References

[1] R. Gold, *Γ-extensions of imaginary quadratic fields*, Pacific J. Math. 40 (1972), pp. 83–88.
[2] — *The nontriviality of certain Z_l-extensions*, to appear in J. of Number Theory.
[3] R. Greenberg, *On some questions concerning the Iwasawa invariants*, Ph. D. Thesis, Princeton University 1971.
[4] K. Iwasawa, *On Γ-extensions of algebraic number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1969), pp. 183–226.
[5] — *On the theory of cyclotomic fields*, Ann. of Math. 70 (1959), pp. 530–561.
[6] — *On Z_l-extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. 98 (1973), pp. 246–326.
[7] J.-P. Serre, *Classes des corps cyclotomiques*, Sem. Bourbaki, 174 (1958), pp 1–11.

Received on 17. 2. 1973 (373)

ACTA ARITHMETICA
XXVI (1974)

Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой

Ян Мозер (Братислава)

Цель этой заметки: дать некоторые дополнения к предшествующей заметке [5], и попробовать применить дзета-функцию Римана в релятивистской космологии.

Пусть $0<\gamma'<\gamma''$ — ординаты соседних нулей дзета-функции Римана $\varrho'=\frac{1}{2}+i\gamma'$, $\varrho''=\frac{1}{2}+i\gamma''$, и, $\{t_0\}$ — последовательность значений $t_0>0$ таких, что

(а) $$\gamma'<t_0<\gamma'',$$

(б) $$Z'(t_0)=0,$$

(b) $$t_0\to+\infty.$$

Пусть $\{\tilde{t}_0\}$ — подпоследовательность последовательности $\{t_0\}$ такого рода, что
$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tilde{t}_0)|>\frac{1}{\tilde{t}_0^{\alpha}},\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

Пусть $\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}''$ — ординаты таких соседних нулей функции $\zeta(s)$, что $\tilde{\gamma}'<\tilde{t}_0<\tilde{\gamma}''$. Символ $\{\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}''\}$ обозначает последовательность таких соседних ординат.

Численные эксперименты с функцей $Z(t)$ показывают, что точки t_0 распределены с небольшим разбросом в окрестностях точек $(\gamma'+\gamma'')/2$.

Обозначим
$$\Delta(t_0)=\min\{t_0-\gamma', \gamma''-t_0\}.$$
Теоретически неисключено, что даже в случае
$$\gamma''-\gamma'>\frac{1}{\gamma'^{\alpha}},$$
$\Delta(t_0)$ — сколь угодно мало, т.е., точка t_0 находится на сколь угодно малом расстоянии или от точки γ' или от точки γ''. Точнее: возникает вопрос об оценке снизу величины $\Delta(t_0)$. В этом направлении имеет место

Теорема. *В предположении справедливости гипотезы Римана*

$$\Delta(\tilde{t}_0) > \frac{1}{\tilde{\gamma}'^{\alpha}}, \quad 0<\alpha\leqslant 1$$

(*начиная с определенного* $\tilde{t}_0$).

Доказательство проходит буквально так же, как доказательство Теоремы 1 в заметке [5]. Только роль соотношения [5], (8), играет теперь соотношение

$$\Delta(\tilde{\tilde{t}}_0) \leqslant \frac{1}{\tilde{\tilde{\gamma}}'^{\alpha_0}},$$

и, соотношение [5], (10) заменяют соотношения

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\gamma)^2} > \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\tilde{\tilde{\gamma}}')^2} \geqslant \tilde{\tilde{\gamma}}'^{2\alpha_0}, \quad \Delta(\tilde{\tilde{t}}_0) = \tilde{\tilde{t}}_0-\tilde{\tilde{\gamma}}',$$

или

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\gamma)^2} > \frac{1}{(\tilde{\tilde{t}}_0-\tilde{\tilde{\gamma}}'')^2} \geqslant \tilde{\tilde{\gamma}}'^{2\alpha_0}, \quad \Delta(\tilde{\tilde{t}}_0) = \tilde{\tilde{\gamma}}''-\tilde{\tilde{t}}_0.$$

Примечание. Тот факт, что мы ограничиваемся промежутком $(0,1\rangle$ для значении α не имеет принципиального значения. Теорема 1, [5], и Теорема этой заметки, сохраняют силу и для промежутка $0<\alpha<+\infty$.

Покажем, дальше, что имеет место

Формула. В предположении справедливости гипотезы Римана:

(1)
$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Из этой формулы получаются следствия, исключающие некоторые возможности в поведении $Z(t)$.

А именно, имеют место:

Следствие 1. *На промежутке* $\gamma'<t<\gamma''$ *функция* $\dfrac{Z'(t)}{Z(t)}$ — *убывающая.*

Следствие 2. *Одновременно невозможно выполнение двух соотношении:* $Z'(t_0)=0$, $Z''(t_0)=0$.

