преобразования приводят к представлению

$$a_0^2\delta_1^2\delta_2^2 = \tfrac{1}{3}(4I-z^2),$$

откуда и следует неравенство (7).

Лемма 5. *Если уравнение* (3) *имеет ровно одну пару комплексно сопряженных корней, то* 1) *элемент* λ — *комплексное число с нормой* 1, 2) *элемент* λ — *удовлетворяет следующему уравнению* 6 *степени с целыми рациональными коэффициентами*:

$$F(\lambda) = (J^2-4I^3)\lambda^6-3(J^2-4I^3)\lambda^5+3(2J^2+I^3)\lambda^4- \\ -(7J^2+26I^3)\lambda^3+3(2J^2+I^3)\lambda^2-3(J^2-4I^3)\lambda+ \\ +J^2-4I^3 = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Используя лемму 4, находим:

$$\lambda+\frac{1}{\lambda} = \frac{2(z^2+a_0^2\delta_1^2\delta_2^2)}{z^2-a_0^2\delta_1^2\delta_2^2} = \frac{z^2+2I}{z^2-I}, \tag{9}$$

откуда

$$(z^2-I)\lambda^2-(z^2+2I)\lambda+z^2-I = 0. \tag{10}$$

Из (10) получаем:

$$\lambda' = A+Bi,\qquad \lambda'' = A-Bi,$$

где A, B — действительные числа,

$$A = \frac{z^2+2I}{2(z^2-I)},\qquad B = \frac{1}{2(z^2-I)}|z|\sqrt{3(z^2-4I)}\,.$$

Наконец, непосредственно проверяется, что $A^2+B^2=1$, и таким образом, действительно, λ — комплексное число с нормой единица.

Для доказательства второй части леммы представим (9) в виде

$$\lambda+\frac{1}{\lambda} = \frac{z^2+2I}{z^2-I} = \frac{6I^2}{4I^3-J^2}z^2+\frac{3IJ}{4I^3-J^2}z-\frac{8I^3+J^2}{4I^3-J^2}.$$

Замена $\lambda+\frac{1}{\lambda}=\mu$ и последующее преобразование Чирнгаузена определяет следующее уравнение относительно μ:

$$(4I^3-J^2)\mu^3-3(4I^3-J^2)\mu^2-3(5I^3+J^2)\mu+50I^3+J^2 = 0.$$

Возвращение от μ к λ приводит к искомому уравнению (8) и лемма доказана.

Переходим к непосредственному исследованию. Итак, с помощью лемм 1–5 нами установлено, что для любой биквадратичной формы $f(x,y)$, у которой соответствующий многочлен $f(\alpha,1)$ имеет среди корней α_i ровно одну пару комплексно сопряженных, элемент

$$\lambda = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}\cdot\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_4}$$

является комплексным числом с нормой 1 и удовлетворяет уравнению (8) с целыми рациональными коэффициентами, зависящими от инвариантов формы $f(x,y)$. Так как форма $f(x,y)$ „исключительная”, то элемент λ одновременно должен быть корнем ε_m некоторой степени из I. Из этого вытекает, что λ — корень некоторого многочлена деления круга $X_m(\lambda)$.

Но λ определяется уравнением (8), а значит (см. например, [4], стр. 106–111), имеем:

$$m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\ 10, 11, 12, 14 \text{ или } 18.$$