Следствие 3. *На промежутке* $\gamma'<t<\gamma''$, *если* $Z(t)>0$, *невозможно существование двух максимумов и одного минимума. Аналогично, если* $Z(t)<0$, *невозможно существование двух минимумов и одного максимума.*

Дадим теперь

Вывод формулы. Имеет место

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = e^{-i\vartheta(t)}Z(t),$$

$$\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)} = \vartheta'(t) - i\frac{Z'(t)}{Z(t)},$$

(2)
$$\left\{\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)}\right\}^2 = \vartheta'^2(t) - \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + i2\vartheta'(t)\frac{Z'(t)}{Z(t)},$$

$$\frac{Z''(t)}{Z(t)} - \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = i\vartheta''(t) - \frac{\zeta''(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)} + \left\{\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)}\right\}^2,$$

так что

(3)
$$\frac{\zeta''(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)} = -\frac{Z''(t)}{Z(t)} + \vartheta'^2(t) + i\left[\vartheta''(t) + 2\vartheta'(t)\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right].$$

С другой стороны, см. [5]

(4)
$$\frac{\zeta''(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)} = \sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2} + \left\{\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)}\right\}^2 + O\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= \sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2} + \vartheta'^2(t) - \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + i2\vartheta'(t)\frac{Z'(t)}{Z(t)} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

если использовать (2). Так как $\vartheta''(t)=O\left(\frac{1}{t}\right)$, см. [6], стр. 260, то, сравнивая соотношения (3), (4) получается

$$\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2} = \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 - \frac{Z''(t)}{Z(t)} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

т.е. (1).

Из соотношения (4) получается

Следствие 4.

$$\zeta''(\tfrac{1}{2}+it)\neq 0, \quad \gamma'<t<\gamma''.$$

Действительно. В случае $\zeta''(\frac{1}{2}+i\tilde{t})=0$, $\gamma'<\tilde{t}<\gamma''$, из соотношения (4) получается

(5)
$$\sum_{\gamma}\frac{1}{(\tilde{t}-\gamma)^2} + \vartheta'^2(\tilde{t}) - \left\{\frac{Z'(\tilde{t})}{Z(\tilde{t})}\right\}^2 = O\left(\frac{1}{\tilde{t}}\right),$$

(6)
$$2\vartheta'(\tilde{t})\frac{Z'(\tilde{t})}{Z(\tilde{t})} = O\left(\frac{1}{\tilde{t}}\right).$$

Так как, см. [6], стр. 260,

$$\vartheta'(\tilde{t}) \sim \tfrac{1}{2}\ln\tilde{t}, \tag{7}$$

то из (6) получается

$$\frac{Z'(\tilde{t})}{Z(\tilde{t})} = O\left(\frac{1}{\tilde{t}\ln\tilde{t}}\right). \tag{8}$$

Теперь, соотношение (5) в силу (8) дает

$$\sum_\gamma \frac{1}{(\tilde{t}-\gamma)^2} + \vartheta'^2(\tilde{t}) = O\left(\frac{1}{\tilde{t}}\right).$$

Это, однако, противоречит соотношению (7).

Покажем также, что в предположении справедливости гипотезы Римана, имеют место

Асимптотические формулы:

$$\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} \sim 2\sum_\gamma \frac{t_0^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} - \frac{\pi}{4t_0}, \tag{A}$$

$$\sum_\gamma \frac{t_0^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} \sim \sum_\gamma \frac{\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} - \frac{\pi}{4t_0}, \tag{Б}$$

при $t_0 \to +\infty$.

В заметке [4] (будучи недовольными интерпретацией соотношения Римана в книге [1], стр. 91–92), отделяя в соотношении

$$\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it_0)}{\zeta(\frac{1}{2}+it_0)} + \vartheta'(t_0) = 0,$$

действительную и мнимую части (используя при этом соотношение

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{d}{ds}\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_\varrho\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right))$$

мы получили при $t_0 \to +\infty$, с одной стороны, соотношение Римана

$$\ln\frac{e^{C+2}}{4\pi} = \sum_\gamma \frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2},$$

(C — постоянная Эйлера), и, с другой стороны,

$$\lim_{t_0\to+\infty}\sum_\gamma \frac{t_0}{\gamma^2-t_0^2} = \frac{\pi}{4},$$

т.е.

$$\sum_\gamma \frac{1}{\gamma^2-t_0^2} \sim \frac{\pi}{4t_0}. \tag{9}$$

Теперь, если в надлежащем месте использовать (9) получается:

$$\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} = \sum_{\gamma>0}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + \sum_{\gamma<0}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2} = \tag{A}$$

$$= \sum_{\gamma>0}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + \sum_{\gamma>0}\frac{1}{(t_0+\gamma)^2} = \sum_{\gamma>0}\frac{(t_0-\gamma)^2+(t_0+\gamma)^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} =$$

$$= 2\sum_{\gamma>0}\frac{t_0^2+\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} = 2\sum_{\gamma>0}\frac{t_0^2-\gamma^2+2\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} =$$

$$= 2\sum_{\gamma>0}\frac{1}{t_0^2-\gamma^2} + 4\sum_{\gamma>0}\frac{\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} =$$

$$= \sum_\gamma \frac{1}{t_0^2-\gamma^2} + 2\sum_\gamma\frac{\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} \sim -\frac{\pi}{4t_0} + 2\sum_\gamma \frac{\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2},$$

$$\sum_\gamma \frac{t_0^2-\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} = \sum_\gamma \frac{1}{t_0^2-\gamma^2} \sim -\frac{\pi}{4t_0}, \tag{Б}$$

т.е.

$$\sum_\gamma \frac{t_0^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} \sim \sum_\gamma \frac{\gamma^2}{(t_0^2-\gamma^2)^2} - \frac{\pi}{4t_0}.$$

ДОБАВЛЕНИЕ

Применение дзета-функции Римана в релятивистской космологии

Как известно (см. например [3], стр. 209, (8.210), (8.211)) основой релятивистской космологии являются следующие уравнения А. А. Фридмана:

$$\varkappa c^2\varrho = \frac{3}{R^2}(kc^2+R'^2), \tag{10}$$

$$\varkappa p = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2}, \tag{11}$$

(космологическая постоянная отброшена). В этих уравнениях: $\varkappa$ — гравитационная постоянная, c — скорость света в пустоте, $\varrho(t)$ —

плотность вещества, $p(t)$ — давление, $k=-1,0,1$, $R(t)$ — „радиус" Вселенной, штрих обозначает производную по времени.

Так что, имеются два уравнения для трех неизвестных функций $\varrho(t)$, $p(t)$, $R(t)$. Эта неопределенность устраняется постулированием „уравнения состояния"

(12) $$F(\varrho,p)=0.$$

Обычно полагают

(13) $$p=0,$$

т.е., изучают модели Вселенной с нулевым давлением.

Изучалось также поведение моделей Вселенной в случае

(14) $$p=\frac{c^2\varrho}{3},$$

(см., например, [2], стр. 387, 388), т.е., в случае максимального возможного давления $p(t)$ при данной плотности $\varrho(t)$.

Напомним, что естественными физическими ограничениями для плотности и давления, являются следующие неравенства

(15) $$\varrho>0,\quad p\geqslant 0.$$

С математической точки зрения, обычный способ построения моделей Вселенной заключается в постулировании уравнения (12), и, в последующем решении двух уравнений (10), (11) для двух независимых функций.

Мы построим (в случае справедливости гипотезы Римана) бесконечное множество моделей Вселенной тем способом, что будем постулировать поведение „радиуса" Вселенной так, что неравенства (15) для физических величин удовлетворяются в некоторых промежутках времени.

Основой построения этого множества является следующий

Постулат.

(16) $$R(t)=|Z(t)|,\quad k=+1,$$

т.е. „радиус" Вселенной отождествляется с функцией $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, и, принимается „сферическая" геометрия.

В этом случае, в силу формулы (1), уравнения (10), (11) дают

(17) $$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t)=\frac{c^2}{Z^2(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2,$$

(18) $$\frac{\varkappa}{2}p(t)=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}-\frac{3}{2}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2-\frac{c^2}{2}\frac{1}{Z^2(t)}+O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Теперь нужно найти промежутки времени t, для которых удовлетворяются физические требования (15).

Выполнение первого из этих требовании очевидно, т.е., $\varrho(t)>0$ для всех $t\neq\gamma$.

Приступим к построению промежутков, для которых выполняется условие $p(t)\geqslant 0$.

С одной стороны, в силу оценки Литтлвуда, [6], стр. 223,

$$\gamma''-\gamma'<\frac{A}{\ln\ln\ln\gamma'},$$

имеет место

(19) $$\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}>\frac{1}{(\gamma''-\gamma')^2}>A_1(\ln\ln\ln t_0)^2.$$

С другой стороны, из Ω-теоремы Литтлвуда–Титчмарша, следует существование такой подпоследовательности $\{\tilde{t}_0\}$ последовательности $\{t_0\}$, что

(20) $$|Z(\tilde{t}_0)|>A_2\exp(\ln^{\beta}\tilde{t}_0),\quad \beta<\tfrac{1}{2}.$$

Напомним еще, что

(21) $$Z'(\tilde{t}_0)=0.$$

Из соотношений (19), (20), (21) следует существование последовательности $\{\delta(\tilde{t}_0)\}$, $\delta(\tilde{t}_0)>0$, такого рода, что

(22) $$\tilde{\gamma}'<\tilde{t}_0-\delta(\tilde{t}_0)<\tilde{t}_0+\delta(\tilde{t}_0)<\tilde{\gamma}'',$$

(23) $$p(t)\geqslant 0,\quad t\in\langle\tilde{t}_0-\delta(\tilde{t}_0),\tilde{t}_0+\delta(\tilde{t}_0)\rangle.$$

На этом построение упоминавшегося бесконечного множества моделей Вселенной закончено.

Литература

[1] Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел*, Москва 1971.
[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Москва 1962.
[3] Г. Мак-Витти, *Общая теория относительности и космология*, Москва 1961.
[4] Ян Мозер, *Некоторые следствия из гипотезы Римана*, Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathematica (в печати).
[5] — *Об одном новом следствии из гипотезы Римана*, Acta Arith. 25 (1974), pp. 307–311.
[6] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Получено 2. 3. 1973 (385)