Следовательно, если форма $f(x,y)$ „исключительная”, то либо $F(\lambda)$ неприводимо (тогда $\lambda=\varepsilon_7$, ε_9, ε_{14} или ε_{18}) либо $F(\lambda)$ приводимо (в оставшихся случаях). Соответственно каждому из этих случаев либо

$$F(\lambda) = X_m(\lambda)Q(\lambda),$$

где $X_m(\lambda)$ одного из видов: 1) $\lambda\pm1$, 2) λ^2+1, 3) $\lambda^2\pm\lambda+1$, 4) $\lambda^4\pm\pm\lambda^3+\lambda^2\pm\lambda+1$, 5) λ^4+1, 6) $\lambda^4-\lambda^2+1$, либо многочлен $F(\lambda)$ допускает одно из представлений:

$$F(\lambda) = \lambda^6\pm\lambda^5+\lambda^4\pm\lambda^3+\lambda^2\pm\lambda+1\qquad (m = 7 \text{ или } 14), \tag{I}$$

$$F(\lambda) = \lambda^6\pm\lambda^3+1\qquad (m = 9 \text{ или } 18). \tag{II}$$

Очевидно, рассматриваемые далее возможности, в случае их выполнения, должны приводить к некоторым дополнительным соотношениям, связывающим инварианты I и J.

1. Например, в случае $X_m(\lambda) = \lambda+1$ имеем:

$$F(\lambda) = F(-1) = -25J^2 = 0;$$

значит, из условия

(11) $$J = 0$$

выводится, что $\lambda = -1$.

2. Если $X_m(\lambda) = \lambda-1$, то

$$F(\lambda) = 4I^3 - J^2 = 0,$$

и это невозможно, так как противоречит лемме 2.

3. Пусть, далее $X_m(\lambda) = \lambda^2+1$. В этом случае

$$F(\lambda) = (\lambda^2+1)Q(\lambda)+R(\lambda),$$

где $R(\lambda) = -(J^2+50I^3)\lambda = 0$, откуда $\lambda = \pm i$ при

(12) $$J^2+50I^3 = 0.$$

Пример: $f(x, y) = x^4+2nx^2y^2-n^2y^4$. Здесь $I = -8n^2$, $J = -160n^3$; непосредственно проверяется выполнение условия (12) и $\lambda = \pm i$.

В частном случае при $n = -1$ получится пример, указанный в [2], стр. 993, 998–1000.

4. $X_m(\lambda) = \lambda^2-\lambda+1$. Очевидным образом, определяется условие:

(13) $$I = 0.$$

Пример: $f(x, y) = 3x^4-6x^2y^2-y^4$. $I = 0$, $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. В случае $X_m(\lambda) = \lambda^2+\lambda+1$ соотношение

(14) $$8J^2+49I^3 = 0$$

приводит к $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Если теперь принять $X_m(\lambda) = \lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$, то из представления

$$F(\lambda) = (\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1)Q(\lambda)$$

последует невозможная система соотношений:

$$8J^2-5I^3 = 0,$$

$$13J^2+29I^3 = 0.$$

Аналогично исследуются оставшиеся случаи, не приводящие к соотношениям между инвариантами I и J. Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Форма*

$$f(x, y) = a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4$$

будет „исключительной" если выполняется одно из условий:

1) $I = 0$,
2) $J = 0$,
3) $J^2+50I^3 = 0$,
4) $8J^2+25I^3 = 0$,

где I и J — квадратичный и кубический инварианты формы $f(x, y)$, $I = a_2^2-3a_1a_3+12a_0a_4$, $J = -2a_2^3-27a_0a_3^2-27a_4a_1^2+9a_1a_2a_3+72a_0a_2a_4$.

Замечание. Непосредственно устанавливается, что одновременное осуществление нескольких условий из (11)–(14) невозможно.

Цитированная литература

[1] В. Г. Спринджук, *Эффективная оценка рациональных приближений к алгебраическим числам*, ДАН БССР, 14 (8) (1970).

[2] — *О рациональных приближениях к алгебраическим числам*, ИАН СССР, 35 (5) (1971), стр. 991–1007.

[3] — *Новые применения аналитического и p-адическово методов в теории диофантовых приближений*, Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков, Москва 1972, стр. 301–306.

[4] Н. Чеботарев, *Основы теории Галуа*, Москва–Ленинград 1934.

Получено 18. 9. 1973 (459)